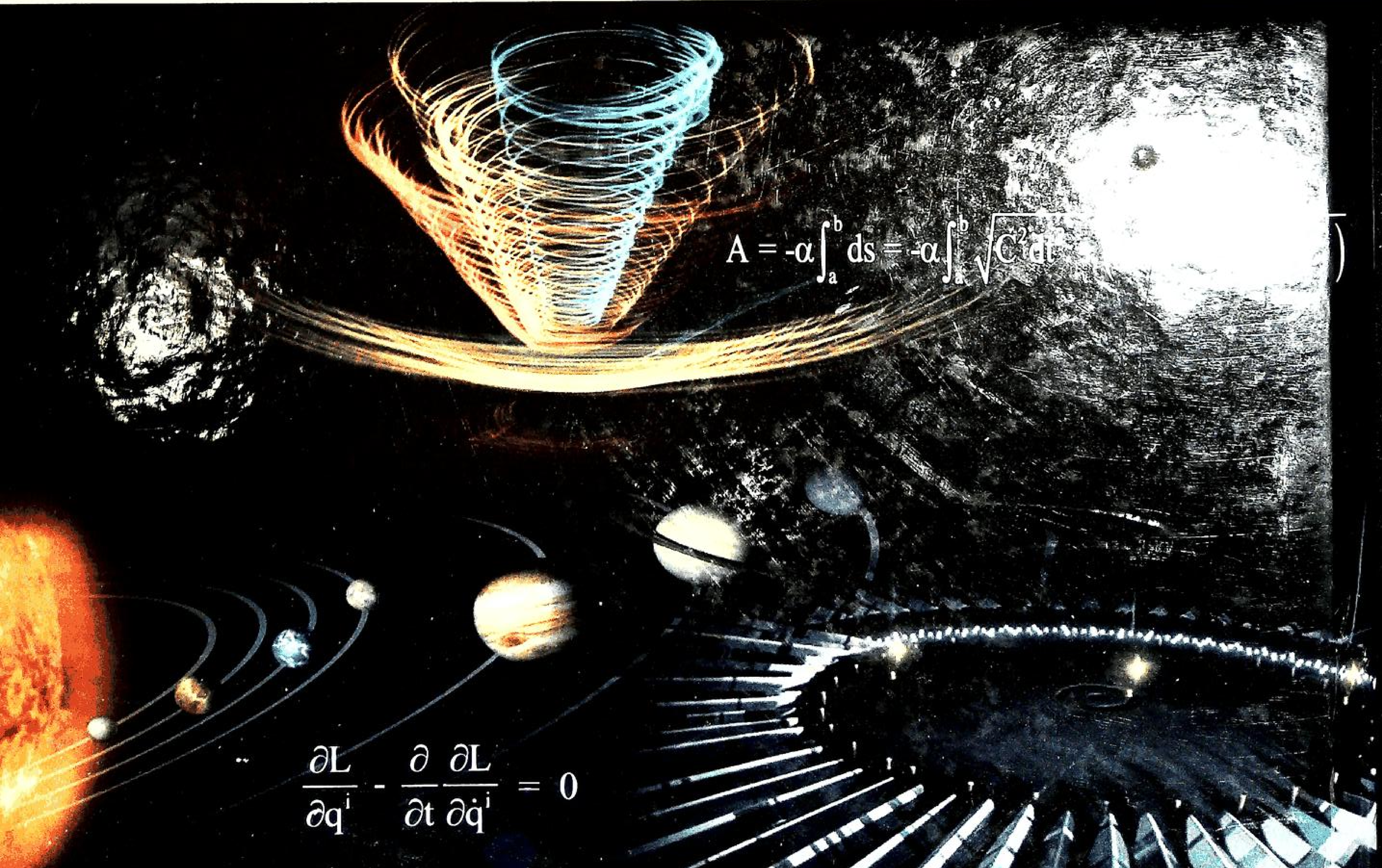
محمد البغدادي

أسس الفيزياء المعاصرة



محمد البغـدادي

أسس الفيزياء المعاصرة

المجلد الأول

الـميكانيك التقليدي والنسبـوي

أسس الفيزياء المعاصرة

المجلد الأول: الميكانيك التقليدي والنسبوي

المؤلف: محمد البغدادي
الطبعة: الأولى 2015
الناشر: طوب بريس للطباعة والنشر والتوزيع
رقم الإيداع القانوني: 2016MO0159
ردمك: 978-9954-594-49-0
الطبع: طوب بريس - الرباط

أسس الفيزياء المعاصرة

المجلد الأول: الميكانيك التقليدي والنسبوي

المؤلف: محمد البغدادي
الطبعة: الأولى 2015
الناشر: طوب بريس للطباعة والنشر والتوزيع
رقم الإيداع القانوني: 2016MO0159
ردمك: 978-9954-594-49-0
الطبع: طوب بريس - الرباط

هذه لغتي، ومعجزتي عصا سحري
حدائق بابلي ومسلتي، وهويتي الأولى
معدني الصقيل

محمود درويش

"لم يبد علماؤنا رغبة قوية لحماية اللغة الألمانية، بعضهم لأنهم يظنون فعلاً أنه لا يمكن لباس الحكمة إلا بلباس لاتيني أو يوناني، والبعض الآخر لأنهم يخشون أن يكتشف العالم جهلهم الذي يخبئونه الآن خلف قناع من الكلمات الكبيرة... لقد تركت الأمة بعيدة عن المعرفة".

لايبنيز (1646–1716)
مؤسس حساب التفاضل

مقدمة الكتاب

يعترض تعليم العلوم باللغة العربية مشاكل عديدة، لعل أهمها افتقار اللغة العربية إلى مراجع يستطيع الطالب استشارتها عندما يجد صعوبة ما في فهم ما بين يديه من أمال أو كتب تغطي أحد المقررات أو عندما يريد تجاوز هذه الأمالي والكتب والحصول على بعض الأجوبة للأسئلة العديدة التي يطرحها على نفسه والتي لا يمكن إلا للمرجع أن يضعها بين يديه أو عندما يرغب في التوسع في المعرفة. والمشكلة الهامة الثانية هي عدم وجود مقابل واحد متفق عليه للمصطلح العلمي الأجنبي بين مختلف البلدان العربية أو بين الجامعيين في قطر واحد أو المنتمين إلى أقسام علمية متقاربة كالفيزياء والرياضيات بل وبين العاملين في القسم الواحد.

ونحن نود في هذا الكتاب إعطاء صورة واضحة عميقة وشاملة للأسس التي تقوم عليها الفيزياء وتغطية المواضيع التي نعتقد أن على الفيزيائي استيعابها في المراحل الجامعية الأولى – لنقل سنوات الدراسة الأربعة أو الخمسة الأولى– سواء توقف عن الدراسة بعدها أو تابعها. فقد حاولنا للوصول إلى هذه الغاية أخذ أمرين بعين الاعتبار، أولهما ضرورة الانطلاق من المفاهيم والمبادئ كما يعيها الفيزيائيون المعاصرون ومن الأهداف التي يضعها مختلف الباحثين نصب أعينهم، لما يوفر ذلك من وضوح في الرؤية واختصار للوقت ومن فعالية لا يمكن للعرض التاريخي أن يوفرها بأي حال من الأحوال. وثانيهما ملاءمة هذه الضرورة مع المقتضيات التربوية في التسلسل من الأسهل إلى الأصعب وبالتالي مراعاة تسلسل البرامج المتبع في أغلب الجامعات إلى أبعد حد ممكن.

وهكذا فإن الفرضية الذرية مثلاً هي من أهم المفاهيم الأساسية في فيزياء اليوم : إن بنية المادة هي بنية غير متصلة ولا نتصور هذه المادة إلا على شكل حبيبات سواء كانت هذه الحبيبات ذرات أو جزيئات أو نويات؛ أو جسيمات تتكون منها هذه الأنواع الثلاثة نسميها جسيمات أولية. ولهذا فقد انطلقنا من هذا المفهوم لشرح مختلف الظواهر الفيزيائية بما فيها الظواهر الجهرية. ثم إن مفهوم المادة، كيانها، مرتبط بمفهوم المكان والزمان. ولهذا فقد تعرضنا بالتفصيل وبالترتيب إلى مفهوم الفضاء –المكان– الخاوي بمعزل عن مفهوم المادة وعن مفهوم الزمان وبنينا الميكانيك النيوتوني التقليدي وانتقلنا بعد ذلك إلى مفهوم للمكان متحد مع مفهوم الزمان وبنينا نظرية النسبية الخاصة التي ارتبط اسمها باسم آنشتاين وأخيراً إلى هذه المفاهيم مرتبطة ببعضها كلها معاً لإعطاء فكرة عن نظرية النسبية العامة التي وضعها آنشتاين.

وقد بيّنا في دراسة مختلف فروع الفيزياء أهمية المبادئ التي يبتكرها الفكر الفيزيائي الخلاق لفهم وتفسير الظواهر الطبيعية والتنبؤ بحدوث ظواهر فيزيائية جديدة وتوحيد ظواهر، متباينة للوهلة الأولى، كالكهربائية والمغنطيسية والضوء مثلاً في نظرية واحدة تعبر عنها أربع معادلات رياضية هي مبادئ الكهرطيسية التي وضعها ماكسويل في القرن التاسع عشر. وأوضحنا أن قبول المبادئ وبقاءها لا ينجم عن بساطتها أو جمال عبارتها الرياضية مهما كان لهاتين الصفتين من أثر وإنما لتطابق النتائج المترتبة عليها مع الواقع التجريبي.

فالفيزياء علم تجريبي قبل كل شيء والتجربة وحدها هي التي تقرر الحقيقة أي أن معرفة الواقع تبدأ بالتجربة وتنتهي بها. وهكذا ولما كانت المبادئ هي نتاج الفكر والخيال الإنساني، تستوحي التجربة أحياناً ولكنها لا تستخلص منها، فهي لا تتصف بالأزلية ولا تصلح في كل الأحوال. إن المغامرة الفيزيائية تسعى إلى الوصول إلى المبادئ الأكثر شمولية المفسرة لأكبر عدد ممكن من الحادثات والموحدة لمختلف فروع الفيزياء.

وقد آلينا جهداً إعطاء صورة متسعة، متكاملة منطقياً، للنظريات التي عالجناها وتجنبنا وسعنا العروض الوصفية العقيمة التي تعيق التعليم العالي والتي لا تليق به في نظرنا وحاولنا الإحاطة بدقة بمختلف جوانب المواضيع المطروقة. وقد سمح لنا تجنب التكرار الناتج عن الانتقال من العرض الوصفي إلى العرض الرياضي استنفاد الموضوع وتكريس حيز أكبر للغة الوحيدة التي يمكن أن تصف الطبيعة وتصقُلها ونعني بذلك الرياضيات.

إننا على وعي تام بما يترتب على عرض الفيزياء على هذا الشكل : مبادئ مصاغة بقالب رياضي يزداد تعقيداً ويبتعد عن الحدس مع تطور الفيزياء وتعمقها في بنية المادة وبنية المكان والزمان، وقوانين –نظريات ودعاوى وقضايا رياضية – تنتج عنها منطقياً مما يحول الفيزياء إلى رياضيات من حيث كونها تقوم على دراسة بنى معينة – معرفة بإعطاء علاقات تركيب بين عناصر مجموعة ما – فهي فيزياء البنى بقدر كون الرياضيات المعاصرة رياضيات البنى. ولكن لم لا؟ ألا تهدف الفيزياء فيما تهدف إليه إلى الوحدة مع الهندسة وما هي الهندسة؟ يقول آنشتاين "تبقى الهندسة علماً رياضياً مادام استنتاج النظريات من المصادرة (الموضوعة) مسألة منطقية صرفة ولكنها في الوقت نفسه علم فيزيائي بقدر ما تحوى مصادراتها على مقولات تخص الأشياء الطبيعية ولا يمكن التحقق منها إلا بالتجربة. وهكذا فإن المحاذير المترتبة على العرض الموضوعاتي (المصادراتي) Axiomatic للفيزياء تزول إذا منحت الأشغال المخبرية والتطبيقية أهمية خاصة، إضافة إلى دورها المألوف في تعلم العلوم الطبيعية والتعامل معها. فالتجربة وحدها هي التي ترفع عن الفيزياء الموضوعاتية كل طابع مسلماتي ودوغماتي. كما أن الإشارة إلى تطور الأفكار في الفيزياء من آن إلى آخر وإعطاء الخطوط العريضة للطريق المتعرج والمتقلب الذي اتبعته تسهم – بغض النظر عن أهميتها التاريخية – في إلقاء الأضواء على المحتوى الحديث للمبادئ وفي تجنب الأخطار الناجمة عن الطريقة التي اتبعناها.

لقد قسمنا هذا الكتاب إلى مجلدات خمسة :

- I– الميكانيك التقليدي النيوتوني والنسبوي
- II– الميكانيك الإحصائي والترموديناميك
- III– الكهرطيسية والضوء
- IV– ميكانيك الكم
- V– الفيزياء الإحصائية

ويتضمن محتوى هذه المجلدات المواد كما درسناها خلال سنوات عديدة تتجاوز العقدين في جامعتي الرباط ودمشق وغيرهما في المرحلتين الجامعيتين الأوليين وقسماً طفيفاً مما درسناه في المرحلة بعد

فالفيزياء علم تجريبي قبل كل شيء والتجربة وحدها هي التي تقرر الحقيقة أي أن معرفة الواقع تبدأ بالتجربة وتنتهي بها. وهكذا ولما كانت المبادئ هي نتاج الفكر والخيال الإنساني، تستوحي التجربة أحياناً ولكنها لا تستخلص منها، فهي لا تتصف بالأزلية ولا تصلح في كل الأحوال. إن المغامرة الفيزيائية تسعى إلى الوصول إلى المبادئ الأكثر شمولية المفسرة لأكبر عدد ممكن من الحادثات والموحدة لمختلف فروع الفيزياء.

وقد آلينا جهداً إعطاء صورة متسعة، متكاملة منطقياً، للنظريات التي عالجناها وتجنبنا وسعنا العروض الوصفية العقيمة التي تعيق التعليم العالي والتي لا تليق به في نظرنا وحاولنا الإحاطة بدقة بمختلف جوانب المواضيع المطروقة. وقد سمح لنا تجنب التكرار الناتج عن الانتقال من العرض الوصفي إلى العرض الرياضي استنفاد الموضوع وتكريس حيز أكبر للغة الوحيدة التي يمكن أن تصف الطبيعة وتصقُلها ونعني بذلك الرياضيات.

إننا على وعي تام بما يترتب على عرض الفيزياء على هذا الشكل : مبادئ مصاغة بقالب رياضي يزداد تعقيداً ويبتعد عن الحدس مع تطور الفيزياء وتعمقها في بنية المادة وبنية المكان والزمان، وقوانين -نظريات ودعاوى وقضايا رياضية – تنتج عنها منطقياً مما يحول الفيزياء إلى رياضيات من حيث كونها تقوم على دراسة بنى معينة – معرفة بإعطاء علاقات تركيب بين عناصر مجموعة ما – فهي فيزياء البنى بقدر كون الرياضيات المعاصرة رياضيات البنى. ولكن لم لا؟ ألا تهدف الفيزياء فيما تهدف إليه إلى الوحدة مع الهندسة وما هي الهندسة؟ يقول آنشتاين "تبقى الهندسة علماً رياضياً مادام استنتاج النظريات من المصادرة (الموضوعة) مسألة منطقية صرفة ولكنها في الوقت نفسه علم فيزيائي بقدر ما تحوي مصادراتها على مقولات تخص الأشياء الطبيعية ولا يمكن التحقق منها إلا بالتجربة. وهكذا فإن المحاذير المترتبة على العرض الموضوعاتي (المصادراتي) Axiomatic للفيزياء تزول إذا منحت الأشغال المخبرية والتطبيقية أهمية خاصة، إضافة إلى دورها المألوف في تعلم العلوم الطبيعية والتعامل معها. فالتجربة وحدها هي التي ترفع عن الفيزياء الموضوعاتية كل طابع مسلماتي ودوغماتي. كما أن الإشارة إلى تطور الأفكار في الفيزياء من آن إلى آخر وإعطاء الخطوط العريضة للطريق المتعرج والمتقلب الذي اتبعته تسهم – بغض النظر عن أهميتها التاريخية – في إلقاء الأضواء على المحتوى الحديث للمبادئ وفي تجنب الأخطار الناجمة عن الطريقة التي اتبعناها.

لقد قسمنا هذا الكتاب إلى مجلدات خمسة :

I- الميكانيك التقليدي النيوتوني والنسبوي

II- الميكانيك الإحصائي والترموديناميك

III- الكهرطيسية والضوء

IV- ميكانيك الكم

V- الفيزياء الإحصائية

ويتضمن محتوى هذه المجلدات المواد كما درسناها خلال سنوات عديدة تتجاوز العقدين في جامعتي الرباط ودمشق وغيرهما في المرحلتين الجامعيتين الأوليين وقسماً طفيفاً مما درسناه في المرحلة بعد

فالفيزياء علم تجريبي قبل كل شيء والتجربة وحدها هي التي تقرر الحقيقة أي أن معرفة الواقع تبدأ بالتجربة وتنتهي بها. وهكذا ولما كانت المبادئ هي نتاج الفكر والخيال الإنساني، تستوحي التجربة أحياناً ولكنها لا تستخلص منها، فهي لا تتصف بالأزلية ولا تصلح في كل الأحوال. إن المغامرة الفيزيائية تسعى إلى الوصول إلى المبادئ الأكثر شمولية المفسرة لأكبر عدد ممكن من الحادثات والموحدة لمختلف فروع الفيزياء.

وقد آلينا جهداً إعطاء صورة متسعة، متكاملة منطقياً، للنظريات التي عالجناها وتجنبنا وسعنا العروض الوصفية العقيمة التي تعيق التعليم العالي والتي لا تليق به في نظرنا وحاولنا الإحاطة بدقة بمختلف جوانب المواضيع المطروقة. وقد سمح لنا تجنب التكرار الناتج عن الانتقال من العرض الوصفي إلى العرض الرياضي استنفاد الموضوع وتكريس حيز أكبر للغة الوحيدة التي يمكن أن تصف الطبيعة وتصقُلها ونعني بذلك الرياضيات.

إننا على وعي تام بما يترتب على عرض الفيزياء على هذا الشكل : مبادئ مصاغة بقالب رياضي يزداد تعقيداً ويبتعد عن الحدس مع تطور الفيزياء وتعمقها في بنية المادة وبنية المكان والزمان، وقوانين –نظريات ودعاوى وقضايا رياضية – تنتج عنها منطقياً مما يحول الفيزياء إلى رياضيات من حيث كونها تقوم على دراسة بنى معينة – معرفة بإعطاء علاقات تركيب بين عناصر مجموعة ما – فهي فيزياء البنى بقدر كون الرياضيات المعاصرة رياضيات البنى. ولكن لم لا؟ ألا تهدف الفيزياء فيما تهدف إليه إلى الوحدة مع الهندسة وما هي الهندسة؟ يقول آنشتاين "تبقى الهندسة علماً رياضياً مادام استنتاج النظريات من المصادرة (الموضوعة) مسألة منطقية صرفة ولكنها في الوقت نفسه علم فيزيائي بقدر ما تحوى مصادراتها على مقولات تخص الأشياء الطبيعية ولا يمكن التحقق منها إلا بالتجربة. وهكذا فإن المحاذير المترتبة على العرض الموضوعاتي (المصادراتي) Axiomatic للفيزياء تزول إذا منحت الأشغال المخبرية والتطبيقية أهمية خاصة، إضافة إلى دورها المألوف في تعلم العلوم الطبيعية والتعامل معها. فالتجربة وحدها هي التي ترفع عن الفيزياء الموضوعاتية كل طابع مسلماتي ودوغماتي. كما أن الإشارة إلى تطور الأفكار في الفيزياء من آن إلى آخر وإعطاء الخطوط العريضة للطريق المتعرج والمتقلب الذي اتبعته تسهم – بغض النظر عن أهميتها التاريخية – في إلقاء الأضواء على المحتوى الحديث للمبادئ وفي تجنب الأخطار الناجمة عن الطريقة التي اتبعناها.

لقد قسمنا هذا الكتاب إلى مجلدات خمسة :

- I– الميكانيك التقليدي النيوتوني والنسبوي
- II– الميكانيك الإحصائي والترموديناميك
- III– الكهرطيسية والضوء
- IV– ميكانيك الكم
- V– الفيزياء الإحصائية

ويتضمن محتوى هذه المجلدات المواد كما درسناها خلال سنوات عديدة تتجاوز العقدين في جامعتي الرباط ودمشق وغيرهما في المرحلتين الجامعيتين الأوليين وقسماً طفيفاً مما درسناه في المرحلة بعد

الجامعية. ونحن وإن لم نعتمد مصدراً معيناً فإننا لا ندعي الإبداع أو التجديد اللهم إلا فيما يتعلق بالأخذ بيد القارئ المبتدئ والوصول به إلى عمق المفاهيم والقوانين الفيزيائية المعروفة في مختلف الفروع من وجهة نظر تؤمن بوحدة الفيزياء وبوحدة طريقة دراستها.

ولقد طمحنا إلى إصدار هذا الكتاب إن أمكن بلغتين : العربية والفرنسية أو العربية والإنكليزية حتى يعتاد القارئ العربي ذو الثقافة المزدوجة التعامل العلمي مع لغته العربية ولغة التدريس الأجنبية في بلده في آن واحد. وأخيراً فإن المراجع التي عدنا إليها غالباً هي :

1– سلسلة الفيزياء النظرية للانداو وليفشيتز بأجزائها التسعة المترجمة عن الروسية إلى الفرنسية والإنكليزية والألمانية.

2– دروس الفيزياء النظرية لسومرفلد بأجزائها الستة وهي مترجمة عن الألمانية إلى الإنكليزية ويتجاوز محتوى هاتين السلسلتين محتوى كتابنا بكثير.

3– محاضرات فاينمان في الفيزياء بثلاثة أجزاء وهي مترجمة عن الإنكليزية إلى الفرنسية والعربية.

4– دروس الفيزياء لجامعة بيركلي بخمسة أجزاء وهي أيضاً مترجمة إلى الفرنسية.

يغطي المرجعان الأخيران برامج السنتين الأولى والثانية في جامعات الولايات المتحدة ولكنهما يبقيان، وخاصة الأول منهما – محاضرات فاينمان – أفضل ما يمكن أن ينصح الفيزيائي مدرساً وطالباً بقراءته.

لقد قسمنا كل مجلد إلى فصول يتألف كل منها من فقرات مرقمة بعدد بدءاً من الواحد ومن أرقام – تحت فقرات – مرقمة بعددين أولهما يدل على الفقرة وثانيهما إلى تحت الفقرة أما العلاقات فيشار إليها، في الفصل، برقمين أولهما (من اليسار) رقم الفقرة وثانيهما رقم العلاقة في الفقرة المذكورة وبثلاثة أرقام عندما لا تقع العلاقة في الفصل المذكور وهكذا فإن (4.2.5) تعني العلاقة رقم 5 في الفقرة الثانية من الفصل الرابع. ونشير إلى العلاقة بأربعة أرقام أولها روماني I، II، III، IV، V، عندما لا تقع العلاقة في المجلد المذكور.

****

أود أولا وقبل كل شيء أن أوجه شكري وامتناني للسيد عبد الإله بن كيران فلولا مبادرته لما تم نشر هذا الكتاب بالمغرب.

كما أود أن أعبر عن شكري للسيدة بشرى حسني – وكانت قد عملت معي في مختبر الفيزياء النظرية – للمجهود الذي بذلته لفك رموز كتابتي في هذا الكتاب وفي مؤلفات أخرى، ولعلو باعها في التنقل بين اللغة العربية واللغات الأوربية التي كتبت بها؛ لا أعرف غيرها قادرا على القيام بهذا العمل بنفس الهدوء والصبر الذي تتمتع بهما.

وأود أخيرا التعبير عن خالص الشكر لمؤسسة طوب بريس لقبولها نشر هذا الكتاب ولعنايتها بإخراجه على الشكل الذي هو عليه.

مقدمة

إن موضوع الميكانيك التقليدي هو دراسة حركة جسم ما تحت تأثير قوى معينة عليه واختيار أفضل الوسائل لرصد هذه الحركة – اختيار نظم المحاور الملائمة. إن هذه القوى تعني وجود أجسام أخرى أنتجتها، ولذا فإن موضوع الفيزياء هو في واقع الأمر دراسة تفاعل الأجسام فيما بينها وموضوع الميكانيك هو دراسة حركتها بالنسبة لبعضها بعضاً نتيجة هذا التفاعل. تتفاعل الأجسام الكبيرة على شكلين أساسيين : تفاعل ناتج عن كتل الأجسام نسميه تفاعل التثاقل – قوى الجاذبية الكونية – وتفاعل ناتج عن الشحنات الكهربائية للأجسام نسميه التفاعل الكهرطيسي. سنكرس المجلد الثالث لدراسة الكهرطيسية وندرس في هذا المجلد حركة الأجسام تحت تأثير قوى الجاذبية، كحركة الكواكب حول الشمس مثلاً وتحت تأثير قوى أخرى كقوى المرونة التعليق واللي والاحتكاك وأنواع قوى المقاومة الأخرى دون النظر إلى منشئها الكهربائي (الراكد) على مستوى الجزيئات. كما سنبين كيف تتغير مبادئ الميكانيك النيوتوني عندما ترتفع سرعة الأجسام ارتفاعاً كبيراً كما هو عليه الحال مثلاً في حركة الإلكترون في حقل مغنطيسي شديد وكيف ننتقل من الميكانيك النيوتوني إلى الميكانيك النسبوي.

هذا وتتأثر الذرات والجزيئات بالحقل الكهرطيسي وتتفاعل معه – وخاصة التفاعل الكهربائي الراكد بين إلكترونات الذرة ونواتها – وتفاعل العزوم المغنطيسية لمكونات الذرة في ما بينها أو تفاعلها مع حقل مغنطيسي خارجي – وإطار دراسة هذه التفاعلات هو ميكانيك آخر غير الميكانيك التقليدي يسمى ميكانيك الكم سيدرس بالتفصيل في المجلد الرابع. أما الجسيمات الأولية فتتفاعل فيما بينها، إضافة إلى التفاعل الكهرطيسي (وتفاعل التثاقل المهمل) على شكلين أساسيين آخرين. فهناك التفاعل بين الجسيمات العنصرية المكونة للنواة، البروتونات والنوترونات، – وهي القوى النووية القوية – والتفاعل الناتج عندما تصدر النواة نشاطاً إشعاعياً، عندما يتفكك النوترون إلى بروتون وإلكترون ونوترينو، – وهي القوى النووية الضعيفة. يدرس هذان التفاعلان في إطار نظرية جديدة تجمع بين ميكانيك الكم ونظرية النسبية ; هي نظرية الحقول المكممة التي تخرج عن إطار مراحل الدراسة الجامعية الأولى.

لقد أعرنا اهتماماً خاصاً في هذا المجلد لخواص التناظر المكانية والزمانية، تجانس الزمان وتجانس الفضاء وتناحيه، وما ينتج عنها من قوانين انحفاظ – عدم تغير المقادير الفيزيائية مع الزمن، أي ثبوتها–، هي بالترتيب انحفاظ الطاقة والاندفاع الخطي والعزم الزاوي. يعبر رياضياً عن هذه الخواص بزمر هي زمر الانسحاب والدوران في الميكانيك التقليدي (والكمومي) وزمرة لورانتس في الميكانيك النسبوي. لا يختلف عرضنا فيما عدا ذلك عن ما تعنى به أغلب كتب الميكانيك؛ نذكر منها على الخصوص، بالإضافة إلى المراجع التي ذكرناها في مقدمة الكتاب، كتاب غولدشتاين الشهير Robert Goldstein Classical Mechanics. فقد درسنا على سبيل المثال بالتفصيل حقل التثاقل في الفصل الرابع وتوجنا هذه الدراسة

بدراسة الحركة النسبية في الفصل الخامس وتطبيقها على حركة الأرض الدورانية المعبر عنها بنواس فوكو.

عممنا الميكانيك النيوتوني في الفصل السادس باستخلاصه من مبدأ الفعل الأصغر، وهو مبدأ يصلح لكل النظريات الفيزيائية، هذا من جهة، وبتطبيقه على حالة عدد كبير من درجات الحرية – بما في ذلك حالة عدد لامنته من هذه الدرجات، حالة الحقل –، من جهة أخرى. كتبنا كذلك المعادلات القانونية واستنتجنا خواص لامات بواسون ذات الأهمية الكبرى في الميكانيك التقليدي. تعظم هذه الأهمية في دراسة ميكانيك الكم كما سنرى حيث يتلاشى مفهوم القوة ويلعب الهاميلتوني الدور الرئيسي وتتيح لامات بواسون الانتقال الصوري من الميكانيك التقليدي إلى ميكانيك المصفوفات الذي وضعه هايزنبرغ وبورن.

يأتي الموضع الطبيعي والتاريخي لنظرية النسبية الخاصة بعد الكهرطيسية، فهي وليدة المشاكل التي طرحتها معادلات ماكسويل. ولكنها ناتجة كذلك عن فشل تجربة مايكلسون–مورلي الضوئية (الكهرطيسية) في الكشف عن حركة نظمات المحاور الغاليلية بالنسبة لبعضها بعضاً في إطار الفضاء الإقليدي، أي في إطار الميكانيك النيوتوني الذي يجعل من الزمن وسيطاً هو ذاته أياً كانت نظمة المحاور الغاليلية، مستقلاً عن الفضاء الإقليدي. فهي من وجهة النظر هذه امتداد وإصلاح للميكانيك النيوتوني يوحد الزمان والمكان في فضاء ذي أربعة أبعاد شبه إقليدي، يعمم زمرة الدورانات إلى زمرة لورانتس وزمرتي الانسحابات (الزمانية والمكانية) والدورانات معاً إلى زمرة بوانكاريه.

خصصنا الفصل السابع لدراسة النسبية الخاصة على أن نعود إلى بعض تفاصيلها في المجلد الثالث.

فهرس

مقدمة الكتاب III

مقدمة VII

الفصل الأول: المادة والمكان والزمان 1

1. القياس والخطأ 1

1.1- تعريفات 1

2.1- نِظَمُ الوحدات والمعادلات البعدية 2

3.1 الخطأ 5

2. المادة 6

1.2- النظرية الذرية في الكيمياء 6

2.2- الإلكترون والبروتون والفوتون 8

3.2- النوترون والتفاعلات النووية القوية 10

4.2- الليبتونات والتفاعلات النووية الضعيفة 12

5.2- الجسيمات الأولية وقوى التفاعل 13

6.2- الكواركات والجسيمات الجديدة 14

3. المكان والزمان 16

1.3- المكان والهندسة الإقليدية 16

2.3- الهندسة غير الإقليدية 19

3.3- خواص الفضاء الإقليدي 23

4.3- قياس الأطوال 26

5.3- قياس الزمن 27

6.3- أصل الكون 30

الفصل الثاني: المتجهات والحركة 33

1. الفضاء المتجهي التآلفي 33

1.1- الفضاء المتجهي: 33

2.1- الفضاء التآلفي: 37

3.1- مركز الكتلة: 42

فهرس

مقدمة الكتاب III

مقدمة VII

الفصل الأول: المادة والمكان والزمان 1

1. القياس والخطأ 1

1.1– تعريفات 1

2.1– نظمُ الوحدات والمعادلات البعدية 2

3.1 الخطأ 5

2. المادة 6

1.2– النظرية الذرية في الكيمياء 6

2.2– الإلكترون والبروتون والفوتون 8

3.2– النوترون والتفاعلات النووية القوية 10

4.2– الليبتونات والتفاعلات النووية الضعيفة 12

5.2– الجسيمات الأولية وقوى التفاعل 13

6.2– الكواركات والجسيمات الجديدة 14

3. المكان والزمان 16

1.3– المكان والهندسة الإقليدية 16

2.3– الهندسة غير الإقليدية 19

3.3– خواص الفضاء الإقليدي 23

4.3– قياس الأطوال 26

5.3– قياس الزمن 27

6.3– أصل الكون 30

الفصل الثاني: المتجهات والحركة 33

1. الفضاء المتجهي التآلفي 33

1.1– الفضاء المتجهي : 33

2.1– الفضاء التآلفي : 37

3.1– مركز الكتلة : 42

2. العمليات على المتجهات 45
1.2- الجداء السلمي لمتجهتين : 45
2.2- خواص الجداء السلمي : 47
3.2- الجداء المتجه : 50
4.2- خواص الجداء المتجه : 55
3. المتجهات المشتقة والحركة 61
1.3- مشتق المتجهات بالنسبة لعدد سلمي : 61
2.3- الحركة المستقيمية : 63
3.3- الحركة الدائرية : 65
4.3- المستوي اللاصق : 66
5.3- الإحداثيات القطبية : 69
6.3- الحركة الدورانية : 70
7.3- الحركة على سطح كروي : 72
الفصل الثالث: أسس الميكانيك النيوتوني 75
1. القوى 75
1.1- مفهوم القوة : 75
2.1- القوى عن بعد : 76
3.1- مفهوم الحقل : 77
4.1- قوى التماس : 80
5.1- الأجسام المثالية : 82
6.1- عزم القوة : 83
2. أسس الميكانيك النيوتوني 87
1.2- موضوعات نيوتن : 87
2.2- المكان ونظم المقارنة الغاليلية : 91
3.2- تحويلات غاليلية : 93
3. تطبيقات ابتدائية 96
1.3- الثقل والسقوط الحر : 96
2.3- الحركة على شكل قطع مكافئ : 100
3.3- الحركة في حقل كهربائي ثابت : 102
4.3- الحركة في حقل مغنطيسي ثابت : 104
5.3- الحركة في حقل كهربائي متناوب : 109

6.3– الحركة تحت تأثير قوى التماس : 111

الفصل الرابـع: العمل والطاقة وقوانين الانحفاظ 115

1. العمل والطاقة 115

1.1– العمل والطاقة الحركية: 115
2.1– الطاقة الكامنة : 117
3.1– الطاقة الكلية وانحفاظها : 119
4.1– القوى المحافظة – المشتقة من كمون : 121
5.1– مبدأ انحفاظ الطاقة : 125

2. الحركات الدورية 128

1.2– الهزاز التوافقي : 128
2.2– النواس البسيط : 131
3.2– الاهتزاز المتخامد : 136
4.2– الاهتزاز القسري المتخامد : 138
5.2– الإرنان : Resonance 139
6.2– دراسة الاستطاعة : 143
7.2– المعادلات الخطية ومبدأ التوضيع : 147

3. انحفاظ الاندفاع (العزم) الخطي واصطدام الجسيمات 148

1.3– انحفاظ الاندفاع الخطي : 148
2.3– مقرن مركز الكتلة : 151
3.3– اصطدام الجسيمات : 153
4.3– حساب الانعطاف في الاصطدام المرن : 156
5.3– تفكك الجسيم إلى جسيمين : 161
6.3– انحفاظ الاندفاع الخطي في الصواريخ : 163

4. حقل التثاقل، القوة المركزية 164

1.4– قوانين كبلر Kepler وحقل الجاذبية : 164
2.4– الكمون الناتج عن كتلة كروية : 167
3.4– معادلات الحركة : 171
4.4– الكمون الفعال : 175
ملحق الفصل الرابع 183

6.3- الحركة تحت تأثير قوى التماس : 111

الفصل الرابع: العمل والطاقة وقوانين الانحفاظ 115

1. العمل والطاقة 115

1.1- العمل والطاقة الحركية: 115
2.1- الطاقة الكامنة : 117
3.1- الطاقة الكلية وانحفاظها : 119
4.1- القوى المحافظة – المشتقة من كمون : 121
5.1- مبدأ انحفاظ الطاقة : 125

2. الحركات الدورية 128

1.2- الهزاز التوافقي : 128
2.2- النواس البسيط : 131
3.2- الاهتزاز المتخامد : 136
4.2- الاهتزاز القسري المتخامد : 138
5.2- الإرنان : Resonance 139
6.2- دراسة الاستطاعة : 143
7.2- المعادلات الخطية ومبدأ التوضيع : 147

3. انحفاظ الاندفاع (العزم) الخطي واصطدام الجسيمات 148

1.3- انحفاظ الاندفاع الخطي : 148
2.3- مقرن مركز الكتلة : 151
3.3- اصطدام الجسيمات : 153
4.3- حساب الانعطاف في الاصطدام المرن : 156
5.3- تفكك الجسيم إلى جسيمين : 161
6.3- انحفاظ الاندفاع الخطي في الصواريخ : 163

4. حقل التثاقل، القوة المركزية 164

1.4- قوانين كبلر Kepler وحقل الجاذبية : 164
2.4- الكمون الناتج عن كتلة كروية : 167
3.4- معادلات الحركة : 171
4.4- الكمون الفعال : 175
ملحق الفصل الرابع 183

الفصل الخامس: ديناميك الجسم الصلب والحركة في جملة محاور غير غاليلية 189

1. الانسحابات والدورانات 189

1.1– حركة الجسم الصلب : 189

2.1– زمرة الدورانات : 190

3.1– محور الدوران الآني : 192

4.1– الزمرة التآلفية : 195

5.1– زوايا أولر : 196

2. طاقة الجسم الصلب الحركية 200

1.2– التركيب العام للسرعة : 200

2.2– عزم العطالة : 203

3.2– الطاقة الحركية – تانسور العطالة : 209

4.2– مجسم القطع الناقص العطالي : 213

3. عزم الجسم الصلب الزاوي ومعادلات الحركة 217

1.3– العزم الزاوي وانحفاظه : 217

2.3– معادلات الحركة – معادلات أولر : 220

3.3– الحركة الحرة للدوامة غير المتناظرة – حركة بوانسو : Poinsot 222

4.3– استقرار الدوران حول المحاور الرئيسية : 224

4. الحركة النسبية 227

1.4– تركيب التسارع – تسارع كوريوليس : 227

2.4– القوى الشبيهة : 230

3.4– تطبيق على حركة الأرض الدورانية : 232

4.4– السقوط الحر على سطح الأرض : 234

5.4– نواس فوكو : Foucault 237

ملحق الفصل الخامس 241

الفصل السادس: مبدأ الفعل الأصغر وهيكلة لاغرانج 251

1. مبادئ الميكانيك النيوتوني 251

1.1– مبدأ الفعل الأصغر : 251

3.1– حساب التغيرات : 253

3.1– معادلات أولر – لاغرانج وخواص : L 258

4.1– مبدأ النسبية الغاليلية : 259

5.1– الشكل العام لدالة لاغرانج : 261

2. قوانين الانحفاظ **265**

1.2– انحفاظ الطاقة : 266

2.2– انحفاظ الاندفاع الخطي : 267

3.2– انحفاظ العزم الزاوي : 269

3. المعادلات القانونية **275**

1.3– معادلات هاميلتون : Hamilton 275

2.3– لامات بواسون (Poisson) Brackets, Crochets : 277

3.3– التحويلات القانونية : 280

4.3– معادلة هاميلتون – جاكوبي 283

5.3– مبرهنة ليوفيل Liouville 286

4. حالة عدد غير منته من درجات الحرية **292**

1.4– دالة لاغرانج من أجل الحقول 292

2.4– الصياغة القانونية للحقول 294

3.4– لامات بواسون 296

4.4– تحويلات لوجاندر Legendre 298

5.4– الخاتمة : 300

الفصل السابع: النسبيـــة الخاصـــة **303**

1.مبدأ النسبية الخاصة **303**

1.1– الكهرطيسية : 303

2.1– تجربة مايكلسون–مورلي: Michelson-Morley (1887) 305

3.1– مبدأ النسبية الخاصة : 309

2.فضاء مينكوفسكي **310**

1.2– الحادثات Events والمجالات : 310

2.2– فضاء مينكوفسكي : 312

3.2– الزمن الذاتي : 314

4.2– تحويلات لورانتس: Lorentz 316

5.2– زمرة لورانتس وزمرة بوانكاريه: Poincaré 320

6.2– تركيب السرعات : 324

7.2– الزيغ الضوئي : 327

8.2– المتجهات بأربع مركبات – فضاءات مينكوفسكي : 329

5.1– الشكل العام لدالة لاغرانج : 261

2. قوانين الانحفاظ 265

1.2– انحفاظ الطاقة : 266

2.2– انحفاظ الاندفاع الخطي : 267

3.2– انحفاظ العزم الزاوي : 269

3. المعادلات القانونية 275

1.3– معادلات هاميلتون : Hamilton 275

2.3– لامات بواسون (Poisson) Brackets, Crochets : 277

3.3– التحويلات القانونية : 280

4.3– معادلة هاميلتون – جاكوبي 283

5.3– مبرهنة ليوفيل Liouville 286

4. حالة عدد غير منته من درجات الحرية 292

1.4– دالة لاغرانج من أجل الحقول 292

2.4– الصياغة القانونية للحقول 294

3.4– لامات بواسون 296

4.4– تحويلات لوجاندر Legendre 298

5.4– الخاتمة : 300

الفصل السابع: النسبيــة الخاصــة 303

1. مبدأ النسبية الخاصة 303

1.1– الكهرطيسية : 303

2.1– تجربة مايكلسون-مورلي: Michelson-Morley (1887) 305

3.1– مبدأ النسبية الخاصة : 309

2. فضاء مينكوفسكي 310

1.2– الحادثات Events والمجالات : 310

2.2– فضاء مينكوفسكي : 312

3.2– الزمن الذاتي : 314

4.2– تحويلات لورانتس: Lorentz 316

5.2– زمرة لورانتس وزمرة بوانكاريه: Poincaré 320

6.2– تركيب السرعات : 324

7.2– الزيغ الضوئي : 327

8.2– المتجهات بأربع مركبات – فضاءات مينكوفسكي : 329

3.الميكانيك النسبوي 331
1.3- الصياغة بأربعة أبعاد : 331
2.3- مبدأ الفعل الأصغر : 334
3.3- الطاقة والاندفاع : 336
4.3- مفعول دوبلر – الانزياح نحو الأحمر : 338
5.3- الميكانيك النسبوي : 341
6.3- تفكك الجسيمات العفوي : 342
4.الهيكلة رباعية الأبعاد للكهرطيسية 343
1.4- معادلة الموجة : 343
2.4- الكمون المتجه رباعي الأبعاد : 345
3.4- تحويلات الحقلين $\vec{E}$ و $\vec{B}$: 347
4.4- قوى لورانتس : 349
5.4- الصياغة التانسورية للحقل الكهرطيسي : 351
ملحق الفصل السابع 355
ثبت المصطلحات 361
أسماء العلم 371

الفصل الأول

المادة والمكان والزمان

1. القياس والخطأ 1
2. المادة 6
3. المكان والزمان 16

الفصل الأول: المادة والمكان والزمان

1. القياس والخطأ

1.1- تعريفات :

إن الفيزياء، كعلم تجريبي، تقوم على الملاحظة الدقيقة للحادثات وتصنيفها، بالنظر إلى طبيعة القوى المؤثرة وإلى مميزات أخرى تشترك فيها، في مختلف فروع الفيزياء. ثم تحليلها أي ربطها ببعضها والتفريق بين السبب والنتيجة والتعبير عن ذلك كله بشكل رياضي : تعبير رياضي للمقادير الفيزيائية وعلاقات رياضية – قوانين – تربط بين هذه المقادير الفيزيائية. والملاحظة الدقيقة والتجريب يعنيان إيجاد أجهزة تقيس المقادير مباشرة (الميقاتية لقياس الزمن مثلاً) أو عن طريق القوانين الرياضية التي تربط بين هذه المقادير أو تُعرفها (قياس كتلة الأرض مثلاً بطريقة كافنديش). وفي كل الأحوال فإن قياس مقدار فيزيائي A يعني مقارنة هذا المقدار بكمية معينة منه A_1 نسميها الوحدة ووضع نتيجة المقارنة على شكل نسبة عددية موجبة نسميها القياس العددي أو سعة قياس المقدار المقيس ونكتب هذه النسبة على الشكل

$$a_1 = \frac{A}{A_1} \quad (1.1)$$

وهكذا فإن القياس الفيزيائي هو إعطاء أعداد حقيقية، صحيحة، كسرية أو صماء (كنتيجة قياس قطر مربع طول ضلعه متر واحد). ينتج من تعريف القياس أنه يصح على المقادير الفيزيائية من نفس النوع ما يصح على الأعداد الحقيقية. وهكذا يمكننا تعريف تساوي مقادير فيزيائية من نفس النوع وجمعها وطرحها أو ضربها وحساب نسبتها مادمنا نعرف القواعد التي تسمح لنا بالقيام بهذه العمليات على الأعداد.

هناك ثلاثة أنواع فقط من المقادير في الميكانيك نسميها بالمقادير الأساسية، بمعنى أنه يمكن إيجاد تعابير رياضية، هندسية أو فيزيائية، تسمح لنا بالقيام باشتقاق كل المقادير الفيزيائية الأخرى منها. نسمي المقادير المعبر عنها بواسطة المقادير الأساسية مقادير مشتقة. هذا يعني أنه يمكن اختيار هذه المقادير الثلاثة لا على التعيين ولكن يختار عادة المقادير الأساسية فعلاً وهي الكتلة، المعبرة عن المادة، والطول، المعبر عن المكان، والزمان. ولكل من هذه المقادير الأساسية وحدة مناسبة سهلة التحضير في كل زمان ومكان وشائعة الاستعمال بقدر الإمكان، ونسمي الوحدات التي تقيس المقادير الأساسية وحدات أساسية. فإذا ما اخترنا مثلاً المتر كوحدة للطول فمن الممكن اشتقاق المتر المربع من هذه الوحدة كوحدة لقياس

السطوح وذلك حسب العلاقة الهندسية التي تعطي مساحة المستطيل مثلاً :

$$S = k \cdot a \cdot b \quad (1.2)$$

حيث a هو طول المستطيل بالأمتار و b عرضه بالأمتار و k عدد يعبر عن تناسب سطح المستطيل مع طوله وعرضه. فإذا اخترنا المتر المربع كوحدة لقياس السطوح فإن $k = 1$ ونكتب العلاقة (1.2) بشكل رمزي :

$$S = L \cdot L' = L^2 \quad (1.3)$$

ونعني بهذه العلاقة أن وحدة السطوح مشتقة من وحدة الأطوال وذلك بضرب وحدة الأطوال بنفسها. يمكن بنفس الطريقة اشتقاق المتر المكعب كوحدة لقياس الحجوم وهكذا.

وبصورة عامة نعبر عن المقادير المشتقة بوحدات نسميها الوحدات المشتقة نشتقها من الوحدات الأساسية حسب نفس العلاقة التي تعرف المقدار الفيزيائي المشتق بدليل المقادير الفيزيائية الأساسية وهكذا ولما كانت السرعة الوسطية مثلاً هي تعريفاً المسافة المقطوعة مقسومة على الزمن اللازم لقطعها فإننا نكتب وحدة السرعة على ال-ل

$$v = L \cdot T^{-1} \quad (1.4)$$

ونقول إن وحدة السرعة هي المتر في الثانية إذا اخترنا هاتين الوحدتين لقياس الأطوال والأزمان. وكذلك الأمر بالنسبة للتسارع الوسطي.

$$a = \frac{v}{T} = L \cdot T^{-2} \quad (1.5)$$

ونقول إن وحدة التسارع، في نفس الشروط التي اخترناها للسرعة، هي المتر في مربع الثانية وهكذا...

2.1– نظمُ الوحدات والمعادلات البعدية :

نسمي نِظمة كل مجموعة كاملة للوحدات الأساسية والمشتقة ونميز هذه النظم عن بعضها بالقيم التي نعطيها للوحدات الأساسية الثلاثة. فهناك مثلاً النظمة MKS المتبناة حالياً حيث وحدة الطول المتر (M) ووحدة الكتلة الكيلوغرام (K) ووحدة الزمن الثانية (S). راجت هذه النظمة لإن القيم التي تأخذها الوحدات المشتقة فيها عملية ومناسبة. وهناك أيضاً النظمة CGS حيث الوحدات بالترتيب هي السنتمتر (C) والغرام (G) والثانية (S)، وتسمى النظمة السغثية، وكانت شائعة جداً في المخابر العلمية التي لا ترى حرجاً في صغر قيم الوحدات المشتقة فيها.

لنلاحظ منذ الآن أن عدد الوحدات الأساسية والاختيار المناسب لهذه الوحدات قضيتان هامتان في الفيزياء، خلافاً لما يُظن للوهلة الأولى. فسنرى مثلاً عند دراسة النسبية أن الطول والزمن هما مقداران فيزيائيان من نوع واحد. كما سندخل في دراسة الكهرطيسية مقداراً فيزيائياً جديداً هو الشحنة الكهربائية.

ويمكن اعتبار الشحنة وحدة مشتقة انطلاقاً من العلاقات التي تربطها بالقوى ولكن هذا يعقد العلاقات الفيزيائية ولذا سنعتبرها مقداراً أساسياً وحدته في النظمة MKS هي الكولون (C) وسندرس الكهرطيسية في الجملة MKSC لأسباب عملية بحتة.

إن العلاقات الفيزيائية أو المعادلات التي تعبر عن القوانين الطبيعية تتيح لنا تحديد طبيعة مقدار من المقادير الموجودة في المعادلة إذا عرفنا طبيعة كل المقادير الأخرى. نسمي هذه العملية تحليل الأبعاد وهذا ما يهمنا هنا. ولكنها تتيح لنا أيضاً بإعطائها علاقة عددية بين مقاييس المقادير المختلفة المعبر عنها بوحدات مناسبة قياس مقدار ما إذا عرفنا مقاييس كل المقادير الأخرى. فهي التي تتيح لنا إذاً القياس أي التجربة.

لنأخذ مثلاً العلاقة : $E=\frac{1}{2}MV^2$ التي تعطينا الطاقة الحركية لجسم ما كجداء لنصف الكتلة بمربع السرعة ولنحلل أبعاد الطاقة. سنكتب $[A]$ للإشارة إلى أبعاد A. لدينا هنا

$$[E] = [M]\left[\frac{L}{T}\right]^2 = [M]\,[L]^2\,[T]^{-2} \qquad (1.6)$$

أبعاد الطاقة هي إذاً كيلوغرام مضروباً بمتر مربع ومقسوماً على مربع ثانية، نسمي هذه الوحدة الجول.

لنعرف الضغط على أنه القوة المطبقة على واحدة السطوح فأبعاده هي إذاً

$$[P]=[F][L]^{-2}$$

ولما كانت القوة مشتق الطاقة بالنسبة للانتقال (الطول)، كما سنرى، فأبعادها هي $[F]=[M][L][T]^{-2}$ وأبعاد $[P]$ هي

$$[P]=[M][L]^{-1}[T]^{-2} \qquad (1.7)$$

وهكذا إذا كتبنا قانون ماريوط الذي يعطي جداء ضغط الغاز بحجمه V على الشكل

$$P\,V = k\,t$$

حيث t تشير إلى درجة الحرارة و k ثابتة تناسب فإن هذا القانون يعطينا أبعاد t في نظمة وحدات تكون فيها k مساوية للواحد :

$$[t] = [M]\,[L]^{-1}[T]^{-2}[L]^3 = M[L]^2[T]^{-2} \qquad (1.8)$$

ترينا مقارنة هذه العلاقة مع (1.6) أن أبعاد درجة الحرارة في نظمة الوحدات هذه $(k = 1)$ هي أبعاد طاقة. ونسمي العلاقات التي تعبر عن أبعاد مقدار فيزيائي بدليل الوحدات الأساسية كالعلاقات (1.6) – (1.8) معادلات أبعاد.

سنشير فيما يلي بالحروف ...A, B, C... X إلى مختلف المقادير الفيزيائية، الطول، الكتلة، القوة، الزمن، الضغط الخ... وبالحروف $A_1, A_2,..., A_n$ إلى الوحدات المستعملة لقياس المقدار الفيزيائي وليكن الطول A : المتر، السنتمتر، الذراع، الخ. في مختلف نظم الوحدات وأخيراً بالحروف ...A', A'', A''' إلى المقادير – الأطوال في مثلث – التي نقيسها ونكتب نتائج القياس كما فعلنا في (1.1) على الشكل

$$a_2' = \frac{A'}{A_2} \quad ; \quad a_1'' = \frac{A''}{A_1} \ldots \qquad (1.9)$$

ونعني بها بالترتيب نتيجة قياس الطول 'A في نظمة الوحدات (2) ونتيجة قياس الطول "A في نظمة الوحدات (1)...ومن الواضح أنه لا يمكننا مقارنة مقدارين من نوع واحد إلا إذا قسناهما بنفس الوحدات.

لدينا حسب (1.9)

$$a_1' = \frac{A'}{A_1} = \frac{A'}{A_2}\,\frac{A_2}{A_1} = a_2'\,\frac{A_2}{A_1} \qquad (1.10)$$

ومنه

<u>**قضية 1**</u> : إن نسبة قياسين a_1' و a_2' لمقدار معين 'A بوحدتين مختلفتين A_1 و A_2 تساوي عكس نسبة هاتين الوحدتين

$$\frac{a_1'}{a_2'} = \frac{A_2}{A_1} \qquad (1.10)'$$

أما نسبة مقدارين من نوع واحد 'A و "A مقيسين بنفس الوحدة A_1 مثلاً فتساوي نسبة العددين اللذين يقيسانهما. لدينا حسب (1.9)

$$a_1' = \frac{A'}{A_1} \quad و \quad a_1'' = \frac{A''}{A_1} \qquad ومنه$$

$$\frac{a_1'}{a_1''} = \frac{A'}{A''} \qquad (1.10)''$$

لنلاحظ لتعميم العلاقة '(1.10) أنه لما كانت المقادير الأساسية في الميكانيك هي الطول والكتلة والزمن فإن أي علاقة فيزيائية تعرف مقداراً ميكانيكياً X هي من الشكل

$$X = k\,L^{\alpha}\,T^{\beta}\,M^{\gamma} \qquad (1.11)$$

حيث k ثابتة – لا أبعاد فيزيائية لها – و α، β، γ، أعداد طبيعية وبالتالي فإن معادلة أبعاد X هي

$$[X] = [L]^{\alpha}[T]^{\beta}[M]^{\gamma} \qquad (1.11)'$$

<u>**قضية 2**</u> :

عندما ننتقل من نظمة الوحدات (1) إلى نظمة (2) فإن نسبة القياسين x_1 و x_2 للمقدار المشتق X المعرف بـ (1.11) تعطيها العلاقة

$$\frac{x_1}{x_2} = \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\beta}\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{\gamma} \qquad (1.12)$$

لأن نسبة الوحدتين المشتقتين هي حسب '(1.11)

$$\frac{X_2}{X_1} = \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^{\alpha} \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\beta} \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{\gamma}$$

ونحصل على العلاقة (1.12) بتطبيق '(1.10).

وهكذا فإن نسبة وحدة الطاقة في النظمة (2) CGS، واسمها الأرغة، إلى الجول في النظمة (1) MKS هي حسب العلاقة (1.6) : $\alpha = 2$، $\beta = -2$، $\gamma = 1$.

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{\text{أرغة}}{\text{جول}} = \left(\frac{1}{1000}\right)^{1} \left(\frac{1}{100}\right)^{2} \left(\frac{1}{1}\right)^{-2} = 10^{-7}$$

وبالتالي فإن العدد الذي يقيس الطاقة في النظمة (1) هو أصغر بـ 10^{+7} مرة من العدد الذي يقيسها في النظمة (2).

3.1 الخطأ :

يعود بناء جهاز قياس مقدار فيزيائي بصورة عامة إلى إيجاد علاقة ميكانيكية يدخل فيها هذا المقدار – القوة التي يتفاعل بحسبها تياران كهربائيان (قوة لابلاس) مثلاً – وإلى تركيب مجموعة ميكانيكية، مسننات ونوابض وأسلاك الخ، تنتهي بتحريك مؤشر على تدريجات الجهاز نتيجة هذا التفاعل، وأخيراً إلى معايرة الجهاز – أي كتابة تدريجاته بوحدات المقدار المقيس – شدة التيار في مثالنا – ولا يبقى على المجرب إلا رصد انطباق المؤشر على أحد خطوط التدريج وقراءة قيمة المقدار الفيزيائي. ولكن الحركة ليست مثالية، فالانتقال وتوتر النوابض ولي الأسلاك لا تحدث دون احتكاك، هذا في المجال المحسوس، أضف إلى ذلك الاحتكاك في المجال المجهري : اصطدام الالكترونات المكونة للتيار بأيونات السلك الذي يمر فيه وتسخينه وتغيير مقاومته. كما أن عملية الرصد ليست بسيطة، فللمؤشر عرض معين ولتدريجات الجهاز سمك أيضاً. وهكذا فإن نتيجة القياس لا تعبر عن العلاقة الميكانيكية تماماً من جهة ولا يمكن الوصول إلى قراءة انطباق لامتناهية في الدقة من جهة ثانية. فنتيجة القياس تقريبية ومهمة المجرب هي تقدير الخطأ بأن يعين الحد الأدنى لحساسية الجهاز وأن يقوم بإجراء عدد كبير من القياسات وأخذ متوسطها بعد أن يتخلى عن النتائج التي تبتعد كثيراً عن بقية القياسات على اعتبار أنها ناتجة عن خطأ استثنائي. أما مهمة التقانة فهي بناء أجهزة تقرب الحركة فيها ما أمكن من الحركة المثالية وتتخلص من بعض التفاعلات غير المرغوب فيها وتعطي تقييماً عددياً للتفاعلات غير المرغوب فيها التي لا يمكن التخلص منها. ولهذا فإن نتائج القياس لا تكون بإعطاء العدد x الذي يعين قيمة المقدار الفيزيائي وإنما بإعطاء العدد $x \pm \Delta x$ حيث Δx هو الحد الأعلى للخطأ الواقع ونسميه بالخطأ المطلق. أما المقدار $\frac{\Delta x}{x}$ فنسميه بالخطأ النسبي.

ينطبق ما سبق على مختلف فروع الفيزياء التقليدية، المحسوسة، كدراسة حركة جماعية لمليارات الإلكترونات، المكونة للتيار في مثالنا، أو في تعيين أبعاد بلورة أو خلية حية في المجهر. ولكن الأمر يختلف تماماً عندما لا نستطيع التخلص من التفاعلات غير المرغوب فيها أو لا نستطيع إعطاء أي تقييم عددي لها وهذا ما يحدث مثلاً عندما نرصد في المجهر إلكتروناً واحداً بدلاً عن بلورة كبيرة نسبياً مؤلفة من إيونات وإلكترونات. إن رصد الإلكترون يعني إضاءته ولكن النور الذي يضيء الإلكترون سيتفاعل معه : يصطدم جسيم النور – الفوتون – بالإلكترون بحيث يستحيل تعيين موضع الإلكترون وهكذا فإن مسألة القياس في الفيزياء المجهرية، الذرية والنووية وفيزياء الجسيمات الأولية، تختلف اختلافاً كلياً عن مسألة القياس في الفيزياء المحسوسة. ولهذا فلا يمكن معالجة الفيزياء المجهرية في إطار ومبادئ الميكانيك التقليدي، فلا بد من تعريف جديد للقياس واستخلاص ما يترتب عليه من نتائج وهذا ما سنفعله عندما نبني الإطار الذي تدرس فيه الفيزياء المجهرية أي عندما ندرس ميكانيك الكم في المجلد الرابع مكتفين هنا بهذه الإشارة.

2. المـادة

إن معرفة المادة ونعني بذلك إعطاءها مفهوماً واضحاً شاملاً ودقيقاً، ودراسة تركيبها وبالتالي تعيين مكوناتها الأساسية كما نعرفها، ومعرفة أشكال القوى التي تتفاعل بموجبها وإعادة تلك القوى إلى منشأ واحد، هو أحد أبرز أهداف البحث الفيزيائي. وهو أمر لا يمكن تحقيقه إلا تدريجياً وبالتلمس، وبنبذ مفاهيم قديمة أو تعديلها وابتكار مفاهيم جديدة تتفق مع الواقع التجريبي وتُعمقه. ولذلك فإن الطابع الوصفي لمحتوى هذه الفقرة لن يزول إلا شيئاً فشيئاً ولن تتضح لنا معاني وأصول المفاهيم الواردة فيها إلا بتقدمنا في الدراسة الجامعية وبعد الجامعية. أما مسألة المعرفة والفهم الكاملين والنهائيين فهي مسألة فلسفية أكثر منها علمية.

1.2– النظرية الذرية في الكيمياء :

تظهر المادة في المجال الجهري على شكل صلب أو سائل أو غازي (جليد، ماء، بخار). ولكن ما هي مكونات المادة الأساسية ؟ لقد افترض الصينيون والهنود القدماء على ما يبدو، ومن بعدهم الإغريق منذ القرن الخامس قبل الميلاد (لوسيبس Leucippus 440 ق.م وديمقريطس Democritus 420 ق.م) أن كل شيء مؤلف من كيانات لا يمكن تقسيمها ومن الخلاء، أو الفضاء الخاوي، الذي تتحرك فيه هذه الكيانات على الدوام. وقد أطلق على الواحد من هذه الكيانات اسم Atom وهو يعني عدم قابلية التجزئة. وقد أخذ الرومان بهذه الفرضية (وبشكل خاص الفيلسوف آبيكوروس Epicurus 300 ق.م) ومن بعدهم العرب

الذين ترجموا كلمة Atom إلى الجوهر الفرد. يقول ابن سينا : "فأما جاعلوها أجراماً غير متجزئة فيقولون إنها غير مختلفة إلا بالشكل وإن جوهرها جوهر واحد بالطبع، وإنها لا تنقسم لا لأنها لا تقبل القسمة الإضافية بل لا تقبل قسمة الانفصال لصلابتها التي هي عدم تخلخل الخلاء عندهم؛ إذ الانفصال بين الملاء والملاء هو عندهم بالخلاء". وقد تصورها نيوتن Newton (1687) على النحو التالي:

"... ومن المحتمل أن الإله في البداية قد كون المادة من جسيمات صلبة، كتلوية، قاسية، غير قابلة للاختراق ومتحركة. ولهذه الجسيمات أبعاد وهيئات وصفات مكانية أخرى تحقق على أحسن وجه ما هيئت له. وإنها صلبة إلى حد يجعل من غير الممكن البتة أن تهترئ أو تتكسر إلى قطع؛ فلا يمكن لأي قدرة عادية أن تقسم ما فعله الله في الخلق الأول...".

ولكنه لم يكن لهذه الفرضية أي محتوى تجريبي وهكذا فإن النظرية الذرية القائمة على أساس علمي لم تظهر إلا حينما استطاعت الكيمياء إثبات وجودها علمياً في أواخر القرن الثامن عشر وظهرت القوانين العامة في التفاعلات الكيمياوية كقانون حفظ الكتلة (قانون لافوازيه Lavoisier) وقانون التناسبات المحددة (يتحد غرام واحد من الهدروجين مع 8 غرامات من الأكسجين لتكوين 9 غرامات من الماء) وقانون التناسبات المضاعفة (تتحد سبعة غرامات من الآزوت مع مضاعفات أربعة غرامات من الأكسجين لتشكل مختلف مركبات الآزوت المؤكسد) وكان دالتون Dalton أول من حاول تفسير هذه القوانين عام 1808 بأن وضع الشرطين الأساسيين للنظرية الذرية.

"1- إن وحدات أي نوع من المادة هي وحدات واحدة لا تتغير

"2- إنها غير قابلة للتجزئة.

وقد أمكن عندئذ تفسير أغلب التفاعلات الكيمياوية الجهرية التي كانت معروفة ولكن بعض الصعوبات بقيت قائمة. إذ بين غي لوساك (Gay-Lussac) في نفس العام 1808 وجود قوانين بسيطة، تنطبق في الحالة الغازية، لا على الأوزان وحدها وإنما على الحجوم أيضاً حيث يتحد حجمان من الهدروجين مع حجم من الأكسجين لتشكيل حجمين من بخار الماء : $2H_2 + O_2 = 2H_2O$. إلى أن جاء أفوغادرو Avogadro في عام 1811 وفرق بين مفهوم الذرات والجزيئات فالذرة هي أصغر وحدة في أي نوع من المادة في تفاعل كيمياوي بينما الجزيء تعريفاً هو أصغر وحدة مستقرة في عنصر ما، كجزئي الماء مثلاً. ووضع أفوغادرو فرضية بأن الحجوم المتساوية للغازات في نفس شروط الحرارة والضغط تحتوي أعداداً متساوية من الجزيئات، وهكذا وفق أفوغادرو بين الصورتين، الصورة التي وضعها دالتون وصورة غي لوساك : إن اتحاد جزيئي هدروجين مع جزيء أكسجين لتشكيل جزيء ماء يكافئ اتحاد حجمين من الهدروجين مع حجم الأكسجين لتشكيل حجمين من بخار الماء. ومن جهة أخرى فإن اتحاد غرام من الهدروجين مع ثمانية غرامات من الأكسجين لتشكيل تسعة غرامات من الماء يعني أن جزيء الأكسجين O_2 يزن ثمان مرات وزن جزيئي الهدروجين $2H_2$ وأن وزن جزيئي الماء يساوي تسع مرات هذا الوزن ($2H_2$). وهذا ما يقودنا إلى تعريف الوزن الذري والوزن الجزيئي لجسم ما وهما تعريفاً وزن ذرة واحدة أو

جزيء واحد من هذا الجسم البسيط أو المركب. وقد اختير كوحدة لقياس الوزن الأكسجين $C = 16$ عوضاً عن الهدروجين $H = 1$. نرمز بـ A و M للوزن الذري والجزيئي على الترتيب.

نسمي مولاً (Mole) أو غرام جزيئي عدد الجزيئات التي يساوي وزنها M غراماً كما نسمي غراماً ذرياً عدد الذرات التي يساوي وزنها A غراماً. وهكذا فإن وزن الغرام الذري للأكسجين هو تعريفاً 16 غراماً ووزن الغرام الجزيئي للأكسجين هو 32 غراماً. نرمز بـ N_o لعدد الجزيئات في مول واحد وهو عدد أفوغادرو

$$N_o = 6,0225 \cdot 10^{23}$$

ينتج من فرضية أفوغادرو أن المول يحتل نفس الحجم، أياً كان الغاز، في نفس شروط الحرارة والضغط. هذا الحجم هو 22,4 ليتراً في درجة الحرارة $0°C$ والضغط 766 ميلمتراً من الزئبق. يتيح لنا تعريف المول وعدد أفوغادرو معرفة الأوزان الذرية والجزيئية لكل العناصر. ولكن لم يكن يُعرف شيء عن أبعاد الذرات. نعرف اليوم أن أبعاد الذرة هي من 1 إلى 2 10^{-10} متراً.

2.2- الإلكترون والبروتون والفوتون :

يكفي مفهوم الذرات والجزيئات لدراسة التفاعلات الكيمياوية فهي إذاً من وجهة النظر الكيمياوية المكونات النهائية للمادة. ولكن هذا المفهوم لا يكفي لدراسة ميكانيكية التفاعل الكيمياوي وتفسير الارتباطات الكيمياوية لتكوين الجزيئات. تحدث التفاعلات والارتباطات نتيجة التأيين أي طرد الإلكترونات أو تبادلها بين الذرات والجسيمات (يتحد الأيون الموجب Na^+ مع الأيون السالب cl^- لتكوين جزيئي كلور الصوديوم(Nacl)) وهكذا فقد تبين أولاً، خلافاً لما كان يتصور، أن الذرات ليست المكونات الأساسية للمادة وأنها تنقسم، تفقد إلكتروناتها، وتبين ثانياً أن كل ما يطرأ في التفاعلات الكيمياوية ذو منشأ كهربائي راكد صرف.

أما الإلكترونات فقد أنتجت مباشرة ودرست خواصها، في النصف الثاني من القرن التاسع عشر، في الأشعة المهبطية وذلك بتسخين لوحة معدنية إلى درجة حرارة كافية أي بإعطائها طاقة كافية لطرد الإلكترونات البعيدة عن النواة، إلكترونات التكافؤ، ثم بتسريعها نتيجة تطبيق فرق كمون كاف.

ولكن إذا لم تكن الذرات هي المكون الأساسي فما هو إذاً ؟ لقد افترض بروت Prout منذ أوائل القرن التاسع عشر (1815) أن كل الذرات مركبة من ذرات الهدروجين ولكن هذه الفرضية أهملت عندما أصبح الكيميايون قادرين على قياس الكتل الذرية بدقة ووجدوا أنها ليست أضعافاً صحيحة لكتلة الهدروجين فكتلة الكلور مثلاً هي 35,5. ولكن دراسة الإشعاع الطبيعي سواء الإشعاع α (إصدار نواة ذرة الهليوم He^{++} أو الإشعاع β (إصدار إلكترون e^-) أثبتت أن العناصر، على الرغم من تفاوتها من وجهة النظر

الكيمياوية، مؤلفة في الواقع من خليط من أنواع مختلفة من الذرات بنيتها واحدة ولكنها مختلفة الكتلة، وقد سميت هذه الأنواع المتكافئة تماماً كيميائياً والمختلفة في الكتل نظائر Isotopes[1]. فهناك مثلاً نظيران في الكلور كتلة الأول 37 مرة كتلة الهدروجين وكتلة الثاني 35 ونسبة هذين النظيرين في الطبيعة هي 25% للنظير 37 و 75% للنظير 35 بحيث تكون الكتلة الوسطية هي 35,5. وهكذا عدنا إلى فرضية قريبة من فرضية بروت : إن نواة الذرة هي تجميع لنويات ذرة الهدروجين، (البروتونات Protons) والذرة كلها مؤلفة من نواة وإلكترونات حولها وهكذا فإن مكونات المادة الأساسية جسيمان فقط الإلكترون والبروتون.

ويمكن أن نضيف إليهما جسيماً ثالثاً الفوتون Photon – جسيم النور – إذا قبلنا أن للنور بنية جسيمية وأن الإشعاع الكهرطيسي، من إشعاعات γ إلى الأشعة السينية X إلى فوق البنفسجية فالضوئية (ألوان قوس قزح من البنفسجي إلى الأحمر) فالأشعة تحت الحمراء، مؤلف من فوتونات لا تختلف عن بعضها إلا من حيث طاقتها المتناقصة بالترتيب من γ إلى تحت الحمراء. وهكذا فإن مكونات المادة الأساسية كانت حتى أوائل الثلاثينيات من القرن العشرين هي البروتون والإلكترون والفوتون وهو جسيم لا كتلة له.

أما التفاعل بين الأجسام فعلى شكلين تفاعل مرتبط بكتل الأجسام – الجاذبية الكونية التي تعين على سبيل المثال وزن الأجسام على سطح الأرض $P = mg$ – وآخر مرتبط بشحنها الكهربائية – أحد مظاهره التجاذب والتنابذ الكهربائي الراكد الذي يكفي لشرح كل الظواهر الكيمياوية. إن التفاعل الثاني – التجاذب في ذرة الهدروجين مثلاً بين البروتون والإلكترون نتيجة شحنتيهما – أكبر بـ 10^{39} مرة تقريباً من التفاعل الأول – تجاذبهما نتيجة كتلتيهما. لنُشر بالمناسبة إلى أن هذه النسبة هي أكبر عدد تعرفه الفيزياء.

ولكن لهذين التفاعلين صفات مشتركة فهما بعيدا المدى أي أن القوة لا تنعدم إلا عندما يصبح الجسمان المتفاعلان بعيدين عن بعضهما إلى ما لا نهاية. وإذا كان الفوتون هو وسيط التفاعل الكهرطيسي أي إذا كانت إحدى الشحنتين تصدر فوتوناً لإشعار الشحنة الأخرى بوجودها فإن الغرافيتون Graviton – جسيم التثاقل – هو وسيط التفاعل الكتلوي. وهو كالفوتون لا كتلة له. هذا وقد بذل الفيزيائيون – وعلى رأسهم آنشتاين خلال أربعة عقود تقريباً – جهوداً كبيرة لفهم العلاقة بين هاتين القوتين وإعادتهما بالتالي إلى منشأ واحد ولكن دون نجاح يذكر حتى اليوم.

[1] تعني الكلمة نفس الموضع، نفس المكان، وهو الموضع الذي تحتله الذرة في الجدول الدوري للعناصر الكيميائية.

3.2- النوترون والتفاعلات النووية القوية :

لقد كان يُفترض في إطار النظريات المتداولة في مطلع الثلاثينيات من القرن الماضي أن النواة مؤلفة من بروتونات والكترونات (كتلة الإلكترون أصغر بـ 1836 مرة من كتلة البروتون، وهكذا فإن وجود الإلكترونات لا يؤثر تأثيراً ملموساً على كتلة النواة) ويُفسر استقرار النواة بالتجاذب الكهربائي الراكد في داخل النواة على شاكلة تفسير الذرة بنفس التجاذب بين النواة ذات الشحنة الموجبة (عدد البروتونات أكبر من عدد الإلكترونات) والإلكترونات التي تحيط بالنواة كما يفسر إشعاع β على أنه إصدار أحد إلكترونات النواة. ولكن كيف يفسر كون عدد البروتونات أكبر من عدد الإلكترونات في النواة ولم لا نشاهد على الأقل نويات حيادية كهربائياً ؟ لقد حل اكتشاف النوترون في عام 1932 هذه المعضلة. تم اكتشاف النوترون على الشكل التالي : تُقذف ذرات خفيفة كالليتيوم أو البيريليوم مثلاً بجزيئات α فتصدر جسيماً محايداً كهربائياً وذا طاقة عالية، قوة اختراقه شبيهة بقوة اختراق الإشعاع γ. سمي هذا الإصدار إشعاعاً اصطناعياً – محرضاً – لتفريقه عن إشعاع α أو β العفوي الطبيعي. يمكن لهذا الإشعاع طرد البروتونات من الأجسام التي تحوي على الهدروجين كالبارافين مثلاً (إيرين وف. جوليو كوري Irène et F. Joliot-Curie 1932) وهو ما لا يمكن لإشعاع γ فعله. وقد درسه شادويك Chadwick في غرفة تأيين وعين خواصه : شحنته تساوي الصفر وكتلته تساوي كتلة البروتون تقريباً. ولذلك فلا يمكنه أن يتفاعل كهرطيسياً مع إلكترونات الذرات على غرار ما تفعله الفوتونات (γ و X) والإلكترونات (β)؛ وبالتالي فإن تفاعله هو مع النويات فقط التي قد تأسره أو تبعثره ولا "يشعر" البتة بوجود الإلكترونات. ولما كان عدد الذرات، وعدد النويات، هو نفسه في مول غرام واحد من الهدروجين و16 غراماً من الأكسجين فإن قابلية امتصاص النوترون هي نفسها في هاتين الكتلتين بينما قابلية امتصاص γ، X أو β أكبر بعدة مرات في الأكسجين لأن التفاعل هو مع إلكترونات الذرات التي يتناسب عددها مع الكتلة.

إن للنوترون كما للبروتون عزم زاوي "سبين يساوي $\frac{1}{2}$ في وحدات معينة" سنراها فيما بعد؛ ويمكننا تفسير العزم الزاوي للنواة تفسيراً تاماً إذا اعتمدنا فكرة تكوين النواة من بروتونات ونوترونات وهكذا فإن كتلة النواة، محسوبة بوحدات كتلة البروتون (أو النوترون)، A تعين عدد الجسيمات الكلي في النواة وتسمى عدد الكتلة وهي تساوي عملياً الكتلة الذرية (الوزن الذري)، أما عدد البروتونات وحدها وبالتالي عدد الإلكترونات فيقيسها العدد الذري Z الذي يقيس في الوقت نفسه شحنة النواة، A - Z هو عدد النوترونات. نكتب من أجل أي ذرة X : $^{A}_{Z}X$ وهكذا فإن ذرة الهدروجين هي $^{1}_{1}H$ بروتون واحد والكترون واحد ونظائر الأورانيوم هي $^{238}_{92}U$ (بنسبة 99,30%) و $^{235}_{92}U$ (بنسبة 0,7%) و $^{234}_{92}U$ (بنسبة 0,006%)، عدد البروتونات هو 92 وعدد النوترونات هو بالترتيب 146، 143، 142.

تبقى الإجابة على سؤالين هما : ما هي القوى التي تسمح ببقاء البروتونات داخل النواة على الرغم من تنابذها الكهربائي وكيف تتفاعل النوترونات الحيادية فيما بينها وكذلك مع البروتونات، وكيف تبقى النواة مستقرة ؟

قلنا في الرقم السابق للإجابة على السؤال الأول إن تبادل الإلكترونات بين الذرات يفسر الارتباطات الكيمياوية لتكوين الجزيئات وسنبين عند دراستنا لميكانيك الكم أن استقرار أيون جزيء الهدروجين H_2^- ناتج عن تبادل إلكترون بين ذرة هدروجين وبروتون ونرمز لهذا التبادل على الشكل التالي :

$$(H, p) \rightleftarrows (p, H)$$

يصدر الهدروجين إلكتروناً فيتحول إلى بروتون ويأسر البروتون هذا الإلكترون فيتحول إلى ذرة هدروجين والعكس بالعكس.

وقد تصور يوكاوا Yukawa (1935) تبادل جسيم مشحون بين بروتون ونوترون : يصدر البروتون p الجسيم المشحون فيتحول إلى نوترون n ويمتص النوترون هذا الجسيم فيتحول إلى بروتون والعكس بالعكس

$$(p, n) \rightleftarrows (n, p)$$

وكذلك الأمر عندما يحدث التفاعل بين بروتونين أو نوترونين مع الفارق الوحيد وهو أن الجسيم المتبادل حيادي. وقد حسب يوكاوا كتلة هذا الجسيم فوجد أنها تفوق بمئتي وسبعين مرة كتلة الإلكترون وهي بالتالي أصغر بعدة مرات من كتلة البروتون وأطلق عليها اسم الميزون، وهو التعبير اليوناني عن الكتلة الوسطية. وقد اكتشفت هذه الجسيمات (1947-1948) ذات الشحنة الموجبة أو السالبة أو الصفر (π^0 ، π^- ، π^+) في الإشعاع الكوني، ونعني بذلك الجسيمات التي تصل الأرض آتية من الفضاء بين النجوم بعد تفاعلها مع الجو. وقد تبين أن التفاعل النووي (تبادل الميزون) أقوى بمئة مرة من التفاعل الكهربائي (تبادل الإلكترون) وأن مدى هذا التفاعل قصير جداً ولا يحدث إلا في داخل النواة أي أن مداه لا يتجاوز الـ 10^{-15} من المتر خلافاً للتفاعل الكهرطيسي طويل المدى. كما تبين أيضاً أنه لا يفرق بين البروتون والنوترون أي أن التفاعل بين نوترونين أو بين بورتونين أو بين نوترون وبروتون هو نفسه ونقول إن البروتون والنوترون متناظران في التفاعلات النووية كتناظر الكلور 37 والكلور 35 في التفاعلات الكيمياوية. ولذلك أعطي لهما عددان يميزان بينهما $+\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2}$ سميا بالسبين النظائري، السبين الإيزوتوبي ولا نستطيع التمييز بين هذين العددين – أي بين البروتون والنوترون – إلا عندما ننتقل من التفاعلات النووية إلى التفاعلات الكهرطيسية التي يتأثر بها الأول ولا يتأثر الثاني. لقد أعطى هايزنبرغ (1930) هذين العددين لتشابه حالة البروتون والنوترون بحالة إلكترونين أحدهما سبينه موجب $+\frac{1}{2}$ والآخر سالب $-\frac{1}{2}$ يتأثر أولهما، في حال وجود حقل مغنطيسي، في اتجاه معين وثانيهما في اتجاه معاكس.

4.2- الليبتونات والتفاعلات النووية الضعيفة :

أما السؤال الثاني فهو كيف نفسر الإشعاع β؟ كيف يمكن للنواة إصدار الإلكترون ؟ والجواب هو أن أحد نوترونات النواة يتفكك إلى بروتون وإلكترون ولكن المشكلة هو أن هذا التفكك، إذا ترك على هذا الشكل، لا يحقق مبدأين أساسيين في الفيزياء – حفظ الطاقة وحفظ العزم الزاوي – ولذلك افتُرِضَ وجود جسيم جديد عديم الشحنة، عديم الكتلة وعزمه الزاوي "سبين" يساوي $\frac{1}{2}$ أيضاً كالبروتون والنوترون أطلق عليه اسم النوترينو Neutrino[2] (باولي Pauli وفيرمي Fermi 1934) وبتحديد أكبر فإن الجسيم الجديد المفروض ليس هو النوترينو وإنما هو النوترينو المضاد. وبالفعل وجد ديراك Dirac (1928) عند وضعه للمعادلة التي يخضع لها الإلكترون في ميكانيك الكم النسبوي – وهو ما سندرسه في نهاية المجلد الرابع – أنها تصف في الواقع جسيمين، لا جسيماً واحداً، يتفقان في صفات عديدة الكتلة، والعزم الزاوي ويختلفان في الشحنة فقط وأطلق على هذا الجسيم ذي الشحنة الموجبة (المساوية بالقيمة المطلقة لشحنة الإلكترون السابق) اسم البوزيترون. وقد اكتشف البوزيترون في الأشعة الكونية[3].

وبصورة عامة فإن لكل جسيم جسيماً مضاداً : بروتون مضاد، نوترون مضاد، ميزون مضاد، الخ. وقد ينطبق الجسيم المضاد انطباقاً تاماً على الجسيم، فالفوتون المضاد لا يختلف في شيء عن الفوتون. وهكذا يمكننا الكلام عن المادة والمادة المضادة. ولكن لنعد إلى تفكك النوترون خشية الاسترسال : فهو يتفكك إلى بروتون وإلكترون ونوترينو مضاد

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\upsilon}_e$$

وهكذا فقد ازددنا عمقاً في معرفتنا للمادة ولم يعد للمعنى الأصلي للذرة Atom أي محتوى حقيقي منذ استطعنا تجزئتها إلى إلكترونات ونواة وبينا أن أحد مركبات النواة، النوترون ليس مستقراً إذ أنه يتفكك إلى جسيمات أخرى.

يتفكك جسيم آخر اسمه الميزون μ الميوون Muon [كتلته أصغر من كتلة الميزون π (تفوق بمئتي مرة كتلة الإلكترون) وشحنته مساوية لشحنة الإلكترون وسبينه $\frac{1}{2}$ أيضاً فهو يشبه الإلكترون كثيراً] على الشكل التالي

$$\bar{\mu} \rightarrow e^- + \upsilon_\mu + \bar{\upsilon}_e$$

نسمي التفاعلات التي تدخل فيها الجسيمات e^- ، μ^- ، υ_e ، υ_μ (وجسيماتها المضادة) والتي نسميها بالليبتونات (الجسيمات الخفيفة) بالتفاعلات النووية الضعيفة لأن شدتها أضعف بـ 10^{-5} مرة من

---

[2] هذه الـ o في نهاية الكلمة للتصغير فالجسيم عديم الشحنة كالنوترون "حيادي" ولكنه عديم الكتلة أيضاً.

[3] إن ما نلاحظه على سطح الأرض ليس هو ما يصدر عن الفضاء بين النجوم من جسيمات، إشعاعات، وإنما ما ينتج عن تفاعل الجسيمات (اصطدامها) مع جسيمات الجو فهو إذاً إشعاع ثانوي يحوي جسيمات لا يحويها الإشعاع الأولي.

4.2- الليبتونات والتفاعلات النووية الضعيفة :

أما السؤال الثاني فهو كيف نفسر الإشعاع β؟ كيف يمكن للنواة إصدار الإلكترون ؟ والجواب هو أن أحد نوترونات النواة يتفكك إلى بروتون وإلكترون ولكن المشكلة هو أن هذا التفكك، إذا ترك على هذا الشكل، لا يحقق مبدأين أساسيين في الفيزياء – حفظ الطاقة وحفظ العزم الزاوي – ولذلك افترض وجود جسيم جديد عديم الشحنة، عديم الكتلة وعزمه الزاوي "سبين" يساوي $\frac{1}{2}$ أيضاً كالبروتون والنوترون أطلق عليه اسم النوترينو Neutrino[2] (باولي Pauli وفيرمي Fermi 1934) وبتحديد أكبر فإن الجسيم الجديد المفروض ليس هو النوترينو وإنما هو النوترينو المضاد. وبالفعل وجد ديراك Dirac (1928) عند وضعه للمعادلة التي يخضع لها الإلكترون في ميكانيك الكم النسبوي – وهو ما سندرسه في نهاية المجلد الرابع – أنها تصف في الواقع جسيمين، لا جسيماً واحداً، يتفقان في صفات عديدة الكتلة، والعزم الزاوي ويختلفان في الشحنة فقط وأطلق على هذا الجسيم ذي الشحنة الموجبة (المساوية بالقيمة المطلقة لشحنة الإلكترون السابق) اسم البوزيترون. وقد اكتشف البوزيترون في الأشعة الكونية[3].

وبصورة عامة فإن لكل جسيم جسيماً مضاداً : بروتون مضاد، نوترون مضاد، ميزون مضاد، الخ. وقد ينطبق الجسيم المضاد انطباقاً تاماً على الجسيم، فالفوتون المضاد لا يختلف في شيء عن الفوتون. وهكذا يمكننا الكلام عن المادة والمادة المضادة. ولكن لنعد إلى تفكك النوترون خشية الاسترسال : فهو يتفكك إلى بروتون وإلكترون ونوترينو مضاد

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\upsilon}_e$$

وهكذا فقد ازددنا عمقاً في معرفتنا للمادة ولم يعد للمعنى الأصلي للذرة Atom أي محتوى حقيقي منذ استطعنا تجزئتها إلى إلكترونات ونواة وبينا أن أحد مركبات النواة، النوترون ليس مستقراً إذ أنه يتفكك إلى جسيمات أخرى.

يتفكك جسيم آخر اسمه الميزون μ الميوون Muon [كتلته أصغر من كتلة الميزون π (تفوق بمئتي مرة كتلة الإلكترون) وشحنته مساوية لشحنة الإلكترون وسبينه $\frac{1}{2}$ أيضاً فهو يشبه الإلكترون كثيراً] على الشكل التالي

$$\bar{\mu} \rightarrow e^- + \upsilon_\mu + \bar{\upsilon}_e$$

نسمي التفاعلات التي تدخل فيها الجسيمات e^-، μ^-، υ_e، υ_μ (وجسيماتها المضادة) والتي نسميها بالليبتونات (الجسيمات الخفيفة) بالتفاعلات النووية الضعيفة لأن شدتها أضعف بـ 10^{-5} مرة من

---

[2] هذه الـ o في نهاية الكلمة للتصغير فالجسيم عديم الشحنة كالنوترون "حيادي" ولكنه عديم الكتلة أيضاً.

[3] إن ما نلاحظه على سطح الأرض ليس هو ما يصدر عن الفضاء بين النجوم من جسيمات، إشعاعات، وإنما ما ينتج عن تفاعل الجسيمات (اصطدامها) مع جسيمات الجو فهو إذاً إشعاع ثانوي يحوي جسيمات لا يحويها الإشعاع الأولي.

التفاعلات النووية القوية التي رأيناها في الرقم السابق. ولنشرح باختصار ما نعنيه بذلك : إن التفكك العفوي، التلقائي لجسيم ما، ولنفرضه في حالة السكون، يعني حسب مبادئ النسبية التي تكافئ بين الكتلة والطاقة حسب علاقة آنشتاين الشهيرة $E = mC^2$ أن كتلته أكبر من مجموع كتل الجسيمات التي يتفكك إليها وأن الطاقة المتاحة للتفكك هي $Q = \Delta mC^2$ حيث Δm الفرق بين كتلة الجسيم المتفكك ومجموع كتل الجسيمات الناتجة و C سرعة الضوء ونسمي، كما هو معلوم، "عمر الجسيم" الفترة الزمنية اللازمة لتفكك نصف عدد الجسيمات الموجودة. إن عمر التفككات الليبتونية طويلة جداً فهي 10^{-10} من الثانية بالنسبة للتفككات النووية التي هي $10^{-23}s$ وتتوقف أساساً على الطاقة المتاحة Q (وإن لم تكن العلاقة بينهما علاقة رتيبة بسيطة). ومن جهة أخرى فإننا نقيس شدة التفاعل (أهمية القوى الفاعلة فيها) بإعطاء ثابتة، لا أبعاد لها، نسميها ثابتة الاقتران. إن ثابتة الاقتران تتوقف على مقلوب العمر ولذلك فهي صغيرة جداً في التفاعلات النووية الضعيفة مقارنة بالتفاعلات النووية القوية.

5.2- الجسيمات الأولية وقوى التفاعل :

ازداد عدد الجسيمات الأولية والمكونات الأساسية للمادة ازدياداً كبيراً وذلك بارتفاع الطاقات التي يمكن إعطاؤها للجسيمات في اصطدامها ببعضها والوصول إلى جسيمات جديدة نتيجة هذه الاصطدامات. ونقصد بجسيمات جديدة أنها ليست فتاتاً أو أجزاء الجسيمات المتصادمة وإنما هي جسيمات مختلفة عن الجسيمات الأم اختلافاً جذرياً؛ إن اصطدام قطارين ببعضهما لا يمكن أن ينتج عدة سيارات جديدة مثلاً، وإنما كماً من الحديد ومواد أخرى ولكن إنتاج جسيمات جديدة من تفاعل جسيمين شيء يتحقق كل يوم.
تكتسب الجسيمات طاقات مرتفعة بتسريعها في أجهزة تزداد ضخامة وتعقيداً وكلفة إلى حد يجعل من الصعب على دولة متوسطة تحمّل أعبائها، هي مسرعات الجسيمات، وسنتعرض لمبادئها في حينها، وهكذا فقد أصبح عدد الجسيمات ما ينوف على ثلاثين جسيماً وجسيماً مضاداً صنفت حسب كتلها وعزمها الزاوي، سبينها، إلى فوتون سبين 1، ليبتونات (نوترينو، إلكترون وميوون) سبين $\frac{1}{2}$ وميزونات (ميزون بي π^0 و π^- و π^+ مشحون أو حيادي وميزون k : k^0 و k^- و k^+) سبينها 0 وأخيراً إلى جسيمات ثقيلة – الباريونات – أخفها النكلوون (البروتون (p) أو النوترون (n)) وأثقلها الهيبرونات (Ω^- و Ξ^{0-}، $\Sigma^{\pm,0}$، Λ^0، X) وسبينها $\frac{1}{2}$.
تسمى الباريونات والميزونات، معاً الهدرونات، وتدخل في كل التفاعلات : في التفاعل النووي القوي أساساً، وفي التفاعل الكهرطيسي إذا كانت مشحونة، وهنا يدخل الفوتون، وفي التفاعل الضعيف. أما الليبتونات فتتفاعل بالإضافة إلى التفاعل النووي الضعيف تفاعلاً كهرطيسياً ولا تدخل في التفاعلات القوية.

ونحن لا نريد تعقيد الصورة هنا بإعطاء مميزات هذه الجسيمات كلها، سبينها الإيزوتوبي أو عمرها أو كيفية تفككها، مكتفين بالإشارة إلى أن قوى التفاعل الأساسية في الطبيعة هي الآن أربع قوى وأن نسبة شدتها بالنسبة لبعضها بعضاً، نسبة ثوابت الاقتران غير ذات أبعاد هي وسطياً كالتالي :

جدول رقم 1

التفاعل النووي القوي	يشترك فيه الميزونات والباريونات (الهدرونات)	1	(إلى 10 القوية جداً)
التفاعل الكهرطيسي	يشترك فيه الفوتون وكل الجسيمات المشحونة	10^{-2}	
التفاعل النووي الضعيف	تشترك فيه الليبتونات والهدرونات	10^{-5}	
التفاعل التثاقلي	كل الجسيمات والأجسام إطلاقاً	10^{-40}	

6.2– الكواركات والجسيمات الجديدة :

كانت هذه صورة فيزياء الجسيمات حتى عام 1964 : عدد كبير من الجسيمات الأولية لا يعلم أحد إن كانت تشكل فعلاً المكونات الأساسية للمادة ولا يستطيع أن يفسر اشتراك بعضها في نوع من التفاعلات دون سواها، كما ارتفع عدد القوى التي كان يحلم آنشتاين بإرجاعها إلى منشأ واحد، إلى توحيدها، من قوتين – التثاقل والكهرطيسية – إلى أربع قوى.

يصعب علينا جداً ونحن في بدء رحلتنا في دراسة الفيزياء إعطاء أي مؤشر لتفسير نشوء نظرياتنا الحالية عن الجسيمات وتصنيفها. لنقل إن أسباباً عديدة كانت تدفع بالنظريين إلى نقل التناظر بين البروتون والنوترون في التفاعلات النووية القوية من جسيمين إلى ثلاثة جسيمات (تزفايغ Zweig وغيلمان Gell-Mann 1964) ولكن وجد أن شحنة هذه الجسيمات الجديدة، التي أطلق عليها اسم الكواركات، المختلفة عن البروتون والنوترون، هي جزء من شحنة الإلكترون – ثلث أو ثلثي هذه الشحنة – وأن سبينها الأيزوتوبي هو $\frac{1}{2}$، $-\frac{1}{2}$ أو صفر وأن كل الباريونات بما في ذلك البروتون والنوترون مؤلفة من ثلاثة كواركات وأن الميزونات مؤلفة من كوارك وكوارك مضاد. سبين الكواركات يساوي $\frac{1}{2}$. نرمز لهذه الكواركات حسب إشارة سبينها الأيزوتوبي $\frac{1}{2}$: u (من up نحو الأعلى) و $-\frac{1}{2}$: d (من down نحو الأسفل) و 0 : s (من singulet وحيد) شحنة الأول هي $+\frac{2}{3}$ وشحنة الثاني والثالث $-\frac{1}{3}$ وهكذا فإن البروتون هو p = uu d و n = dd u وهكذا...

تسمى الجسيمات التي يساوي سبينها $\frac{1}{2}$ (أو ضعفاً فردياً لـ $\frac{1}{2}$) فيرميونات وسنرى أن مبدأ الاستبعاد الذي وضعه باولي يمنع وجود فيرميونين متطابقين في نفس الحالة الكمومية، في نفس المكان على سبيل

ونحن لا نريد تعقيد الصورة هنا بإعطاء مميزات هذه الجسيمات كلها، سبينها الإيزوتوبي أو عمرها أو كيفية تفككها، مكتفين بالإشارة إلى أن قوى التفاعل الأساسية في الطبيعة هي الآن أربع قوى وأن نسبة شدتها بالنسبة لبعضها بعضاً، نسبة ثوابت الاقتران غير ذات أبعاد هي وسطياً كالتالي :

جدول رقم 1

التفاعل النووي القوي	يشترك فيه الميزونات والباريونات (الهدرونات)	1	(إلى 10 القوية جداً)
التفاعل الكهرطيسي	يشترك فيه الفوتون وكل الجسيمات المشحونة	10^{-2}	
التفاعل النووي الضعيف	تشترك فيه الليبتونات والهدرونات	10^{-5}	
التفاعل التثاقلي	كل الجسيمات والأجسام إطلاقاً	10^{-40}	

6.2- الكواركات والجسيمات الجديدة :

كانت هذه صورة فيزياء الجسيمات حتى عام 1964 : عدد كبير من الجسيمات الأولية لا يعلم أحد إن كانت تشكل فعلاً المكونات الأساسية للمادة ولا يستطيع أن يفسر اشتراك بعضها في نوع من التفاعلات دون سواها، كما ارتفع عدد القوى التي كان يحلم آنشتاين بإرجاعها إلى منشأ واحد، إلى توحيدها، من قوتين – التثاقل والكهرطيسية – إلى أربع قوى.

يصعب علينا جداً ونحن في بدء رحلتنا في دراسة الفيزياء إعطاء أي مؤشر لتفسير نشوء نظرياتنا الحالية عن الجسيمات وتصنيفها. لنقل إن أسباباً عديدة كانت تدفع بالنظريين إلى نقل التناظر بين البروتون والنوترون في التفاعلات النووية القوية من جسيمين إلى ثلاثة جسيمات (تزفايغ Zweig وغيلمان Gell-Mann 1964) ولكن وجد أن شحنة هذه الجسيمات الجديدة، التي أطلق عليها اسم الكواركات، المختلفة عن البروتون والنوترون، هي جزء من شحنة الإلكترون – ثلث أو ثلثي هذه الشحنة – وأن سبينها الأيزوتوبي هو $\frac{1}{2}$، $-\frac{1}{2}$ أو صفر وأن كل الباريونات بما في ذلك البروتون والنوترون مؤلفة من ثلاثة كواركات وأن الميزونات مؤلفة من كوارك وكوارك مضاد. سبين الكواركات يساوي $\frac{1}{2}$. نرمز لهذه الكواركات حسب إشارة سبينها الأيزوتوبي $\frac{1}{2}$: u (من up نحو الأعلى) و $-\frac{1}{2}$: d (من down نحو الأسفل) و 0 : s (من sin gulet وحيد) شحنة الأول هي $+\frac{2}{3}$ وشحنة الثاني والثالث $-\frac{1}{3}$ وهكذا فإن البروتون هو p = uu d و n = dd u وهكذا...

تسمى الجسيمات التي يساوي سبينها $\frac{1}{2}$ (أو ضعفاً فردياً لـ $\frac{1}{2}$) فيرميونات وسنرى أن مبدأ الاستبعاد الذي وضعه باولي يمنع وجود فيرميونين متطابقين في نفس الحالة الكمومية، في نفس المكان على سبيل

المثال. لذلك لا بد أن يكون للفيرميونين u و u الداخلين في تكوين البروتون صفات تجعلهما يختلفان عن بعضهما وإن كنا نحن لا نراها سميت هذه الصفات ألواناً : الأزرق B والأصفر Y والأحمر R (ومجموعها هو عملياً مجموع ألوان قوس قزح : الأبيض أي انعدام الألوان) وهكذا لم يبق في الطبيعة إلا ليبتونات وكواركات وكلها فيرميونات والفوتون وسبينه يساوي 1؛ تسمى الجسيمات التي يساوي سبينها 1 (أو أضعافاً له) بالبوزونات نسبة إلى بوز Bose وهي لا تخضع لمبدأ الاستبعاد بمعنى أنه يمكن لأي عدد من البوزونات المتطابقة أن توجد مع بعضها في مكان واحد.

لقد رأينا أن الفوتون هو وسيط التفاعل الكهرطيسي، الجسيم الذي تتبادله الشحنتان المتفاعلتان. لمَ لا نفتش إذاً عن جسيمات وسيطة في التفاعلات الأخرى ؟ لقد تنبأ فاينبرغ Weinberg وسلام Salam (1968) بوجود الجسيمات الوسيطة في التفاعلات النووية الضعيفة. وهي ثلاثة جسيمات اثنان منهما مشحونان w^+ و w^- والثالث حيادي Z^o وحسبا كتلها : 80 إلى 90 مرة كتلة البروتون واستطاعوا مع غلاشو Glashow إرجاع التفاعلين الكهرطيسي والنووي الضعيف إلى منشأ واحد محققين بعضاً من حلم آنشتاين. اكتشفت هذه الجسيمات فعلاً في المركز الأوربي للبحوث النووية (CERN) عام 1982 (روبيا Rubbia وزمرته). هذه الجسيمات الوسيطة هي بوزونات أيضاً.

وباتباع نفس الإطار النظري يمكن القول إن الجسيمات الوسيطة في التفاعل النووي القوي هي ثمانية بوزونات لا كتلة لها ولا تسمح للكواركات الابتعاد عن بعضها، ولذا سميت بالكلوون Gluon (اللاصقة). ولكن أهم مشكل يعترض نظرية الكواركات هو أنه لم يتمكن بعد من عزل الكواركات عن بعضها : إيجاد كوارك حر رغم الطاقات العالية التي تتوفر عليها المسرعات الحالية.

وقد ازداد عدد الليبتونات من ليبتونين e^- و μ إلى ثلاثة الآن e^-، μ و τ ولكل ليبتون نوترينوه الخاص به أما عدد الكواركات فقد أصبح 6 u، d، s، c (من Charm) و t (من top)، كوارك القمة و b (من bottom) كوارك القاع. وتصنف الجسيمات في ثلاث عائلات من الكواركات والليبتونات

جدول رقم 2

	كواركات	ليبتونات	
العائلة الأولى	$\begin{pmatrix} u_R & u_Y & u_B \\ d_R & d_Y & d_B \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \upsilon_e \\ e \end{pmatrix}$	υ_e نوترينو الإلكترون
العائلة الثانية	$\begin{pmatrix} c_R & c_Y & c_B \\ S_R & S_Y & S_B \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \upsilon_\mu \\ \mu \end{pmatrix}$	υ_μ نوترينو الميوون
العائلة الثالثة	$\begin{pmatrix} t_R & t_Y & t_B \\ b_R & b_Y & b_B \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \upsilon_\tau \\ \tau \end{pmatrix}$	υ_τ نوترينو التو

أما وسطاء التفاعلات فهي الفوتون (γ) و W^+، W^- و Z^0 في التفاعلات الكهرطيسية والتفاعلات الضعيفة والتي أعيدت إلى منشأ واحد كما قلنا. والكلوونات في التفاعلات النووية القوية. والغرافيتون في تفاعلات الثقالة وهي كلها بوزونات. وهكذا فكأن المادة الأساسية هي فيرميونات (تخضع لمبدأ الاستبعاد لباولي) والمادة الوسيطة، حاملة التفاعلات بوزونات ولكن لماذا ؟ وهل يمكن توحيد قوى الطبيعة الأربع أي إعادتها كلها إلى منشأ واحد ؟ هذه الأسئلة وأخرى قد تجيب عليها الفيزياء في مستقبل قريب. ولنذكر مرة أخرى أن لكل جسيم مضاد، مادة مضادة، قد تنطبق عليه كما هو عليه الحال في الفوتون.

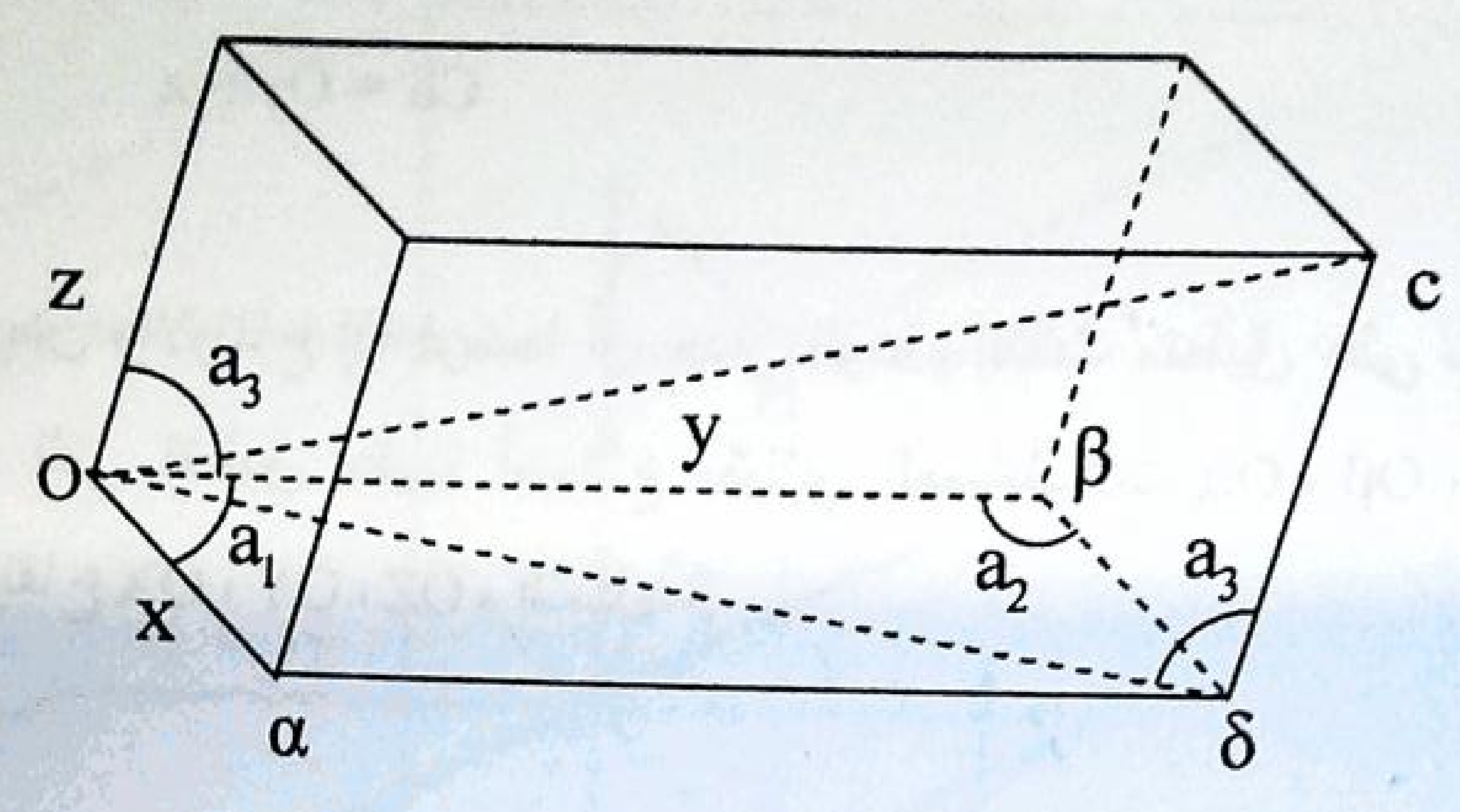
3. المكان والزمان

تقوم الفيزياء على تحديد وضع الجسم B بالنسبة لجسم آخر A أي تحديد المسافة بينهما، قد يكون الجسم الآخر A الفيزيائي الراصد نفسه، وعلى تغير هذا الوضع مع الزمن أي على حركة أحدهما بالنسبة للآخر وهكذا تقوم الفيزياء على الإجابة على السؤالين أين ؟ ومتى ؟ ؛ كيف نعين المكان والزمان : وضع الجسم والتغييرات التي تطرأ عليه من حركة وغيرها. فمفهوما الزمان والمكان مرتبطان كما نرى ارتباطاً جذرياً بمفهوم المادة. إنهما شكلا وجود المادة فلا معنى لوجودها دون وجودهما والعكس بالعكس.

1.3– المكان والهندسة الإقليدية :

يقول نيوتن إنه لن يعّرف الزمان والفضاء[4] والمكان والحركة نظراً لأن هذه المفاهيم معروفة للجميع؛ وفي الواقع فإن تعريف الفضاء، هذا الوعاء الذي نضع فيه المادة، سهل إذا انطلقنا من الملاحظة المباشرة في الوسط الضيق المحيط بنا. لنتخيل الأشياء على شكل جسيمات غير ذات أبعاد أي على شكل نقط هندسية. أو لنأخذ نقطة من الجسم B، مركز ثقله C مثلاً. ولنعين وضعها بالنسبة إلى نقطة من الجسم A، عين الراصد O مثلاً، ولنتصور الوعاء على شكل متوازي أوجه تحتل النقطتان O و C رأسين متقابلين من رؤوسه، الشكل.1.

[4] ولكنه يعرف الزمان والفضاء المطلقين كما سنرى.

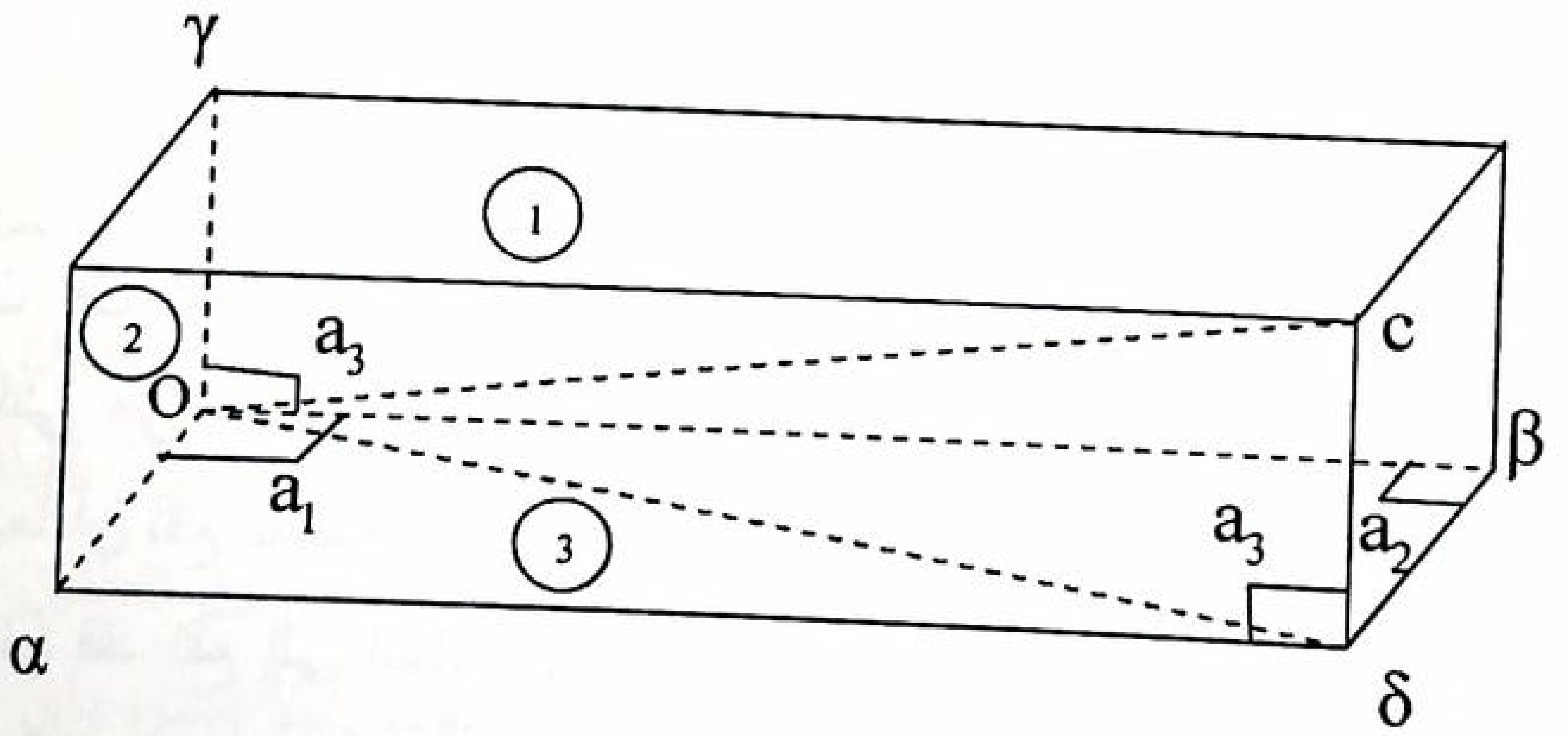


الشكل.1

يتعين وضع C بالنسبة لـ O تماماً بمعرفة الأطوال $O\alpha = x$ و $O\beta = y$ و $O\gamma = z$ التي تحدد أبعاد متوازيات الأضلاع المكونة لمتوازي الأوجه أي أن ثلاثة أعداد كافية لتعيين وضع أي نقطة في الفضاء. ولكن تعريف المسافة بين O و C معقد[5] إذا لم نختر وعاءنا على شكل متوازي مستطيلات بدلاً عن متوازي أوجه. تسمح مبرهنة فيثاغورث عندئذ حسب الشكل.2 بكتابة

$$\overline{OC}^2 = \overline{O\delta}^2 + \overline{\delta C}^2 = \overline{O\alpha}^2 + \overline{\alpha\delta}^2 + \overline{\delta C}^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (3.1)$$

حيث الزوايا $\hat{a}_1 = \hat{a}_2 = \hat{a}_3 = \frac{\pi}{2}$.



الشكل.2

إن وضع C معرف تماماً بإعطاء الأعداد الثلاثة التي تعين أبعادها عن جدران الوعاء الثلاثة (1) و(2) و(3) وهي بالترتيب

$$\overline{\delta\beta} = \overline{O\alpha} = x \quad (3.2)$$

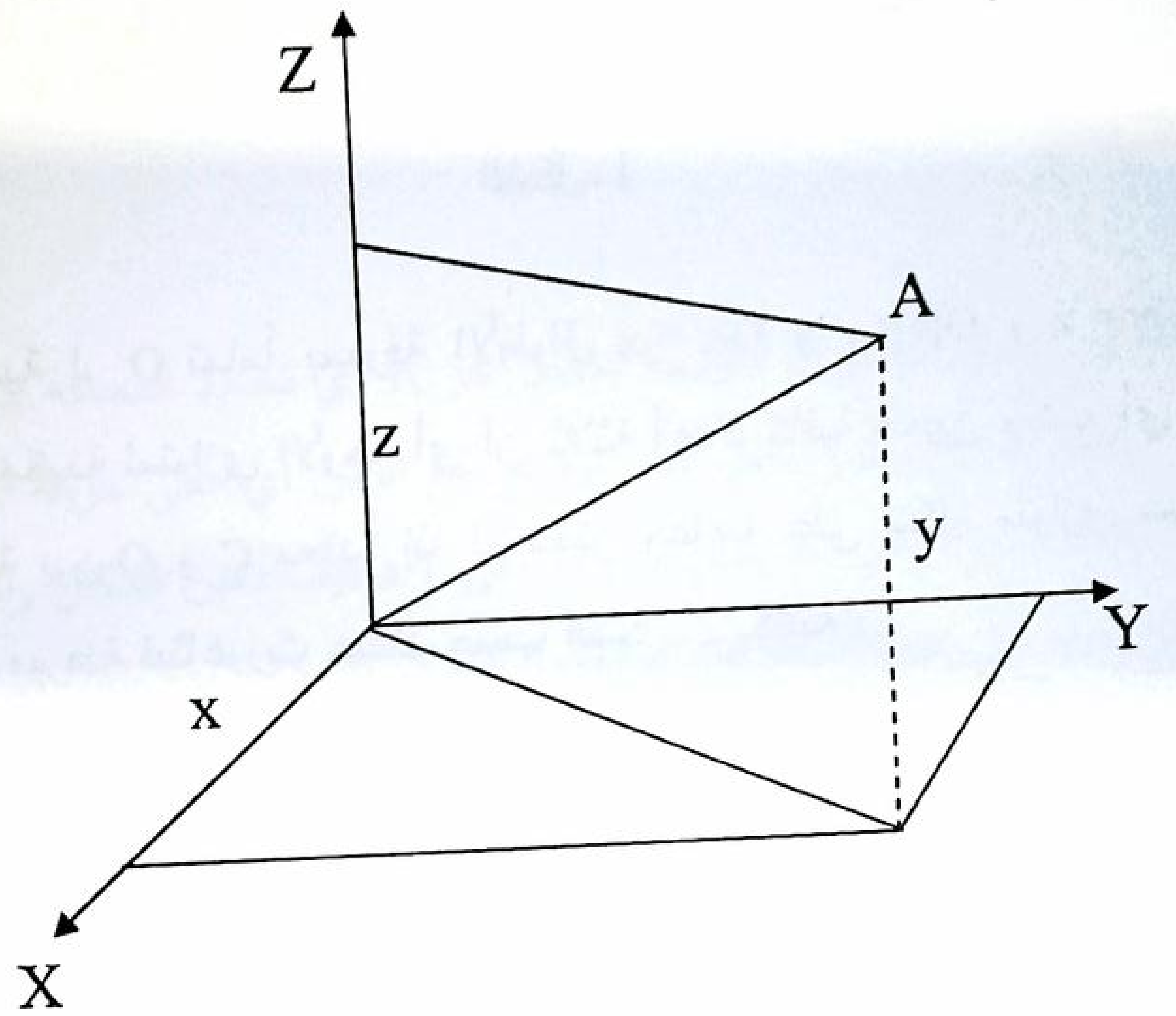
---

[5] لدينا في المثلث $O\delta C$: $\overline{OC}^2 = \overline{O\delta}^2 + \overline{\delta C}^2 - 2\overline{O\delta}\,\overline{\delta C}\cos a_3$ ، $\delta C = O\gamma = z$ وفي المثلث $O\alpha\delta$: $\overline{O\delta}^2 = \overline{O\alpha}^2 + \overline{\alpha\delta}^2 - 2\overline{O\alpha}\,\overline{\alpha\delta}\cos a_2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos a_2$ حيث a_2 هي الزاوية المكملة لـ a_1 و $O\alpha = x$ و $\alpha\delta = O\beta = y$ بحيث يكون $\overline{OC}^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy\cos a_2 - 2z(x^2 + y^2 - 2xy\cos a_2)^{1/2}\cos a_3$.

و $\overline{\delta\alpha} = \overline{O\beta} = y$ (3.3)

و $\overline{C\delta} = \overline{O\gamma} = z$ (3.4)

ولنسمها الطول والعرض والارتفاع إذا فرضنا أن جدار الوعاء الثالث منطبق على سطح الأرض : ولنسم أنصاف المستقيمات التي تنطبق عليها أضلاع متوازي المستطيلات Oα ، Oβ ، Oγ بالترتيب محاور الطول والعرض والارتفاع OX ، OY ، OZ ، الشكل.3.

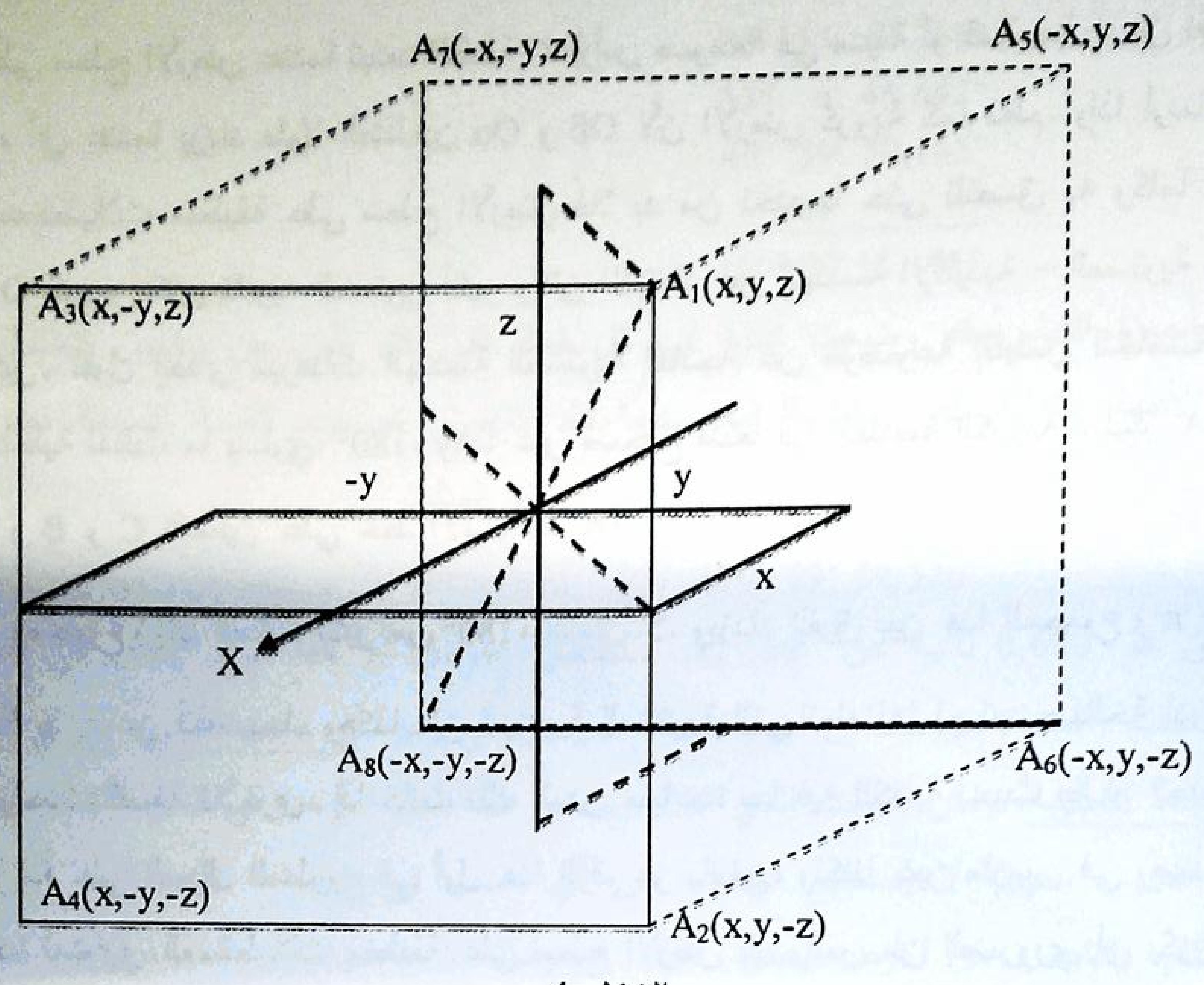


الشكل.3

ولنقل، متخلصين من فكرة الوعاء، إن وضع أي نقطة A في الفراغ معين تماماً بمعرفة الأعداد الثلاثة x ، y ، z التي هي مساقطها على المحاور الثلاثة. إن هذه الأعداد موجبة في مثالنا. ولكنه ليس من الضروري طبعاً أن تقع النقطة A إلى الأمام بالنسبة للجدار (1) وعلى يمين الجدار (2) وإلى الأعلى بالنسبة للجدار (3) فقد تقع إلى الخلف أو إلى اليسار أو إلى الأسفل؛ عدد الإمكانات الكلي هو جداء الإمكانات بالنسبة لكل جدار

$$2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$$

ولهذا فإننا نستبدل أنصاف المستقيمات بمستقيمات موجهة، الشكل.4، الاتجاهات الموجبة فيها هي نحو الأمام واليمين والأعلى



الشكل.4

وهكذا فإننا نعين أي نقطة في الفضاء بإعطاء ثلاثة أعداد حقيقية موجبة أو سالبة (أو معدومة عندما تقع النقطة A في أحد المستويات XY مثلاً $z = 0$) ونعين المسافة التي تفصل A عن نقطة المبدأ O بعدد موجب دوماً أو مساوٍ للصفر إذا انطبقت A على نقطة المبدأ O.

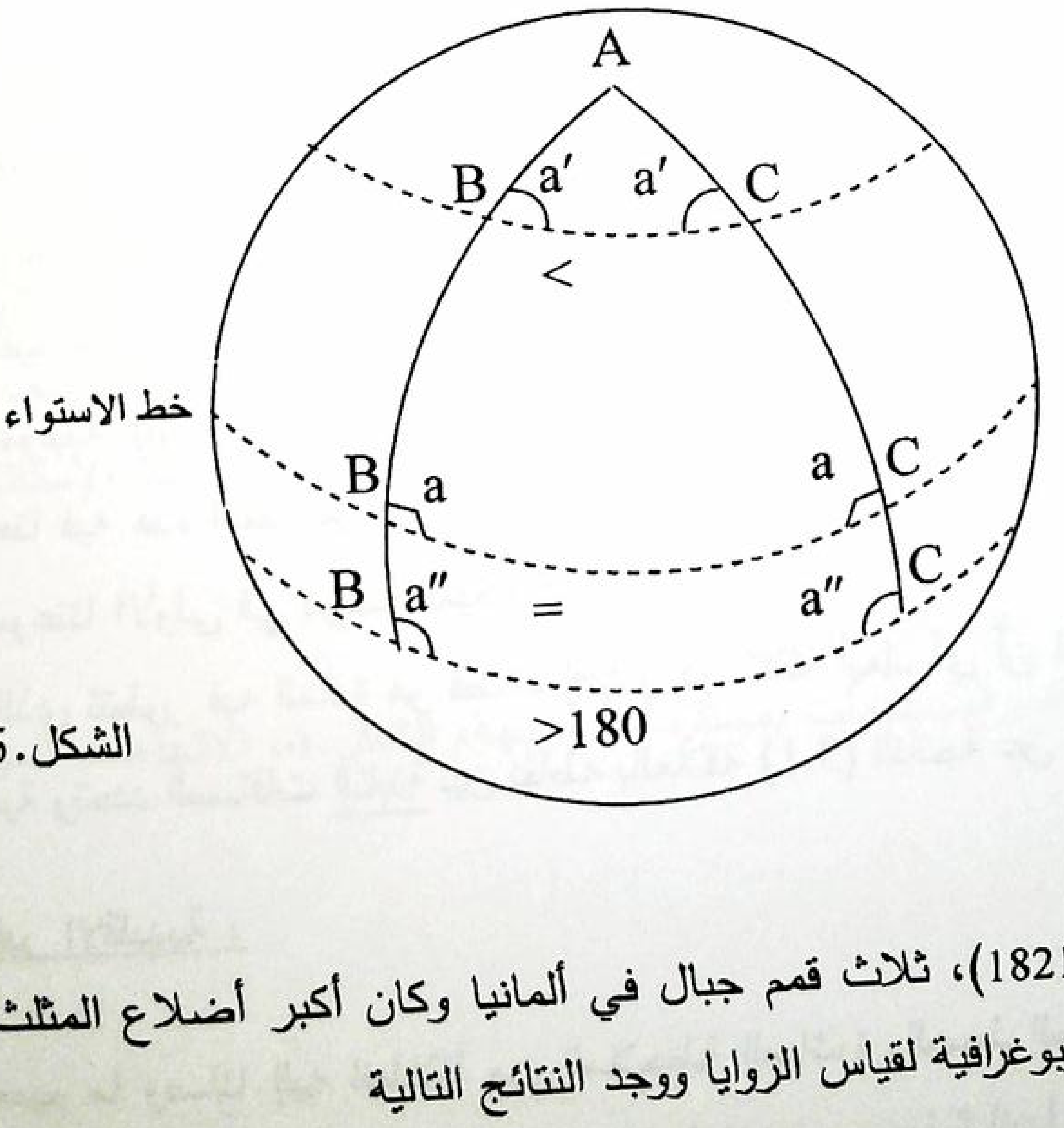
لنلاحظ أننا فرضنا فيما سبق أن المسافة التي تفصل خطين متوازيين $O\beta$ و $\alpha\delta$ مثلاً ثابتة حددتها العلاقة (3.2)، وهي موضوعة مكافئة لموضوعة إقليدس الخامسة التي تنص على أنه لا يمكن أن يمر من نقطة ما خارجة عن مستقيم معين سوى موازٍ واحد له كما استعملنا مبرهنة فيثاغورث لقياس المسافات بين النقاط وهي أعداد موجبة (أو مساوية للصفر) وثابتة. إن ثبات المسافة بين نقطتين يعني أن الوعاء، الفضاء، الذي وضعنا فيه هذه النقط هو وعاء قاسٍ لا يتمدد ولا يتقلص ولا يتشوه بأي شكل من الأشكال ولذلك ستكون موضوعتنا الأولى في دراسة الميكانيك هي التالية :

م 1 : إن الفضاء الذي تتطور فيه المادة هو فضاء إقليدي ذو ثلاثة أبعاد أي أن العلاقات الهندسية تخضع كلها للهندسة الإقليدية وتحدد المسافات الثابتة بين نقاطه بالعلاقة (3.1) الناتجة عن مبرهنة فيثاغورث.

2.3- الهندسة غير الإقليدية :

تُرى هل يمكن تعميم ما وصلنا إليه انطلاقاً من الملاحظة المباشرة والوسط الضيق المحيط بنا إلى كل الأجسام الموجودة في الكون مهما كبرت المسافة التي تفصلها عن بعضها ؟ لنبدأ بحالة خاصة بسيطة وهي عندما نريد قياس المسافات على سطح الأرض. لن تبقى قاعدة متوازي المستطيلات، المستوي رقم 3،

منطبقة على سطح الأرض عندما تبتعد النقطة C (رأس صومعة في مدينة أو قمة جبل) عن نقطة المراقبة، النقطة O، أي عندما يزداد طولا الضلعين Oα و Oβ لأن الأرض كروية كما نعلم. وإذا أردنا إبقاء قاعدة متوازي المستطيلات منطبقة على سطح الأرض فلا بد من تحديبها حتى تلتصق به وكلما كان البعدان Oα و Oβ كبيرين كان تشويه المستوي أكبر وكان الابتعاد عن الهندسة الإقليدية – المستوية ذات البعدين هنا – أكبر. تقول إحدى مبرهنات الهندسة المستوية الناتجة عن موضوعة إقليدس الخامسة إن مجموع الزوايا الداخلية لمثلث ما يساوي 180°، وهذا غير صحيح طبعاً في الهندسة الكروية : ليكن A قطب الكرة الأرضية و B و C نقطتين على خط الاستواء؛ BA و CA خطا الطول الماران من B و C $\hat{a}_1 = \frac{\pi}{2}$ $\hat{a}_2 = \frac{\pi}{2}$ ومجموع زوايا المثلث أكبر من 180°، الشكل.5. ويزداد الفرق بين هذا المجموع و π كلما ابتعدت النقطتان B و C عن بعضهما. وهكذا فإن الهندسة المستوية التي تعلمناها لم تعد صالحة لدراسة أوضاع المدن، الواحدة بالنسبة للأخرى، إذا كانت تلك المدن متباعدة بما فيه الكفاية بحيث يظهر تحدب الأرض. إن جوابنا إذاً على السؤال المطروح في أول هذا الرقم هو بالنفي، ولكننا غير ملزمين في رصدنا للنقطة C بأخذ قاعدة لمتوازي المستطيلات منطبقة على سطح الأرض بل وليس من الضروري أن يكون الراصد O نفسه على سطح الأرض أيضاً. ولكن يبقى السؤال مطروحاً هل تخضع هندسة الفضاء ذي الأبعاد الثلاثة إلى الهندسة الإقليدية أم لا. لقد اقترح غاوص Gauss اختبار انبساط الفضاء بقياس مجموع زوايا مثلث كبير بما فيه الكفاية فإذا كان الفضاء غير منبسط، ذا انحناء، فإن مجموع الزوايا سيكون مختلفاً عن 180°.



الشكل.5

وقد اختار فعلاً، عام (1821)، ثلاث قمم جبال في ألمانيا وكان أكبر أضلاع المثلث يساوي 100 كلم تقريباً واستعمل أجهزة طوبوغرافية لقياس الزوايا ووجد النتائج التالية

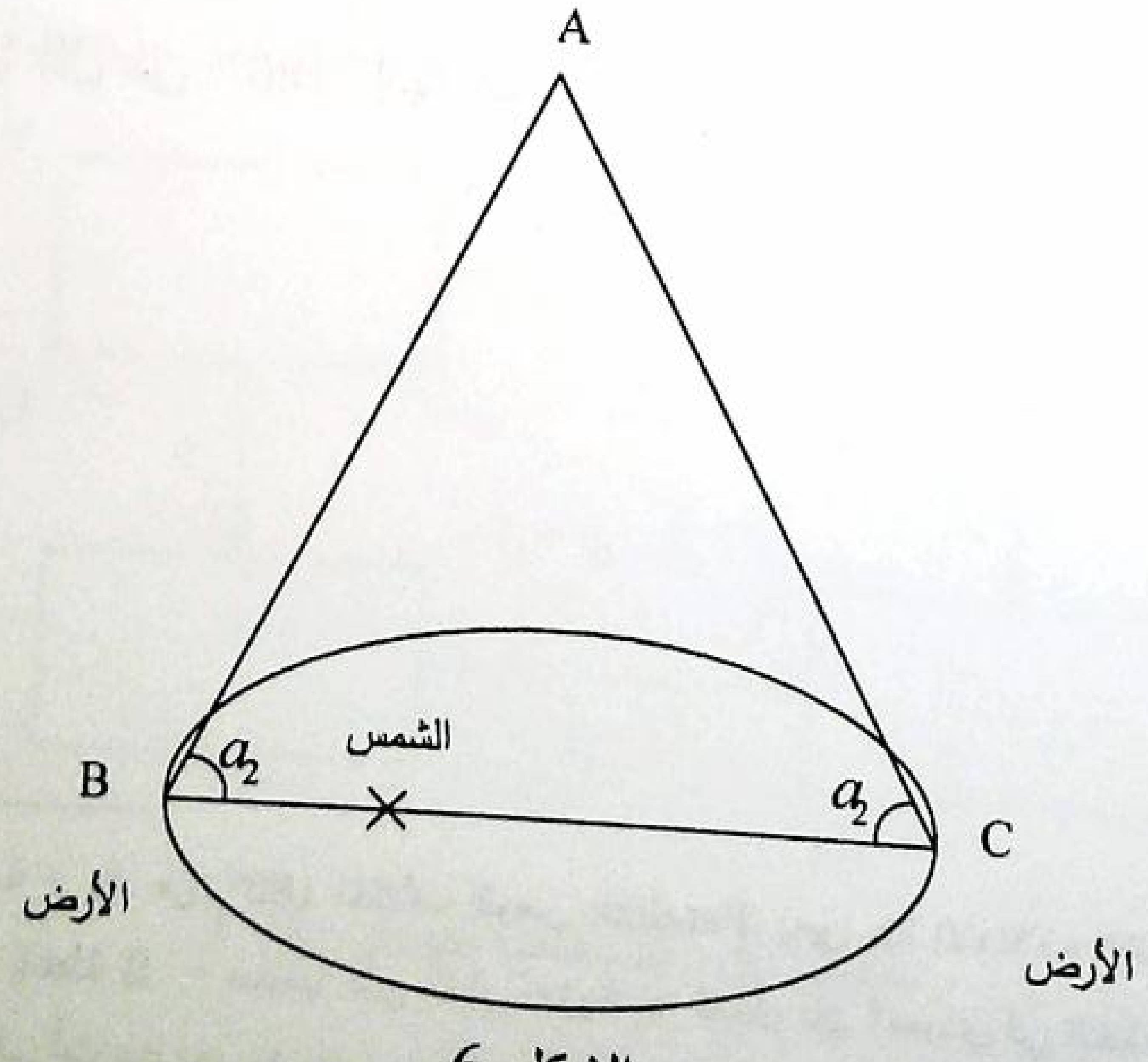
$$86° \; 13' \; 58{,}366''$$
$$53° \; 6' \; 45{,}642''$$
$$40° \; 39' \; 30{,}165''$$
$$\overline{180° \; 00' \; 14{,}173''}$$

ولما كانت أجهزة القياس قد وضعت أفقية في كل قمة (في كل رأس من رؤوس المثلث) وكانت المستويات الأفقية الثلاثة غير متوازية فيما بينها فقد اقتضى تصحيح القيمة السابقة بطرح مقدار 14",853، يسمى الزيادة الكروية، بحيث يصبح مجموع زوايا المثلث

$$179° \; 59' \; 59{,}320''$$

أي أن الفرق هو 0,680 ثانية عن 180° وقد استخلص غاوص أن هذا الفرق يدخل في حدود خطأ الرصد وأن الفضاء فضاء منبسط. إن أهمية تجربة غاوص هي وعيه أن هندسة الكون هي فرع من فروع الفيزياء تحددها التجربة، ولكن المثلث الذي اختاره صغير جداً أمام الأبعاد في النظمة الشمسية، ناهيك عن أبعاد النجوم، بحيث لا يستطيع الكشف عن أي تحدب في الفضاء. فبعد القمر عن الأرض 400.000 كلم، والشمس عن الأرض بحدود $1{,}5.10^{11}$م ولذلك لا بد من تجارب فلكية لمعرفة ما إذا كان الفضاء محدباً أم لا وحساب هذا التحدب.

هذا وتجري الأمور في الفضاء ذي الثلاثة أبعاد، كما هو الحال على سطح الكرة ذي البعدين، حيث يساوي مجموع الزاويتين $\hat{a}_1 + \hat{a}_2$ 180° عندما تقع النقطتان B و C على خط الاستواء وهو أصغر من 180° إذا اقتربت النقطتان من القطب النقطة A (خط العرض قريب من A) وهو أكبر من 180° إذا ابتعدت النقطتان نحو الجنوب تحت خط الاستواء، الشكل.5. لقد اقترح شفارتزشيلد Schwarzschild (1900) إجراء التجربة التالية : نرصد نجماً A بعيداً عن الأرض مرتين تفصلهما مدة ستة أشهر تكون الأرض قد انتقلت على فلكها من النقطة B إلى النقطة C، الشكل.6. BC هو قطر هذا الفلك ويساوي 3.10^{11} متراً.



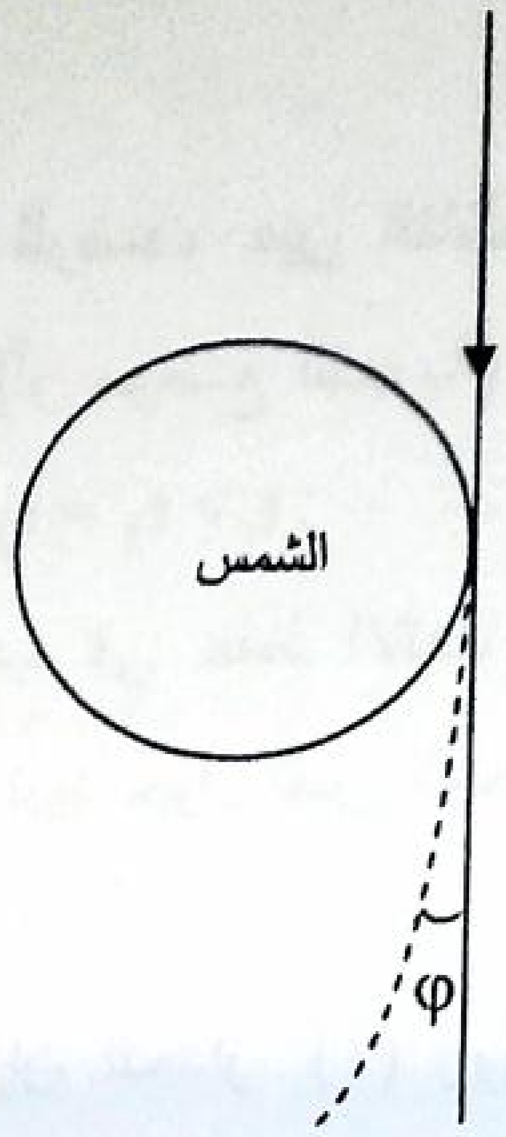
الشكل.6

فإذا كان الفضاء منبسطاً فإن $\hat{a}_1 + \hat{a}_2 \leq 180$ ويصبح مساوياً لـ 180° عندما يكون النجم بعيداً جداً (في اللانهاية)[6] ولكن لم تعط الأرصاد الفلكية أي قيمة للجموع $\hat{a}_1 + \hat{a}_2$ أكبر من 180°. إن النجوم التي تبعد حتى 3.10^{17}م وهي حدود القياسات الزاوية للمقارب (التلسكوبات) الحالية أعطت قيماً أصغر من 180°. ومع ذلك فمن الممكن التحقق من تحدب الفضاء انطلاقاً من انعطاف الأشعة الضوئية الآتية من النجوم البعيدة نحو الشمس عند مرورها بالقرب منها أي من كون مسار الضوء منحنياً في جوار الشمس. إن هذا الانعطاف ليس بحد ذاته برهاناً على تحدب الكون ولكنه نتيجة له.

إن دراسة هذا الموضوع خارجة عن إطار هذا الكتاب وهي النسبية العامة لآنشتاين. ولقد تنبأ آنشتاين في نظريته، عام 1917، بانعطاف الأشعة. وقد رصد هذا الانعطاف فعلاً عند كسوف الشمس بعد زمن وجيز[7]، عام 1919، ووجد أنه يساوي"1,75 ثانية، الشكل.7. كما تعطيه نظرية النسبية العامة. إن النتيجة الثانية التي تؤيد النسبية العامة هي حسابها لطواف فلك عطارد. إن هاتين النتيجتين هما البرهان الوحيد على النظرية ومع ذلك فالنظرية مقبولة الآن من قبل الجميع. وهكذا فإن هندسة الكون ليست هندسة إقليدية وإنما هندسة أخرى هي الهندسة الريمانية، من اسم الرياضي ريمان Riemann الذي اخترعها في أواسط القرن الماضي. إنها هندسة يتجاوز مجموع زوايا المثلث فيها 180 درجة وهي بالتالي لا تقبل موضوعة إقليدس الخامسة وتستبدل بها موضوعة أخرى مناقضة تنكر وجود التوازي. إن سطح الكرة العادية هو أحد نماذج هذه الهندسة ذي البعدين شريطة النظر إلى النقطتين المتقابلتين من قطر الكرة، الواقعتين على سطحها، كنقطة واحدة، أي شريطة إعطاء تعريف آخر للنقطة. تعين في هذه الحالة نقطتان ما من سطح الكرة، أي قطران من أقطارها، قوس دائرة كبرى تمر منها : إنه تعريفاً المستقيم المار من هاتين النقطتين وهو في الواقع، على غرار المستقيم في الهندسة المستوية، أقصر مسافة بين هاتين النقطتين. لنشر إلى وجود هندسة أخرى لا إقليدية لا تقبل موضوعة إقليدس الخامسة ولكنها تستبدل بها موضوعة أخرى تقول بوجود عدد – لامنته – من المستقيمات المنطلقة من نقطة والموازية لمستقيم معين ومجموع زوايا المثلث فيها أقل من 180°. إنها هندسة لوباتشفسكي Lobatchevsky.

[6] يسمى نصف اختلاف المجموع $\hat{a}_1 + \hat{a}_2$ عن 180° اختلاف اللوص Parallax. يعين هذا الاختلاف الانتقال الظاهري للنجم الثابت A من وضعه اللامتناهي في البعد في سمت النقطة B – عمودياً على القطر – ووضعه المائل عن العمودي في النقطة C.

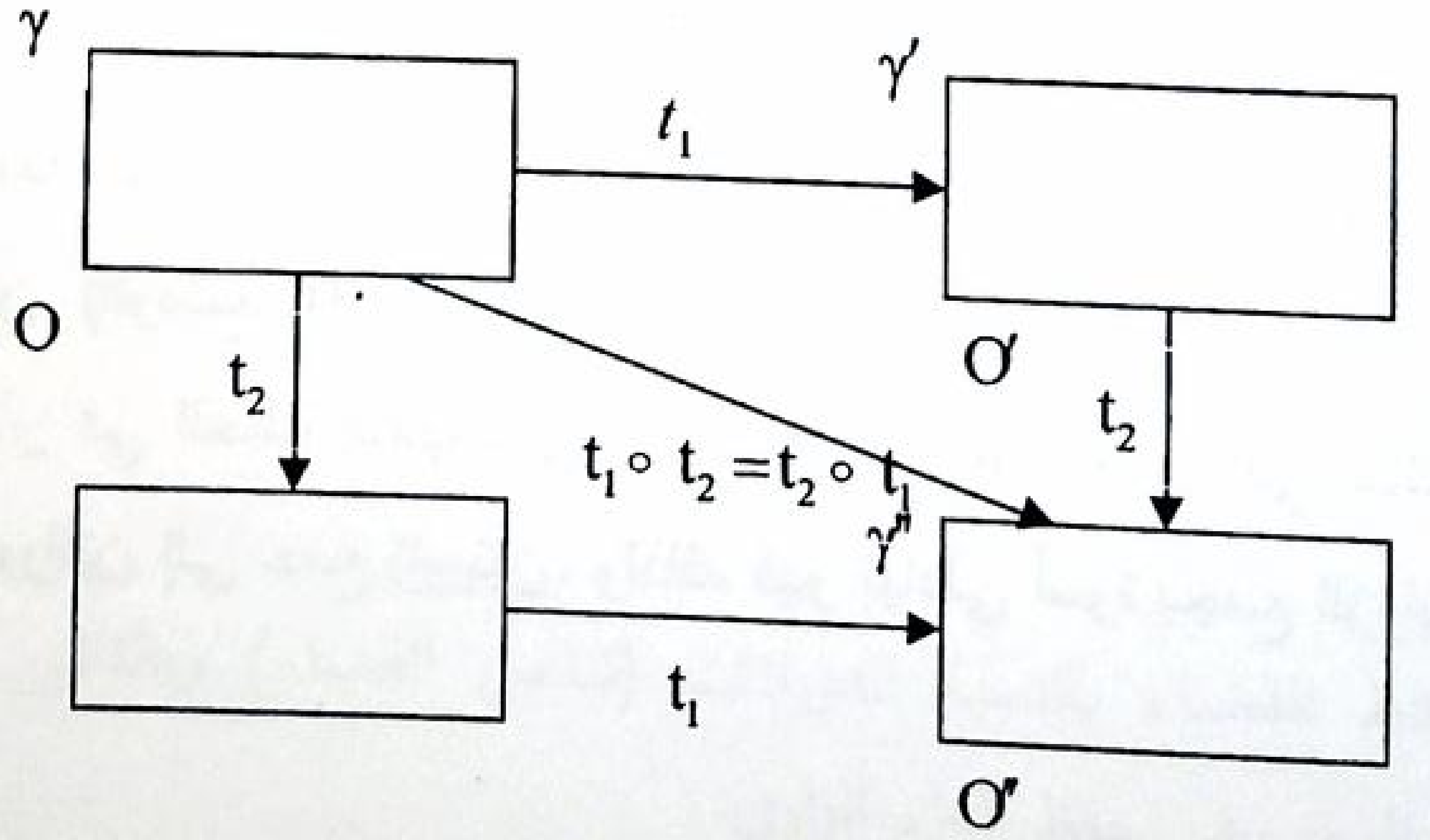
[7] لا يمكن رؤية انعطاف شعاع ضوئي آت من نجم ما عند مروره قرب نجم كبير (الشمس مثلاً) إلا إذا كان هذا النجم الكبير مطفئاً، لذا كان لا بد من انتظار كسوف كلي للشمس حتى يمكن رؤية الشعاع الضوئي المماس لها وحساب انحرافه عن الخط المستقيم.



الشكل.7

3.3- خواص الفضاء الإقليدي :

لنعد الآن إلى الفضاء الإقليدي ولنعرف الحركة بقولنا إنها تطبيق تقابلي يحفظ الأطوال بين مجموعتين من النقاط، Ω و Ω'، عدد عناصرها منته أو لامنته. تحدد نقطتان M و N من المجموعة Ω مقطع مستقيم يقابله مقطع مستقيم $M'N'$ ولدينا $\overline{MN} = \overline{M'N'}$ ونقول إن نقاط Ω تنطبق على نقاط Ω' بالتوضيع Superposition[8]، وضع كل نقطة M فوق نقطة مقابلة لها M'. وهكذا تتحول النقاط الواقعة على مستقيم ما إلى نقاط واقعة على مستقيم مقابل والنقاط الواقعة في مستو إلى نقاط في مستو وتتحول الزوايا التي يشكلها تقاطع مستقيمين في نقطة O من Ω إلى زوايا مساوية يشكلها تقاطع المستقيمين المقابلين في O' من Ω'. وهكذا يمكن نقل متوازي المستطيلات موازياً لنفسه نحنو اليمين أو اليسار أو إلى الأعلى أو إلى الأسفل أو إلى الأمام أو الوراء أو القيام بعدد ما من هذه العمليات بالتوالي دون أن يتغير شكل الوعاء أو حجمه. إن مواصفات وعاء المادة، مواصفات الفضاء، لا تتغير نتيجة هذه الحركة التي نسميها انسحاباً Translation ونرمز لها بـ t، الشكل.8؛ ونقول إنها منحفظة بالنسبة للانسحابات.



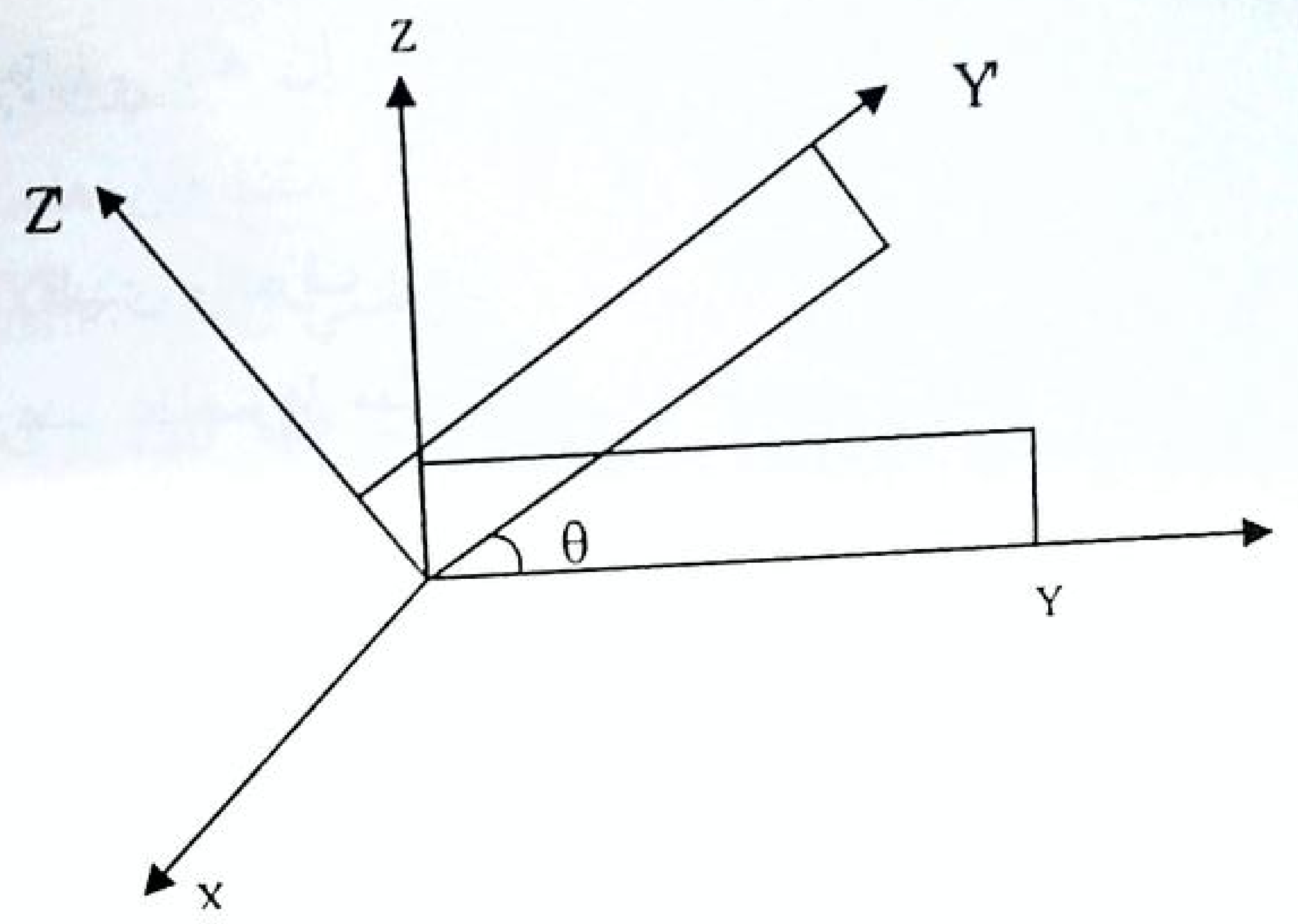
الشكل.8 : انسحاب الجدار رقم 1

---

[8] إن المقابل المتعارف عليه لـ Superposition في هذه الحالة هو التطابق. لكننا اخترنا التوضيع (تنضيد الأشياء فوق بعضها) الأعم من التطابق لملاءمته للمبدأ Superposition principle الذي سنتعرض له في حينه.

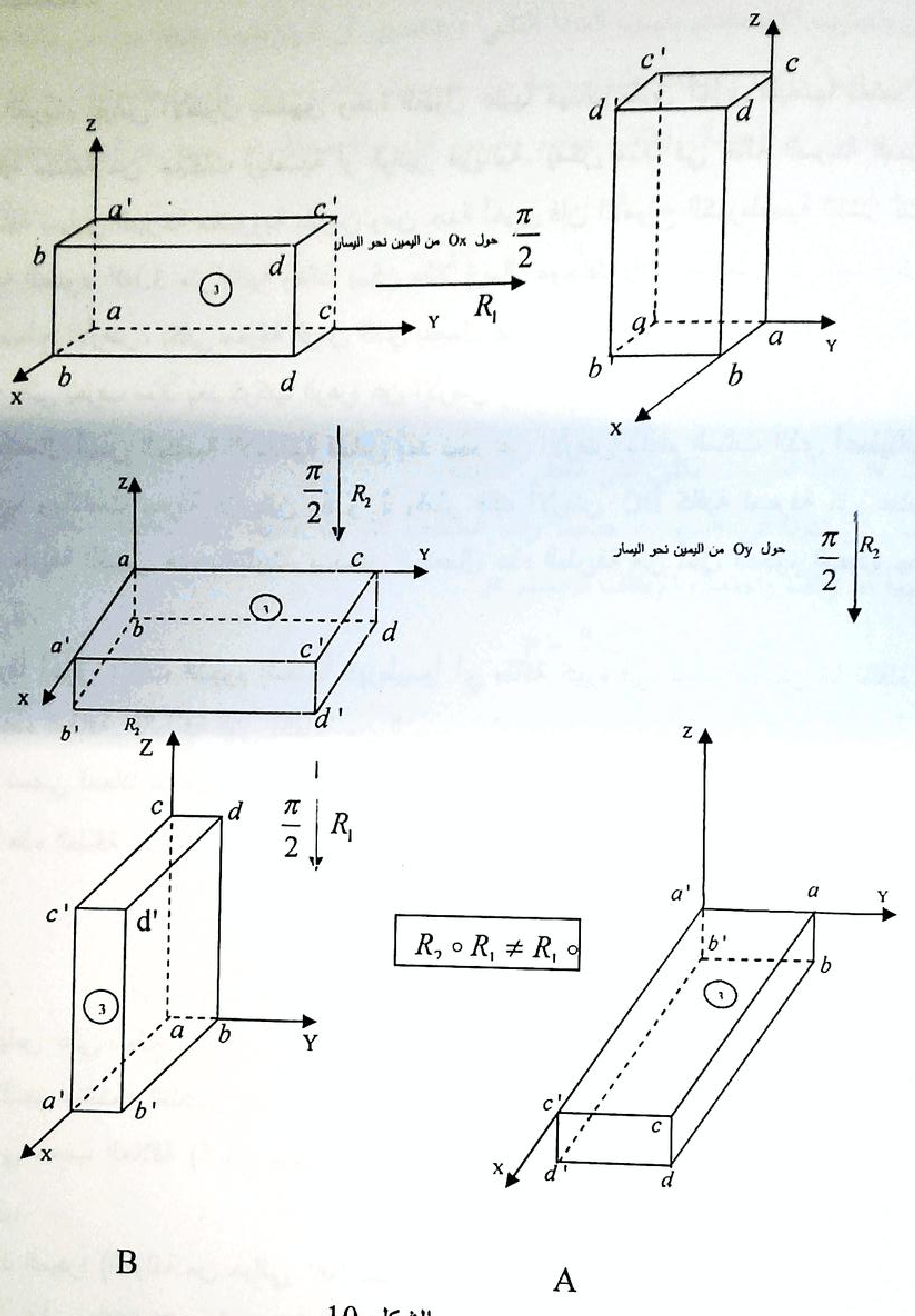
يعني الانسحاب في الواقع اختيار نقطة أخرى للرصد، عين الناظر، غير النقطة O : O'، O" على الشكل.8. نعبر عن حرية اختيار نقطة الرصد (أو موضع التجربة) بقولنا إن الفضاء متجانس. لنلاحظ أن قانون تركيب عمليات الانسحاب تبادلي $t_1 \circ t_2 = t_2 \circ t_1$.

سنرى أن الانسحاب (تجانس الفضاء) هو السبب في حفظ الاندفاع الخطي. وكذلك فإن تدوير وعاء المادة حول محور ما وتكرار هذه العملية قدر ما نريد حول نفس المحور أو حول محاور متعددة لن يغير من شكل الوعاء أو حجمه فالفضاء منحفظ إذاً بالنسبة للدوران ونقول عندئذ إن الفضاء متناحي. يعني الدوران حرية اختيار اتجاه المحاور الثلاثة فدوران الجدار (1) زاوية θ حول OX يعني الانتقال من مظمة المحاور OXYZ إلى OXY'Z'، الشكل.9.



الشكل.9

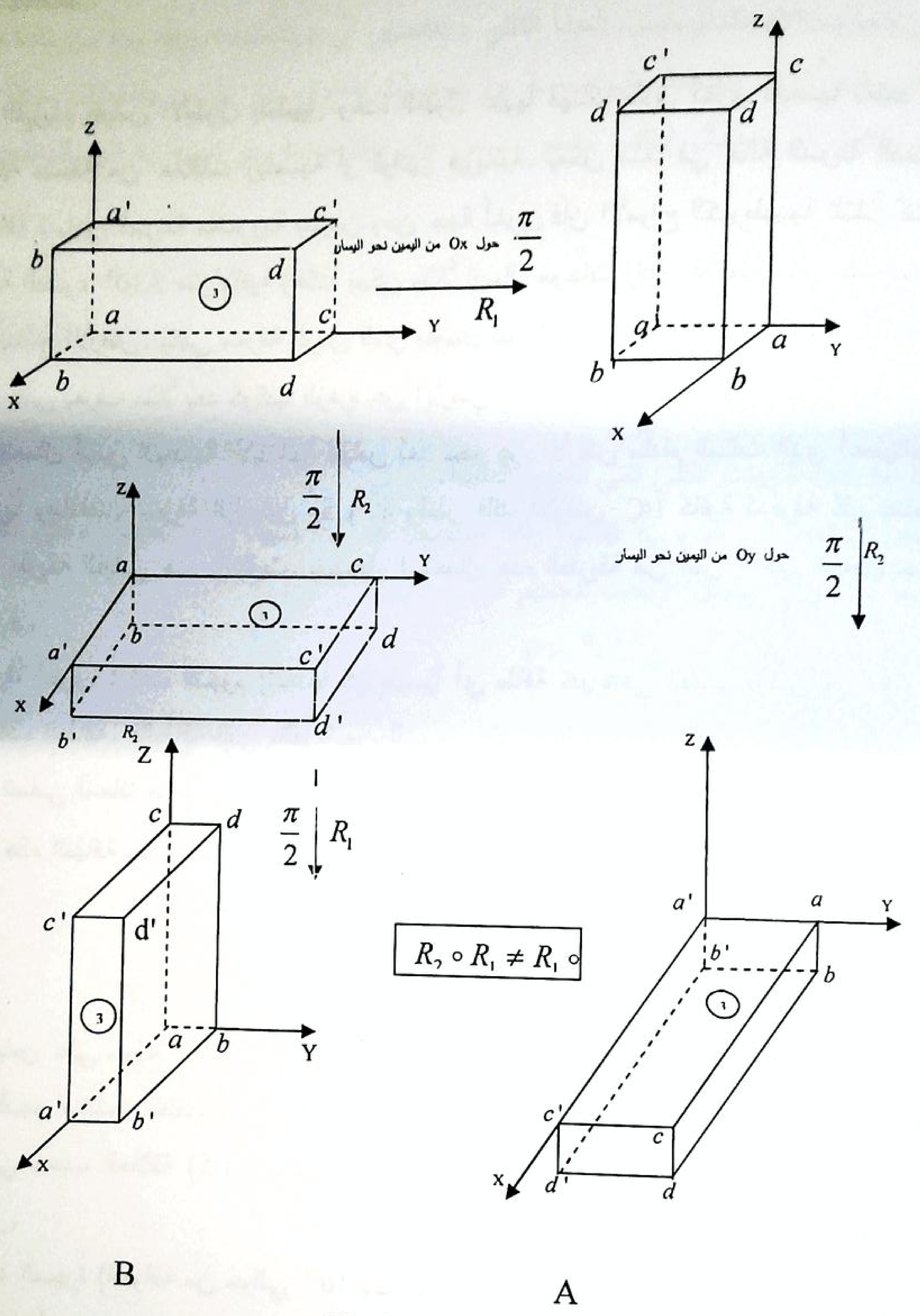
لنلاحظ أن قانون تركيب الدورانات، خلافاً لما هو عليه الحال بالنسبة لقانون تركيب الانسحابات ليس تبادلياً، الشكل.10. إن دوران متوازي المستطيلات زاوية قائمة حول OX في الاتجاه الموجب (من اليمين إلى اليسار) ثم دورانه حول OY بنفس المقدار وفي الاتجاه الموجب أيضاً يؤدي إلى وضع (الوضع A في الشكل) يختلف تماماً عن الوضع الذي يؤدي إليه الدوران حول OY أولاً ثم حول OX بنفس المقدارين وفي الاتجاهين (الوضع B في الشكل) فالجدار الخلفي (3) أصبح سقفاً في الحالة الأولى وجداراً جانبياً على اليسار في الحالة الثانية. إن $R_1 \circ R_2 \neq R_2 \circ R_1$ إلا في حالة الدوران حسب نفس المحور : يعود تركيب دورانين إلى جمع زاويتين. ولذلك فهو تبادلي أسوة بجمع الزوايا.



الشكل.10

سنرى أيضاً أن انحفاظ الفضاء بالنسبة للدورانات (تناحي الفضاء) وبالتالي حرية اختيار اتجاهات المحاور المتعامدة هو السبب في حفظ العزم الزاوي.

يمكن أن يبرهن أن كل حركة، كل انتقال تقابلي بين Ω و 'Ω، هي انسحاب يليه دوران حول نقطة.



الشكل.10

سنرى أيضاً أن انحفاظ الفضاء بالنسبة للدورانات (تناحي الفضاء) وبالتالي حرية اختيار اتجاهات المحاور المتعامدة هو السبب في حفظ العزم الزاوي.

يمكن أن يبرهن أن كل حركة، كل انتقال تقابلي بين Ω و 'Ω، هي انسحاب يليه دوران حول نقطة.

4.3– قياس الأطوال :

لا نكتفي في الفيزياء لقياس الأطوال بتطبيق وحدة الطول عليها فهناك طرق أخرى لقياسها تعتمد على تعاريف للمسافة مشتقة من علاقات رياضية أو قوانين فيزيائية. يمكن مثلاً في حالة السرعة المنتظمة القول إن المسافة تساوي السرعة مضروبة بالزمن ومن جهة أخرى فإن الأمواج الكهرطيسية تنتشر بسرعة ثابتة هي سرعة الضوء 3.10^8 متر/ثانية وهكذا يمكن مثلاً إرسال موجات رادار فترتطم على سطح كوكب ما وتعود إلى سطح الأرض. يكفي معرفة الزمن الذي يفصل بين إرسال واستقبال موجة الرادار – الإشارة الكهرطيسية – حتى نعرف مثلاً بُعد كوكب الزهرة عن الأرض.

يمكن أيضاً استعمال أسس الهندسة الابتدائية لقياس بُعد نجم عن الأرض مادام المثلث الذي أعطيناه في الشكل.6 مستوياً ومادامت معرفة الزاويتين $\hat{a}_1$ و $\hat{a}_2$ وقطر فلك الأرض BC كافية لمعرفة كل عناصر المثلث. تُعرف طريقة القياس هذه بالتثليث. يستحيل استعمال هذه الطريقة من أجل النجوم البعيدة جداً : $\hat{a}_1 + \hat{a}_2 = 180°$.

ولكن هناك طرقاً أخرى : تبث النجوم إشعاعاً كهرطيسياً أي طاقة كبيرة في الفضاء ولكن ما نتلقاه هو جزء فقط من هذه الطاقة. فالطاقة التي نتلقاها من الشمس على شكل حرارة ليست إلا جزءاً ضئيلاً من طاقة الشمس. نسمي لمعاناً صميمياً I الطاقة التي يبثها النجم في واحدة الأزمنة ولمعاناً ظاهرياً A ما نتلقاه فعلاً من هذه الطاقة وسنرى أن نسبة هذين اللمعانين مساوية لـ $\frac{1}{r^2}$ حيث r هو المسافة بين النجم والأرض.

$$\frac{A}{I} = \frac{1}{r^2} \qquad (3.5)$$

إن A سهلة القياس على سطح الأرض، أما اللمعان الصميمي I فيمكن معرفته حسب قانون بسيط يربط بينه وبين لون النجم استنتجه الفلكيون من دراستهم للنجوم القريبة التي يعرفون بعدها عن الأرض وبالتالي لمعانها الصميمي حسب العلاقة (3.5). يكفي قياس لون نجم ما بدقة لمعرفة لمعانه الصميمي وبالتالي بعده عن الأرض.

يعتمد قياس أبعاد المجرة (المؤلفة من حوالي 10^{11} نجماً كالشمس) على هذه الطريقة ووجد أن أبعادها هي كما يلي : 10^{21} متراً = 90.000 سنة ضوئية للقطر و 3000 سنة ضوئية للسمك الوسطي و 15000 سنة ضوئية للانتفاخ المركزي، السنة الضوئية حوالي $9,5 \cdot 10^{15}$ م.

هذا من أجل المسافات البعيدة أما من أجل المسافات القصيرة فإنه يستحيل رؤية أشياء بالمجهر أبعادها أصغر من أطوال موجات الضوء المرئي، 5.10^{-7}م. لذا يجب استعمال أطوال أمواج أقصر منها كالضوء تحت البنفسجي مثلاً أو استعمال المجهر الإلكتروني حيث طول الموجة بحدود 10^{-10}م = $1\mathring{A}$ (أنغستروم Ångström). هذا هو أيضاً طول موجة الأشعة السينية التي تستعمل لقياس المسافات التي تفصل

الأيونات في البلورات وهي أيضاً مسافات بحدود الأنغستروم. أما الأبعاد الأقصر، قطر النواة مثلاً، فتقاس بتجارب الاصطدام حسب المبدأ التالي : لنتصور أن لدينا طبقة رقيقة جداً من مادة ما سطح النواة الظاهري فيها*، σ، ولنسلط عليها حزمة من جسيمات نقطية، غير ذات أبعاد، ذات طاقة كبيرة تستطيع النواة إيقافها. إن احتمال إيقاف جسيم ما من قبل نواة معينة هو نسبة σ إلى السطح الكلي للطبقة ولنسمه A هو

$$^{9}p = \frac{\sigma}{A}$$

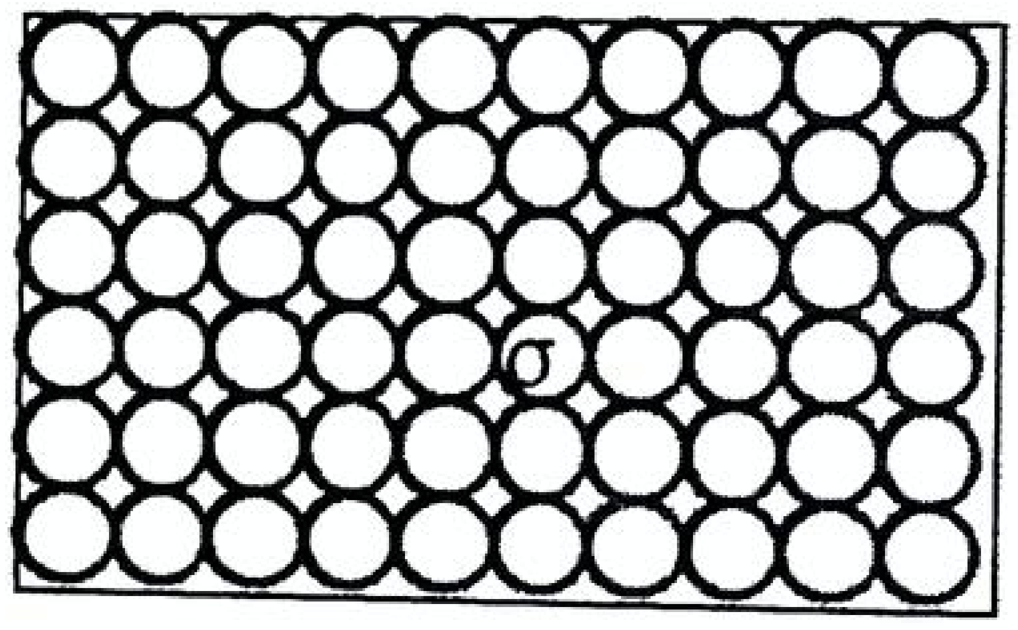
أما احتمال إيقاف الجسيم من قبل الطبقة كلها فهو

$$P = Np = \frac{N\sigma}{A} \quad ،$$

حيث N عدد النويات الكلي التي تغطي الطبقة.

لنفرض أن لدينا في البدء n_1 جسيماً وأننا استطعنا عد n_2 جسيماً وراء الطبقة. معنى ذلك أن $n_1 - n_2$ جسيماً قد أوقف واحتمال الإيقاف للجسيم هو

$$P = \frac{n_1 - n_2}{n_1}$$



من مساواة العلاقتين السابقتين نستنتج

$$\sigma = \pi r^2 = \frac{A}{N}P = \frac{A}{N}\,\frac{n_1 - n_2}{n_1}$$

إن r هو بحدود 10^{-15}م وتسمى هذه الوحدة بالفيرمي Fermi.

5.3– قياس الزمن :

على الرغم من أن الزمن لا يُعَرَّف، كما يقول نيوتن، لأنه مفهوم معروف من الجميع فإننا نعتقد أنه لا يمكن تعريفه ولا يمكن قياسه إلا بوجود حوادث تتكرر بشكل منتظم شيئاً ما نسميها بالحوادث الدورية.

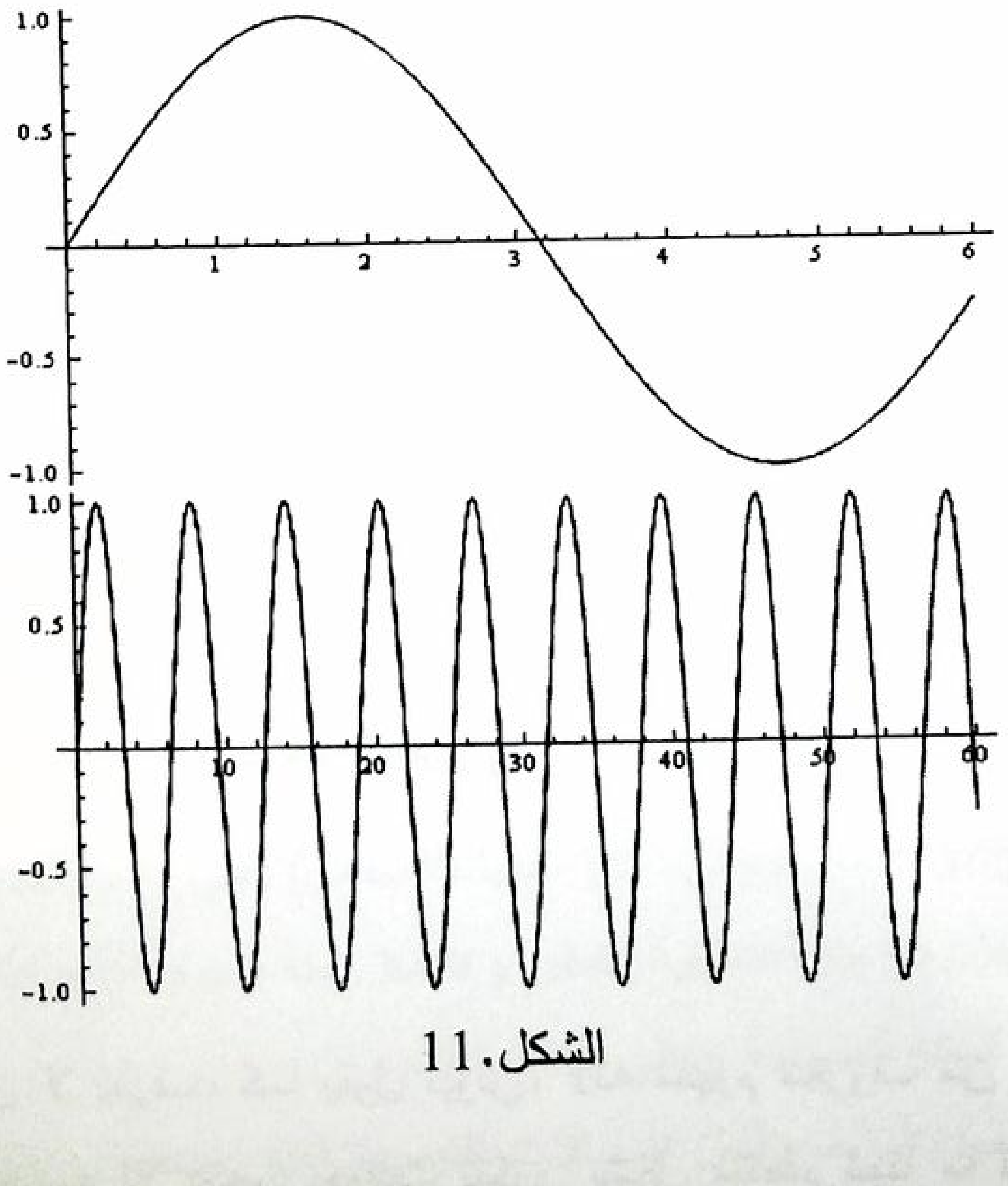
---

* أي سطح الدائرة الكبرى للشكل الكروي الذي تأخذه النواة وهو $\sigma = \pi r^2$.

9 نسمي المقدار σ، الذي هو أيضاً احتمال الإيقاف بواحدة السطوح، مقطع الصدم الفعال وهو يلعب دوراً هاماً جداً في فيزياء الجسيمات وسندرسه باعتناء فائق في حينه.

فالحركة الدورية مثلاً هي حركة يعود فيها المتحرك إلى وضعه الأصلي بعد مرور فاصلة زمنية نسميها الدورة، كحركة النواس البسيط أو حركة الكواكب حول نفسها أو حول الشمس،الخ. ويحصل التأكد من انتظام حركة دورية بمقارنتها بحركة دورية أخرى. وهكذا وجد أن الأيام الشمسية، أي الأزمان اللازمة لمرور الشمس مرتين متتاليتين فوق خط طول نقطة معينة، والسنين الشمسية، ليست متساوية فيما بينها: إن حركتي الأرض الدورانيتين ليستا منتظمتين تماماً لذا عرف اليوم الشمسي الوسطي بكونه جزءاً يساوي $\frac{1}{365,24217}$ من فترة زمنية سميت بالسنة الشمسية الوسطية؛ كما عرفت الثانية بكونها $\frac{1}{86400}$ من اليوم الوسطي: $60 \times 60 \times 24 = 86400$.

هذا ويمكن صنع نواسات دورها ثانية أو جزء من الثانية. وتُستعمل هزازات إلكترونية تنتج تياراً كهربائياً متناوباً لقياس الأزمنة القصيرة جداً؛ إذ يمكن صنع سلسلة من الهزازات دور كل واحد منها أصغر بعشرات مرات من دور سابقه ونلاحظ هذه الأدوار في كاشف الاهتزاز الإلكتروني وهو يعمل هنا كمجهر لقياس الأزمنة القصيرة فيرسم على شاشة مفلورة منحن يبين تغير التيار الكهربائي (أو تغير فرق الكمون) بتغير الزمان. فإذا وصل كاشف الاهتزاز إلى هزازين إلكترونيين الواحد تلو الآخر بحيث يرسم في البدء منحنى تيار الهزاز الأول ثم منحنى الهزاز الثاني فإنه من الممكن حينئذ تحديد عدد دورات الهزاز الأسرع التي يحويها دور الهزاز الأبطأ، الشكل.11.



الشكل.11

وقد أمكن على هذا الشكل صنع هزازات دورها يساوي 10^{-12} ثانية كما أمكن بعد اختراع الليزر (مضخم الضوء) صنع هزازات دورها أقل من ذلك ولم يتمكن بعد من معايرتها بالمقارنة في كاشف الاهتزاز الإلكتروني.

سنرى في دراسة ميكانيك الكم أن أكثر الظواهر انتظاماً هي اهتزازات الذرات ولذلك فإن الساعات الذرية الموجودة في بعض المراصد والمخابر الهامة هي أكثر الساعات دقة على الإطلاق.

وقد بُدأ منذ العام 2007 استخدام نوع جديد من ضوء الليزر يدعى مشط التردد الضوئي لتخطي الساعات الذرية المبنية على السيزيوم، والتي بقيت لعقود عدة أفضل النظم المتاحة، حيث تُعرف الثانية على أنها مدة 9162631770 دورة الإشعاع بين مستويي طاقة لهذه الذرة، الإشعاع الذي يُصدره أحد إلكتروناتها.

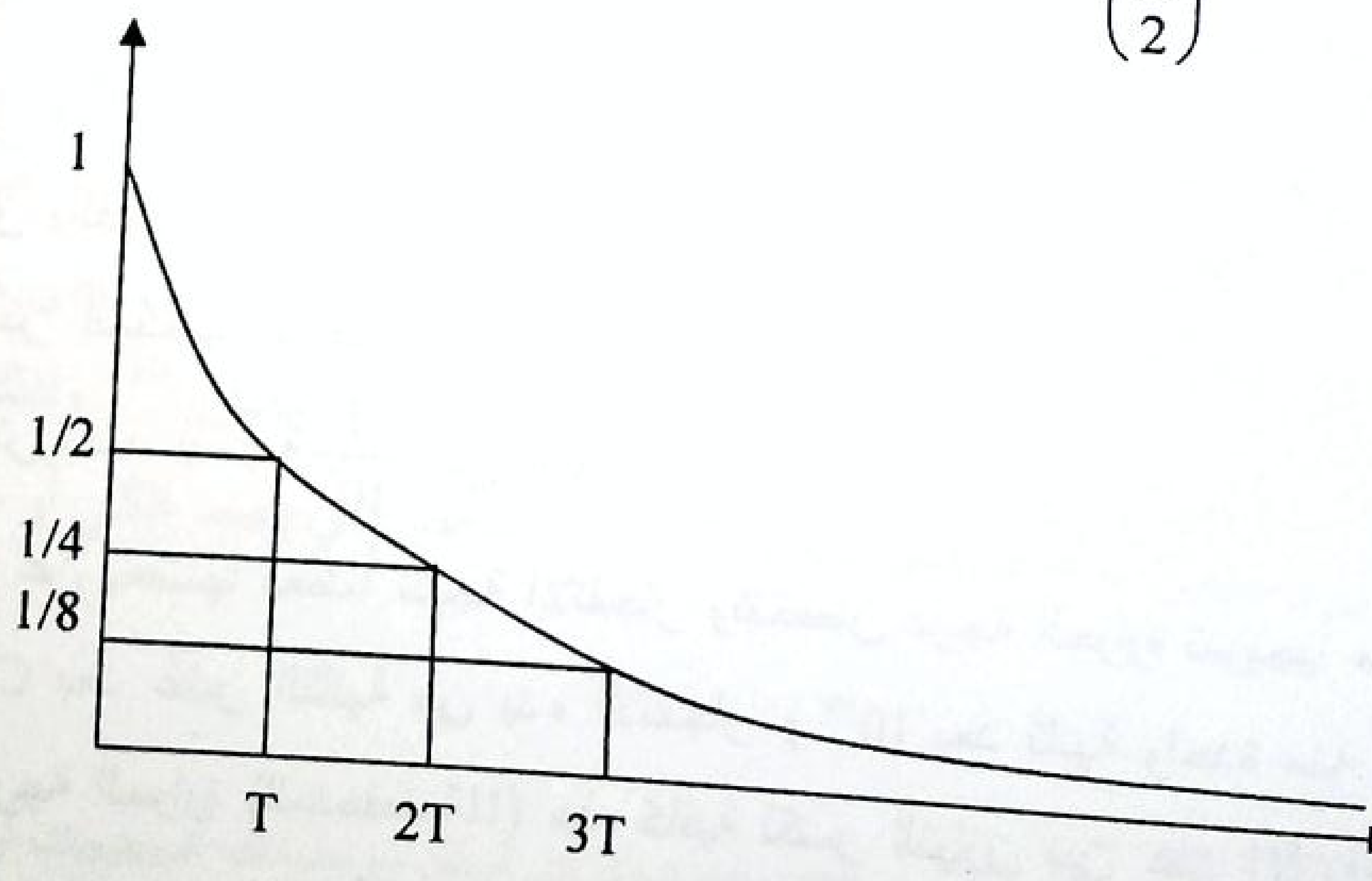
إن أقصر فترة زمنية مقيسة حتى الآن – 2004– هي المدة التي استغرقتها مسيرة إلكترونات محرضة بين وضعين بواسطة الليزر. إنها بحدود 10^{-18} ثانية.

إن قياس الأزمنة القصيرة مرتبط ارتباطاً وثيقاً بنظرية الجسيمات الأولية. إن سرع هذه الجسيمات معروفة وقريبة من سرعة الضوء $3\cdot10^{8}$ م/ثا. فإذا قيس الأثر الذي تتركه إحدى هذه الجسيمات على لوحة فوتوغرافية (الميزون π^0) قبل أن تتفكك أمكن تعيين عمرها : طول الأثر $\simeq 10^{-7}$م والعمر 10^{-16}ثا. إن بعض الجسيمات التي لم نشر إليها في بدء هذه الفقرة، جسيمات الإرنان تحيى مدة قصيرة جداً $\simeq 10^{-24}$ثا وهو بحدود الزمن الذي يستغرقه الضوء (وسرعته هي أكبر سرعة إطلاقاً) لاجتياز أقصر مسافة ممكنة (قطر البروتون) 10^{-15}م.

ولابد هنا من التساؤل عما إذا كانت هناك أزمنة أقصر من هذا الحد وهل لهذه الأزمنة معنى ؟

هذا فيما يخص الأزمنة القصيرة. أما الأزمنة الطويلة فتقاس بالاعتماد على نوع جديد من الظواهر المنتظمة وهي النشاطات الإشعاعية. إن النشاط الإشعاعي لعينة من مادة مشعة ما يتناقص على شكل أسي مع الزمن. الشكل.12 (نسمي عمر المادة المدة اللازمة (وتعد بالأيام هنا) لاختفاء نصف النشاط الاشعاعي، (نصف المادة المشعة) ونرمز لهذه المدة بـ T، إنها مدة بقاء نصف النشاط الإشعاعي. وهكذا فإن نسبة ما يبقى من المادة المشعة بعد مرور زمن قدره t هو $\frac{1}{2}$ مرفوعاً إلى عدد المرات التي تحتوي فيها t على T :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$



الشكل.12

فإذا عرفنا أن عينة ما، ولتكن قطعة خشب مثلاً كانت تحوي عندما تكونت الكمية المشعة A وأنها تحوي الآن بعد زمن قدره t الكمية المشعة B فإن عمر قطعة الخشب t، بفرض معرفة عمر المادة المشعة T تعطيه العلاقة

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = \frac{B}{A} \qquad (3.6)$$

إن عمر أحد نظائر الأورانيوم هو 10^{19} سنة ويتحول الأورانيوم عندما يتفكك نتيجة نشاطه الإشعاعي إلى رصاص. إن معرفة نسبة الرصاص إلى الأورانيوم في صخرة ما يعين لنا عمر الصخرة حسب العلاقة (3.6). يتم تقدير عمر الأرض بأخذ قيمة وسطية لأعمار الصخور : وجد أن هذا العمر هو $5,5 \cdot 10^9$ سنة ويتم انطلاقاً من هذا التقدير تقدير عمر الكون 10^{18} ثانية.

6.3- أصل الكون :

إن كل ما نعرفه في الفيزياء اليوم يتفق مع الفرضية التالية عن أصل الكون، المعروفة باسم المنوال المعياري : وقع انفجار هائل في كل الفضاء وفي آن واحد في درجة حرارة شديدة الارتفاع (الانفجار الكبير Big Bang) وقد كانت درجة الحرارة بعد $\frac{1}{100}$ من الثانية من بدء الانفجار بحدود 10^{11} درجة سيليوس (C°). لا يمكن أن تتكون أي ذرة ولا حتى أي نواة في درجة حرارة على هذا القدر من الارتفاع. لم يكن هناك إلا جسيمات أولية، الإلكترونات ومضاداتها البوزيترونات، e^- و e^+ بنفس العدد تقريباً، وكذلك الليبتونات الأخرى μ و τ والليبتونات المضادة، والكواركات q والكواركات المضادة $\bar{q}$ والنوترينوات بأنواعها المختلفة. وكان هناك بنفس العدد تقريباً الفوتونات – كان الكون مليئاً بالنور – وكانت هذه الجسيمات تخلق انطلاقاً من الطاقة البحتة وتفنى بعد عمر قصير ($e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$ مثلاً) وقد كان هذا التوازن بين الخلق والفناء هو الذي يحدد أعدادها الوسطية. وكانت الكثافة مرتفعة ارتفاعاً هائلاً : 4.10^9 غراماً في السنتمتر المكعب الواحد، أي أربعة مليارات مرة كثافة الماء. وكان هناك عدد ضئيل من البروتونات والنوترونات بنسبة $\frac{1}{10^9}$ إلى أعداد الجسيمات الأخرى (الليبتونات والفوتونات). كانت الجسيمات تتباعد عن بعضها بعضاً نتيجة الانفجار وتنخفض درجة الحرارة تدريجياً مع استمرار التباعد، إذ بلغت 3.10^{10} C° بعد عُشر الثانية من بدء الانفجار و 10^{10} بعد ثانية واحدة منه و 3.10^9 بعد أربعة عشر ثانية. إن درجة الحرارة (المنخفضة!!) هذه كافية لكسر التوازن بين عدد الأزواج(e^-و e^+) المكونة والمعدومة فقد أصبح عدد هذه الأخيرة أكبر نتيجة الفناء التالي : $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \upsilon$ وهكذا بدأ عدد الأزواج المكونة يأخذ بالتناقص. أما الطاقة الناتجة عن الفناء فقد كانت تخفف من سرعة انخفاض درجة

حرارة الكون. وهكذا فلم تنخفض درجة الحرارة بعد الدقائق الثلاث الأولى من بدء الانفجار إلا إلى 10^9 درجة. وهي درجة حرارة تسمح بتكوين النويات الخفيفة (وهذا يعني طبعاً أننا بحاجة إلى طاقة تكافئ هذا المقدار لشطر هذه النويات). وهكذا تكونت نويات الهليوم وأصبح الكون مؤلفاً من نويات الهليوم بسنبة 27% والبروتونات، نويات الهدروجين، بنسبة 73% وبعض الإلكترونات التي بقيت، التي نجت بعد فناء الإلكترونات والبوزيترونات. وتابعت الجسيمات تشتتها ودرجة الحرارة والكثافة انخفاضهما وبعد بضعة آلاف من السنين أصبح ممكناً أسر الإلكترونات من قبل النويات لتكوين ذرات الهدروجين والهليوم (يجب أن تنخفض درجة الحرارة إلى 10^5 C° لتكوين ذرة الهدروجين) وبدأ الغاز الناتج يتكثف تحت تأثير الجاذبية في بعض الأماكن وتتجمع كتل الغاز على بعضها وتتراكم لتكوين النجوم والمجرات الموجودة في كوننا الحالي. تتباعد المجرات عن بعضها بعضاً، وكلما بعدت عن بعضها أصبحت سرعة تباعدها أكبر، وهذا قانون محقق. وقد أمكن تقدير أبعاد الكون – المسافة التي تفصل مركز مجرتنا عن أبعد مجرة عنها – بـ 10^{26} متراً. أما عمر الكون فهو بحدود 10^{18} ثانية، وهو الزمن الفاصل بين بدء الانفجار الكبير والوقت الحاضر. ولكن ماذا جرى قبل نقطة البدء هذه وكيف كانت حالة الكون ؟ إن كل ما يستطيع الفيزيائي قوله هو أنه لا يستطيع إيجاد أي علاقة سببية تربط الظواهر ببعضها وتتنبأ بالتالي بتتابعها، على غرار ما يفعله انطلاقاً من نقطة البدء : تباعد الجسيمات، تفاعلها وفناؤها، انخفاض درجة الحرارة، وتكون المادة من مكوناتها الأساسية، وأخيراً وجود إشعاعات تقابل درجة حرارة منخفضة جداً 2,3 k° (درجة الحرارة المطلقة المقيسة انطلاقاً من الصفر المطلق 273- C°) تتلقاها الأرض بانتظام، الخ. حسناً ولكن ماذا عن مستقبل الكون ؟ هل سيتابع الكون تمدده وتتابع درجة الحرارة انخفاضها ؟ وهل ستتوقف نتيجة ذلك الانفجارات النووية في قلب النجوم وبالتالي، فيما يخص الأرض، هل سيتوقف وصول النور والحرارة (الطاقة) وبالتالي مصدر الحياة من الشمس ؟ هل سيعم الظلام والبرد كل الكون ؟ ومتى ؟ أو أن الكون سيعود بعد زمن ما (خمسين مليار سنة إضافية) على عكس ما فعل منذ 10^{18} ثانية $\simeq 3{,}17\cdot10^{10}$ سنة إلى التقلص والتكاثف وتعود درجة الحرارة إلى الارتفاع حتى تصل إلى الشروط التي سمحت بوقوع الانفجار الأول، وهكذا دواليك بشكل دوري ؟! ولكن هناك مآخذ وعيوباً نظرية عديدة مازالت تعترض هذا المنوال (منوال الكون)، ولذا لا تستطيع الكوسمولوجيا في حالتها الراهنة إعطاء أي جواب على هذه الأسئلة.

تتفق كل الأرصاد الفلكية وكل فيزياء الجسيمات الأولية مع المنوال المعياري[10] ولذلك فإنه مقبول من عامة الفيزيائيين الآن وستبقى هذه الفرضية قائمة مادامت لا تناقض أي رصد فلكي أو تجربة فيزيائية.

---

[10] من النتائج المترتبة على المنوال المعياري بقاء عدد من الإلكترونات الحرة، التي لم تفن مع مضاداتها البوزيترونات أو لم تؤسر من قبل النويات لتكوين الذرات؛ والكواركات، فيرميونات كالإلكترونات، فنى بعضها مع مضاداتها وكونت أخرى الهدرونات : الميزونات ($q\bar{q}$) والباريونات (qqq) ولابد من بقاء كواركات حرة في الكون : حسب زيلدوفيتش Zeldowich عددها ووجد أنه يساوي لعدد ذرات الذهب ولكن لم تكتشف أحد هذه الكواركات الحرة ويمكن تفسير ذلك انطلاقاً من الحرية "المقاربة".

والخلاصة أننا نعيش ونتعامل ونفكر ونحاول فهم كون يعود أصله إلى ثلاثين مليار سنة؛ هناك إذاً نقطة بداية لقياس الزمن[11] ونعرف قياس أطوال تمتد من 10^{-15} متراً إلى 10^{26} متراً وأزمان (عمر، دوام حدث ما) من 10^{-24} ثانية إلى 10^{18} ثانية.

ومهمة هذا الكتاب هي كشف الغطاء شيئاً فشيئاً عن أهم ما يجري في الطبيعة من حادثات، بربطها بعلاقة سببية ببعضها بعضاً، وقياسها عددياً بدقة متزايدة، منشؤها التعمق في الفهم العلمي والتقدم التقاني الناتج عنه. ونعتقد أننا نكون قد وفينا بالغرض إذا استطاع القارئ بعد دراسة الكتاب العودة إلى هذا الفصل المدخل فقرأه من جديد ووجد أنه يستطيع فيزيائياً، أي كمياً ورياضياً، فهم ما جاء فيه.

[11] صفر مطلق للزمن فلا معنى للكلام عن زمن قبله.

الفصل الثاني

المتجهات والحركة

1. الفضاء المتجهي التآلفي 33
2. العمليات على المتجهات 45
3. المتجهات المشتقة والحركة 61

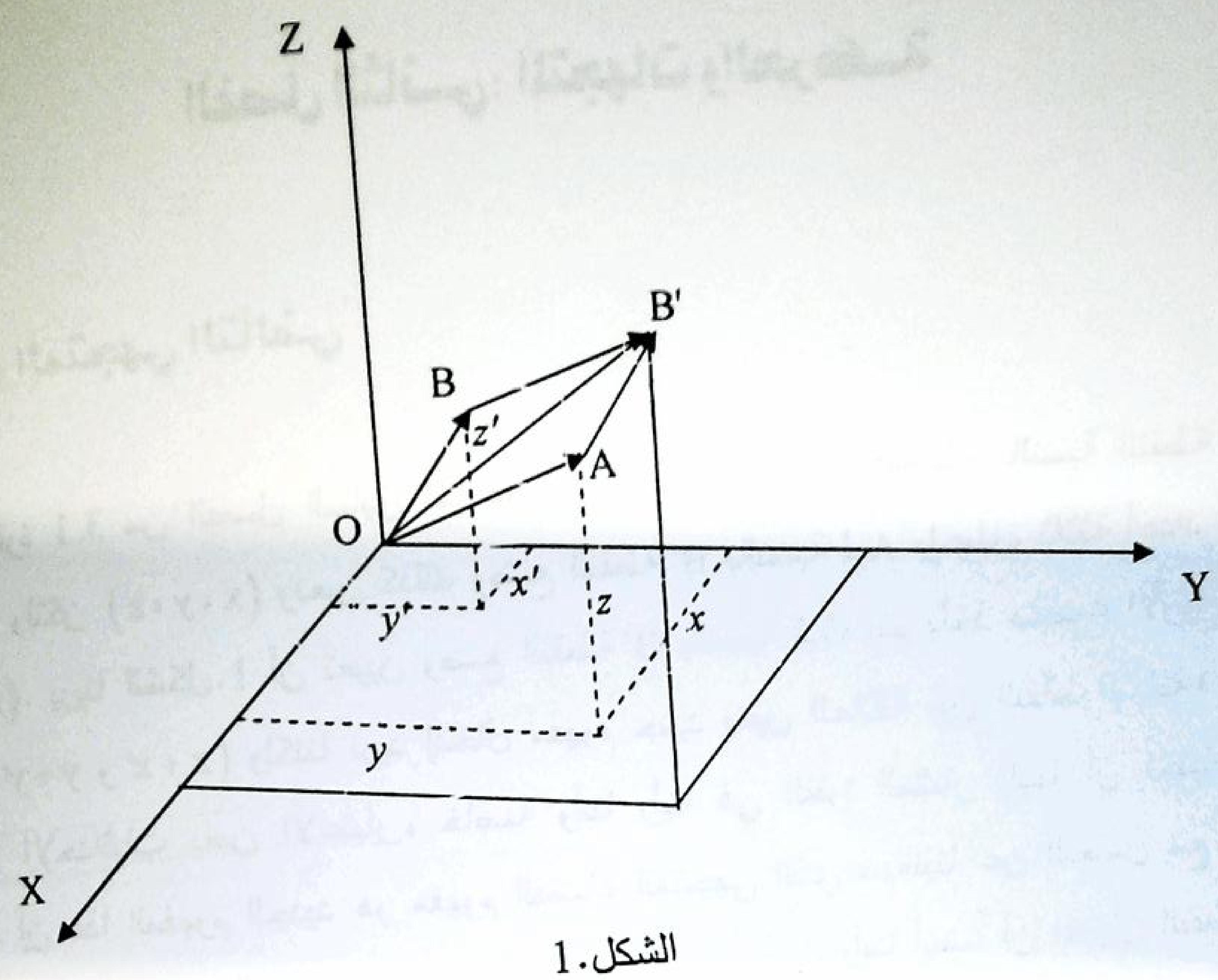
الفصل الثاني: المتجهات والحركة

1. الفضاء المتجهي التآلفي

رأينا في الفقرة 3.1 من الفصل السابق أننا نعين وضع نقطة A في الفضاء بالنسبة للنقطة O بتعيين ثلاثة أعداد ولتكن (x, y, z) ونعين كذلك وضع النقطة 'B بالنسبة لـ A بإعطاء ثلاثة أعداد أخرى هي (x', y', z'). يرينا الشكل.1 أن تعيين وضع النقطة 'B بالنسبة لـ O يتم بأخذ مجموع الأزواج بالترتيب $x+x'$ و $y+y'$ و $z+z'$) ولكننا نريد إدخال مفهوم جديد يعين العلاقة بين النقاط الثلاثة O ، A و 'B بدون أخذ الإحداثيات بعين الاعتبار، خاصة وأننا رأينا في الفقرة المشار إليها أن اختيار المحاور اعتباطي. إن هذا المفهوم الجديد هو مفهوم الفضاء المتجهي الذي سيغنينا عن التعامل مع الإحداثيات وسيسمح لنا بالتعبير عن العلاقات الفيزيائية بشكل بسيط وبإيجاز. رأينا أيضاً أن اختيار النقطة O نفسها اعتباطي ولذا فمن الواجب إدخال مفهوم يعين العلاقات بين نقط الفضاء A و 'B مثلاً دون أن تكون للنقطة O التي أخذناها كمبدأ أي ميزة، هذا ما سيسمح لنا بتعريف المتجهات الطليقة وسيبين لنا أن الفضاء هو فضاء تآلفي.

1.1- الفضاء المتجهي :

لتكن (x, y, z) الإحداثيات الديكارتية للنقطة A ، أي مساقطها العمودية على ثلاثة محاور متعامدة OX ، OY ، OZ ؛ يمكن تعيين وضع نقطة B بثلاثة أعداد أخرى (x', y', z'). إن النقطة التي تعينها الإحداثيات $(x+x'$ و $y+y'$ و $z+z')$ هي حسب مبرهنات الهندسة الابتدائية النقطة 'B التي نحصل عليها برسمنا انطلاقاً من النقطة A المستقيم الموازي والمساوي لـ OB الشكل . 1 وهكذا نعين النقطة 'B، على غرار A و B بالمستقيم الواصل بينها وبين المبدأ O.



الشكل 1.

ونكون على هذا الشكل قد طابقنا أولاً بين النقاط A ، B ، B' والمستقيمات الواصلة بين النقطة O وبينها نسمي هذه المستقيمات متجهات $\overline{OA}$ ، $\overline{OB}$ ، $\overline{OB'}$ ومن جهة ثانية قد عرفنا جمع المتجهات بكتابتنا

$$\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OB'} \qquad (1.1)$$

حيث $\overline{OB'}$ قطر متوازي الأضلاع المقام على $\overline{OA}$ و $\overline{OB}$. إن العلاقة (1.1) ليست سوى تعبيراً مختصراً لـ

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x+x', y+y', z+z') \qquad (1.1)'$$

حيث جمعنا بالترتيب الإحداثيات الأولى إلى بعضها والثانية إلى بعضها والثالثة إلى بعضها. فمن الممكن جمع المتجهة $\overline{OB'}$ إلى متجهة جديدة $\overline{OC}$ ذات الإحداثيات (x'', y'', z'') والحصول حسب قاعدة متوازي الإضلاع على المتجهة الجديدة $\overline{OD}$

$$\overline{OC} + \overline{OB'} = \overline{OD}$$

وبتبديل $\overline{OB'}$ بقيمتها في (1.1)

$$\overline{OC} + (\overline{OA} + \overline{OB}) = \overline{OD} \qquad (1.2)$$

التي نكتبها حسب '(1.1) :

$$(x'', y'', z'') + (x+x', y+y', z+z') = (x'' + (x+x'), y'' + (y+y'), z'' + (z+z')) \qquad (1.2)'$$

ولما كان جمع الأعداد تجميعياً فإن العلاقة '(1.2) تكتب

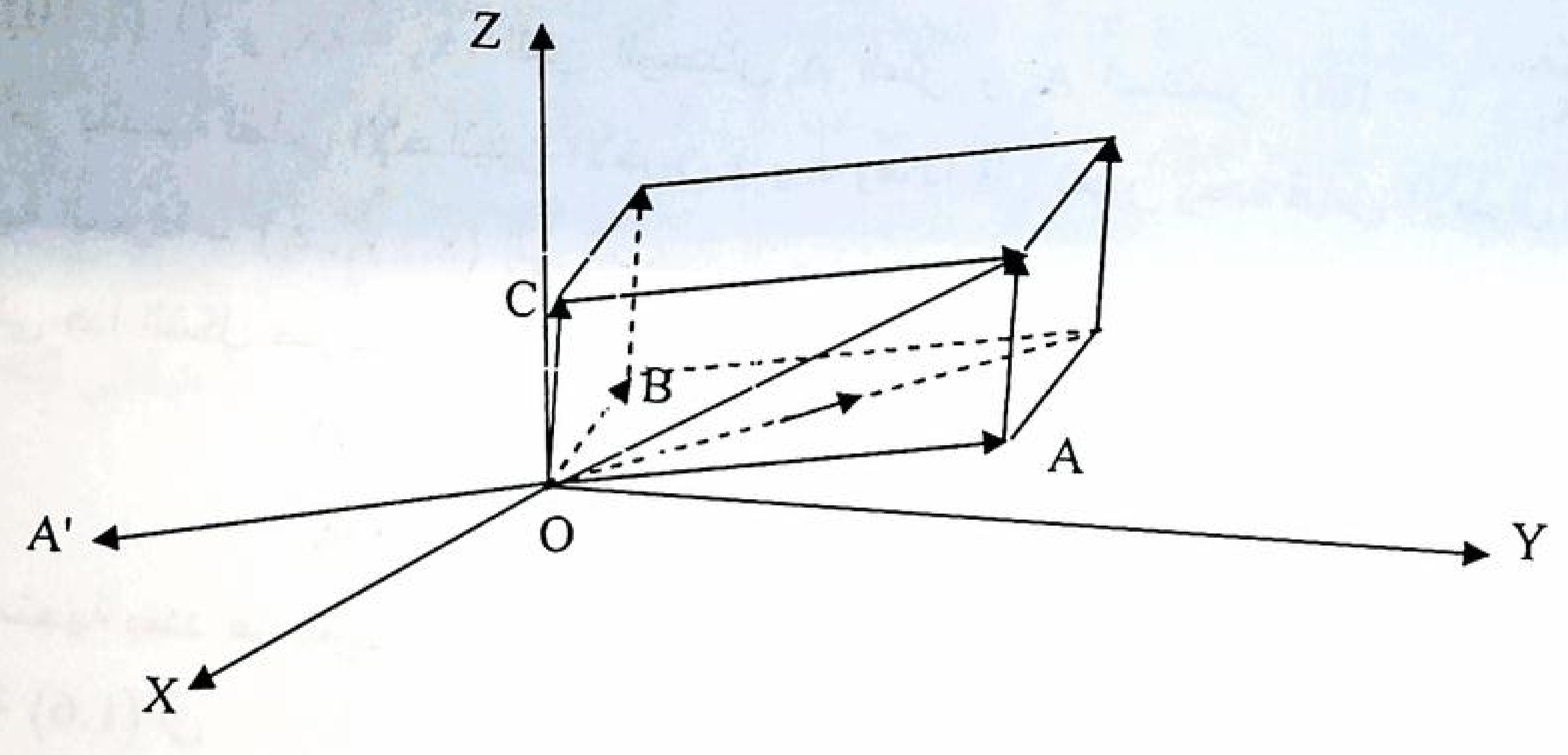
$$(x'', y'', z'') + (x+x', y+y', z+z') = ((x''+x) + x', (y''+y) + y', (z''+z) + z')$$

إن الطرف الثاني في هذه العلاقة هو $\overline{OB} + \left(\overline{OC} + \overline{OA}\right)$ بينما الطرف الأول هو دوماً الطرف الأيسر من (1.2) لدينا إذاً

$$\overline{OC} + \left(\overline{OA} + \overline{OB}\right) = \left(\overline{OC} + \overline{OA}\right) + \overline{OB} \qquad (1.3)$$

إن تطبيق قاعدة متوازي الأضلاع على المجموع $\overline{OA} + \overline{OB}$ ثم جمع المتجهة $\overline{OB'}$ إلى $\overline{OC}$ بتطبيق نفس القاعدة على متوازي الأضلاع الجديد الذي ضلعاه هما قطر متوازي الأضلاع الأول $\overline{OB'}$ و $\overline{OC}$ يعطي نفس المجموع الذي يعطيه جمع $\overline{OC'} = \overline{OC} + \overline{OA}$ ثم جمع هذا الضلع إلى $\overline{OB}$، الشكل.2. يمكننا تعميم العلاقة التجميعية (1.3) لجمع أي عدد من المتجهات. نعرف النقطة O بقولنا إنها المتجهة صفر أي المتجهة التي احداثياتها $(0, 0, 0)$ ونكتب هذه المتجهة على الشكل $\overline{O}$ إن

$$\overline{OA} + \overline{O} = \overline{O} + \overline{OA} = \overline{OA}$$



الشكل.2

نسمي نظير المتجهة $\overline{OA}$ المتجهة $\overline{OA'}$ التي فالمتجهة $\overline{O}$ هي العنصر الحيادي في جمع المتجهات. إحداثياتها هي $(-x, -y, -z)$ فالنقطة A' نظيرة النقطة A بالنسبة للنقطة O ونكتب حسب (1.1)'

$$(x, y, z) + (-x, -y, -z) = (0, 0, 0)$$

وحسب (1.1)

$$\overline{OA} + \overline{OA'} = \overline{O} \qquad (1.4)$$

وهكذا نرى أن قانون جمع المتجهات هو قانون تجميعي، ذو عنصر حيادي، وأن لكل متجهة نظيراً؛ نرمز لنظير المتجهة $\overline{OA}$ بـ $-\overline{OA}$:

$$\overline{OA'} = -\overline{OA}$$

$$\overline{OA} + (-\overline{OA}) = \overline{O}$$

وهكذا فإن مجموعة نقاط الفضاء، التي طابقناها مع مجموعة المتجهات، وقانون جمع المتجهات تشكل تعريفاً زمرة (قانون تركيب تجميعي، وعنصر حيادي بالنسبة لهذا القانون، ونظير لكل نقطة من المجموعة) ومن جهة ثانية فإن هذه الزمرة تبادلية، آبلية، لأن جمع الأعداد تبادلي لدينا من (1.1) و'(1.1)

$$\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OB} + \overline{OA} \qquad (1.5)$$

ونرى ذلك مباشرة من التمثيل الهندسي؛ إن المجموع هو أخذ قطر متوازي الأضلاع برسم المستقيم الموازي والمساوي لـ OB انطلاقاً من A أو أخذه برسم المستقيم المساوي لـ OA انطلاقاً من B.

ومن جهة أخرى فإنه من الممكن كما رأينا في الفصل السابق تغيير وحدات قياس الأطوال (على المحاور الثلاثة في آن واحد) فإذا كانت نسبة الوحدتين $\lambda = \frac{A_1}{A_2}$ فإن نسبة القياسين – نفس الطول– $\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\lambda}$ حسب ('(1.10).1) و $x_2 = \lambda x_1$؛ لتكن الوحدتان A_1 المتر و A_2 السنتمتر $\lambda = 100$ و $x_2 = 100\, x_1$؛ وكذلك الأمر بالنسبة لقياس الإحداثيتين الآخرين y و z وهكذا فإن تغيير وحدة قياس الأطوال تجعلنا ننتقل من المتجهة المعرفة بـ (x_1, y_1, z_1) إلى المتجهة المعرفة بـ $(x_2, y_2, z_2) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$.

ونعرف على هذا الشكل ضرب المتجهة بعدد

$$\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \qquad (1.6)$$

$$\lambda\, \overline{OA} = \overline{OA'} \qquad (1.6)'$$

إن ضرب متجهة بعدد هو تعريفاً تحاك نسبته λ.

تبين العلاقة (1.6) أن

$$\lambda\, (\mu\, \overline{OA}) = (\lambda\mu)\, \overline{OA} \qquad (1.7)$$

كما أن (1.6) و'(1.1) تبينان أن

$(\lambda + \mu)\, \overline{OA}$ هي المتجهة :

$$((\lambda + \mu)x, (\lambda + \mu)y, (\lambda + \mu)z) = (\lambda x + \mu x, \lambda y + \mu y, \lambda z + \mu z)$$

أي

$$(\lambda + \mu)\, \overline{OA} = \lambda\overline{OA} + \mu\overline{OA} \qquad (1.8)$$

وكذلك

$$\lambda(\overline{OA} + \overline{OB}) = \lambda\overline{OA} + \lambda\overline{OB} \qquad (1.9)$$

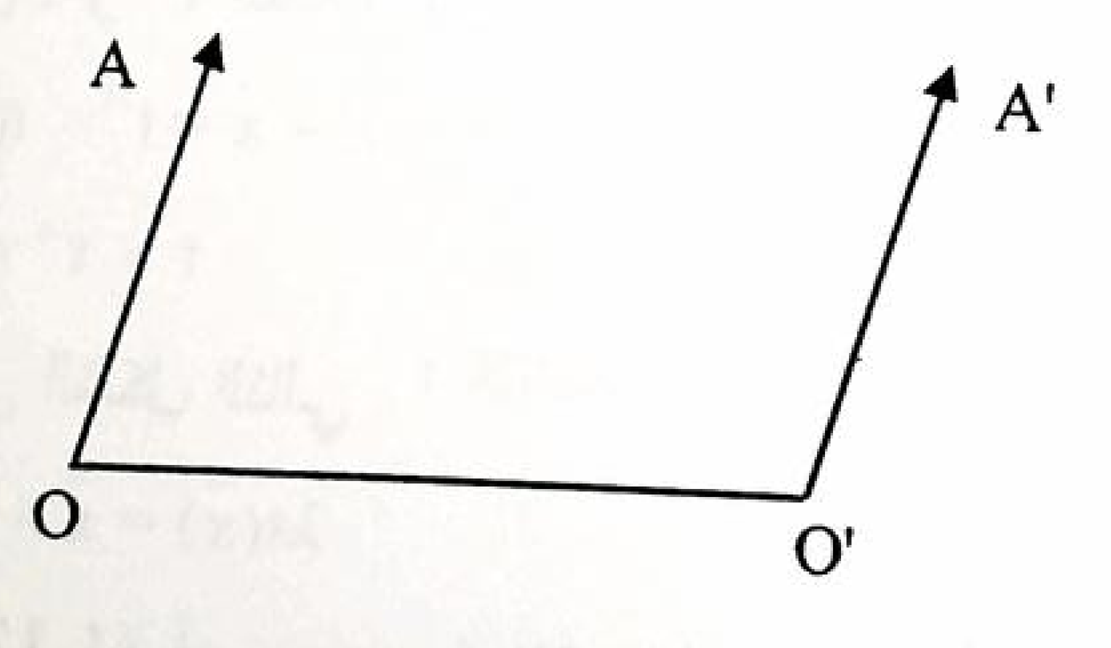
تعريف 1 :

لنذكر أننا نسمي فضاءً متجهياً مجموعة غير خالية E زودناها بقانون تركيب داخلي يجعل منها زمرة تبادلية، وقانون تركيب خارجي على حقل تبادلي (حقل الأعداد الحقيقية R هنا) تحقق الشروط (1.7) إلى (1.9). وهكذا فإننا نرى أن فضاء الفيزياء التقليدية هو فضاء متجهي ونرمز له بـ$\vec{E}$. أبعاد هذا الفضاء ثلاثة ذلك أن الأحداثيات الثلاث تعرف تماماً المتجهة، أو بشكل آخر، أن المتجهة $\overrightarrow{OA}$ تكتب بدليل متجهات نسميها متجهات القاعدة $\overrightarrow{Oe_3}$ ، $\overrightarrow{Oe_2}$ ، $\overrightarrow{Oe_1}$:

$$\overrightarrow{OA} = x\overrightarrow{Oe_1} + y\overrightarrow{Oe_2} + z\overrightarrow{Oe_3}$$

2.1– الفضاء التآلفي :

لقد رأينا في الفصل السابق (1.§3.3) أن الفضاء متجانس أي أنه منحفظ أمام الانسحابات، أمام اختيار نقطة المبدأ O. لنختر نقطة أخرى 'O كمبدأ : يمكننا أن نقابل كل نقطة A في E بنقطة أخرى 'A وذلك بأن نرسم انطلاقاً من 'O المتجهة $\overrightarrow{O'A'}$ المسايرة لـ $\overrightarrow{OA}$ [1] (موازية ومساوية في الطول كما فعلنا في جمع المتجهات حسب قاعدة متوازي الأضلاع)، الشكل.3، وهكذا نحصل على فضاء متماثل 'E مع الفضاء الأول، تماثلاً قانونياً. ونحن نريد الآن إنشاء فضاء لا يحتوي تعريفه أي اختيار اعتباطي لنقطة متميزة (النقطة O).



الشكل.3

لنذكر أن الانسحابات هي زمرة تبادلية بالنسبة لعملية التركيب الداخلية ∘. إن الانسحاب في الفضاء E ولنرمز له بـ t هو تطبيق تقابلي بين A و 'A بحيث تكون المتجهة $\overrightarrow{AA'}$ مسايرة للمتجهة $\overrightarrow{OO'}$، متجهة تغيير المبدأ، لدينا إذاً

$$t(A) = A' \qquad \text{بحيث يكون} \tag{1.10}$$

[1] إحداثيات النقطة 'A بالنسبة لنظمة المحاور المنبثقة من 'O تساوي لإحداثيات A بالنسبة لنظمة المحاور الموازية المنبثقة من O.

$$\overline{OA'} = \overline{OA} + \overline{OO'}$$

ولما كانت نقاط الفراغ متطابقة مع المتجهات التي منشؤها O فإن التطبيق t هو أيضاً تطبيق للفضاء المتجهي على نفسه. لنسم اختصاراً $\vec{a} = \overline{OO'}$ و $\vec{x} = \overline{OA}$ ولنكتب التطبيق t على الشكل : (1.10)'

$$t : \vec{x} \to \vec{x} + \vec{a} = t(\vec{x})$$

أي أن التطبيق t معرف بإضافة المتجهة $\vec{a}$ إلى أي متجهة $\vec{x}$. (1.10)"₁

والتطبيق s هو التطبيق المعرف بإضافة المتجهة $\vec{b}$ إلى متجهة $\vec{x}$

$$s : \vec{x} \to \vec{x} + \vec{b} = s(\vec{x})$$

حيث $\vec{b} = \overline{OO''}$ مثلاً و O" هو المبدأ الجديد. لدينا من $(1.10)''_1$ و $(1.10)''_2$ (1.10)"₂

$$s \circ t(x) = s(t(\vec{x})) = (\vec{x} + \vec{a}) + \vec{b}$$

ولما كان الجمع تجميعياً وتبادلياً في E فإن الطرف الثاني هو (1.11)

$$\vec{x} + \vec{a} + \vec{b} = (\vec{x} + \vec{b}) + \vec{a} = t(s(\vec{x}))$$

والانسحاب تبادلي في الفضاء المتجهي.

نعرف الانسحاب الحيادي بالمتجهة $\vec{O}$ ونرمز له بـ 0

$$0(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{O} = \vec{x}$$

ونعرف الانسحاب النظير لـ t بالعلاقة (1.10)"₃

$$t^{-1}(\vec{x}) = \vec{x} - \vec{a}$$

بحيث يكون تركيب الانسحابين t و t^{-1} انطلاقاً من $(1.10)'''$ و $(1.10)''_1$ على الشكل التالي (1.10)'''

$$t \circ t^{-1}(\vec{x}) = t(t^{-1}(\vec{x})) = (\vec{x} - \vec{a}) + \vec{a} = \vec{x} = t^{-1} \circ t(\vec{x}) \qquad (1.12)$$

أي أن

$$t \circ t^{-1} = 0$$

نعرف جداء انسحاب بعدد على الشكل التالي

$$\lambda t(\vec{x}) = \vec{x} + \lambda\vec{a} \qquad (1.13)$$

ترينا العلاقات (1.10) – (1.13) أن مجموعة الانسحابات ونرمز لها بـ T (المعرفة بـ (1.10) أو "(1.10) أي بانسحاب نقطة أو انسحاب متجهة) هي زمرة تبادلية، مصحوبة بعملية التركيب الخارجية (1.13) المحققة للشروط (1.7) – (1.9) فهي فضاء متجهي؛ سنرمز لعملية التركيب التبادلية ∘ بالرمز + وسنكتب تعريفاً

$$t + A = t(A) \quad ; \quad t \in T \quad \text{و} \quad A \in E \qquad (1.14)$$

وهكذا نحصل على تطبيق لـ T × E في E يتمتع بالصفات التالية

$$s + (t + A) = (s + t) + A \qquad (E\,A\,I)$$

وذلك من أجل أي انسحابين $s, t \in T$ وأي نقطة $A \in E$ ؛ هذه الصفة هي تعبير عن العلاقة (1.11)

$$0 + A = A \qquad (E\,A\,II)$$

حيث 0 هو الانسحاب الحيادي؛ هذه الصفة هي تعبير عن العلاقة $(1.10)''_3$

مهما تكن النقطتان A و A' ∋ E فإن هناك انسحاب وحيد : $t \in T$ بحيث يكون

$$t + A = A' \qquad \text{(E A III)}$$

وهي تعبير عن كون الانسحاب تطبيقاً تقابلياً.

ونكتب غالباً هذه العلاقة على الشكل

$$A' - A = t \qquad (1.14)'$$

أي أننا نعرف الانسحاب على أنه "الفرق" بين نقطتين.

<u>تعريف 2</u> :

نطلق اسم فضاء تآلفي مرتبط بفضاء متجهي T[2] على الكائن الرياضي المشكل من مجموعة E ومن تطبيق $T \times E \rightarrow E$ نرمز له بـ $t + A$: $(t, A) \rightarrow t + A$ يحقق الشروط (E A I) ← (E A III).

<u>قضية 1</u> :

لتكن A ، B ، C نقاطاً من المجموعة E. لدينا

$$(A - B) + (B - C) + (C - A) = 0 \qquad (1.15)$$

لنسم المتجهات التي تقابل هذه الفروق بالترتيب $T \ni t$، s، u. لدينا إذاً

$$A = B + t$$

$$B = C + s$$

$$C = A + u$$

لنبدل في العلاقة الثانية C بتعريفها حسب العلاقة الثالثة :

$$B = A + u + s$$

ولنبدل B بهذه القيمة في العلاقة الأولى

$$A = A + u + s + t$$

إذاً $u + s + t = 0$ حسب (E A II) حيث 0 هو العنصر الحيادي في T ولكن $u + s + t = t + s + u$، نظراً لتبادلية الجمع في T، والطرف الأيمن في هذه العلاقة هو تعريفاً الطرف الأيسر في (1.15) ومنه البرهان.

[2] ليس من الضروري أن يكون فضاء الانسحابات.

يمكننا أن نأخذ كفضاء متجهي T الفضاء المتجهي الفيزيائي الذي رمزنا له بـ $\bar{E}$ وكمجموعة E نقاط الفضاء الفيزيائي ونعرف الفضاء التآلفي المؤلف من نقاط الفضاء الفيزيائي E ومن التطبيق $\bar{E} \times E \rightarrow E$ والذي نرمز له

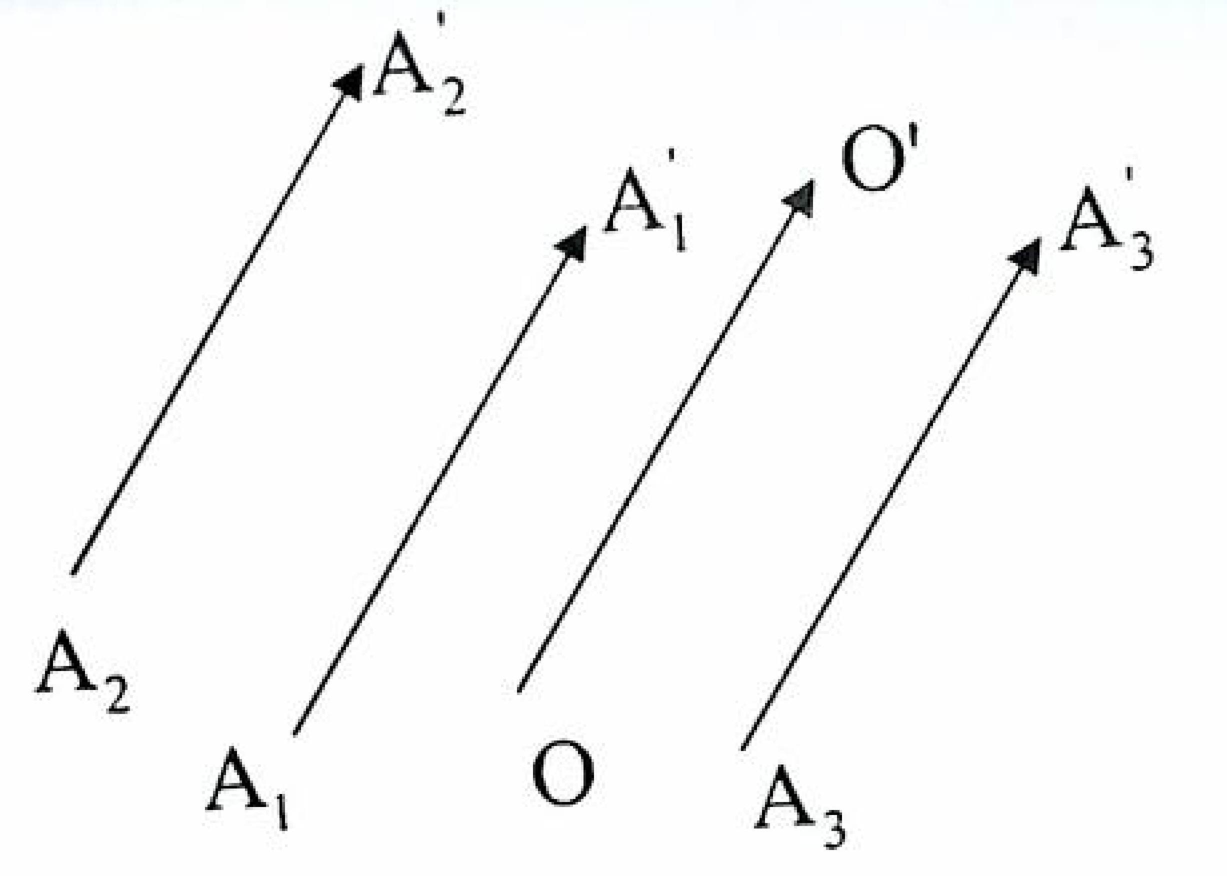
$$(\vec{a}, A) \rightarrow A + \vec{a}$$

حيث $\vec{a} \in \bar{E}$. (إن المتجهة $\vec{a}$ تعرف انسحاباً $\overline{OO'}$ وبالتالي ينطبق الفضاء $\bar{E}$ على فضاء الانسحابات). (1.16)

نكتب العلاقة '(1.14) على الشكل

$$\overline{AA'} = \overline{A' - A} = \vec{a} \qquad (1.14)''$$

ونسميها المتجهة التي مبدؤها A ونهايتها A'. وإذا ثبتنا المتجهة $\vec{a}$ فإننا نحصل من أجل النقط A_1، A_2، A_3 ... على مجموعة المتجهات الطليقة المتسايرة مع $\vec{a}$ (أي التي لها نفس الطول ونفس المنحى ونفس الاتجاه) مهما يكن مبدؤها، الشكل.4.



الشكل.4

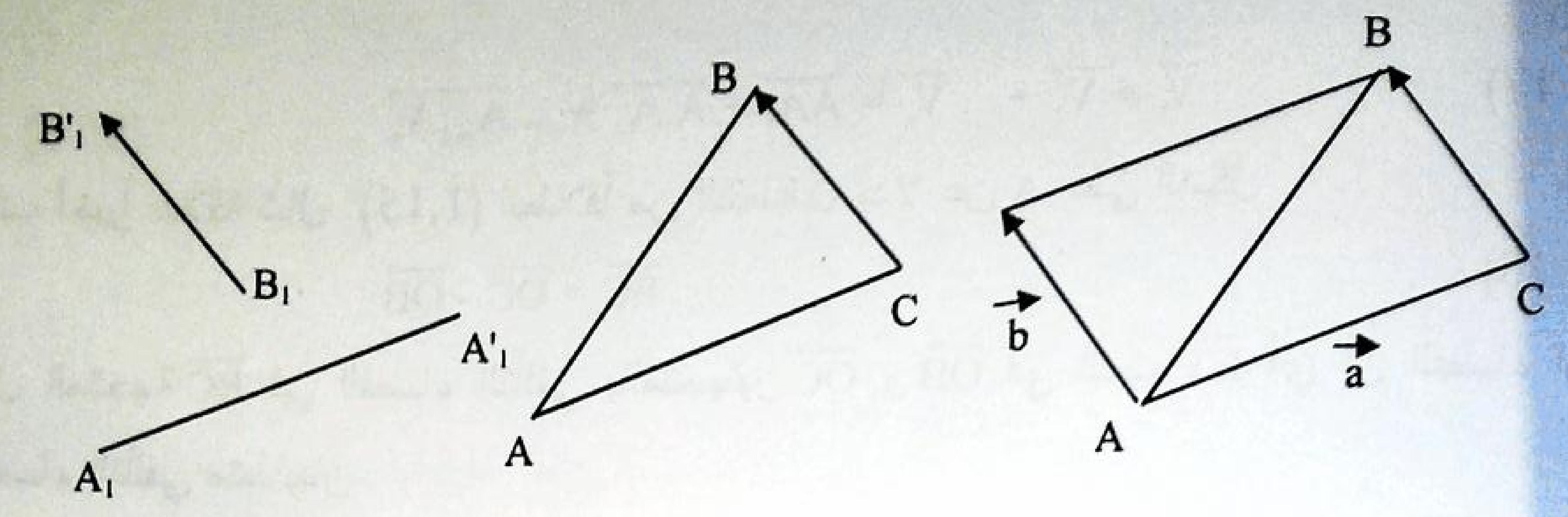
$$\overline{A_1A'_1} = \overline{A_2A'_2} = \overline{A_3A'_3} = \vec{a} \qquad (1.14)'''$$

نكتب العلاقة (1.15) على ضوء العلاقة "(1.14) على الشكل

$$\overline{BA} + \overline{CB} + \overline{AC} = \overline{AC} + \overline{CB} + \overline{BA} = \vec{0} \qquad (1.15)'$$

حيث $\vec{0}$ هو المتجهة صفر في $\bar{E}$.

تسمى العلاقة '(1.15) علاقة شال.



الشكل.5

يمكننا كتابة هذه العلاقة على الشكل

$$\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB} \qquad (1.15)"$$

لأن $\overline{AB} = -\overline{BA}$ حسب العلاقات (1.14) وهكذا نكون قد عرفنا مجموع متجهتين ينطبق مبدأ الثانية على نهاية الأولى بقولنا إنها المتجهة التي مبدؤها مبدأ الأولى ونهايتها نهاية الثانية، ولكن

$$\overline{AC} = \overline{A_1A_1'} = \ldots = \vec{a}$$

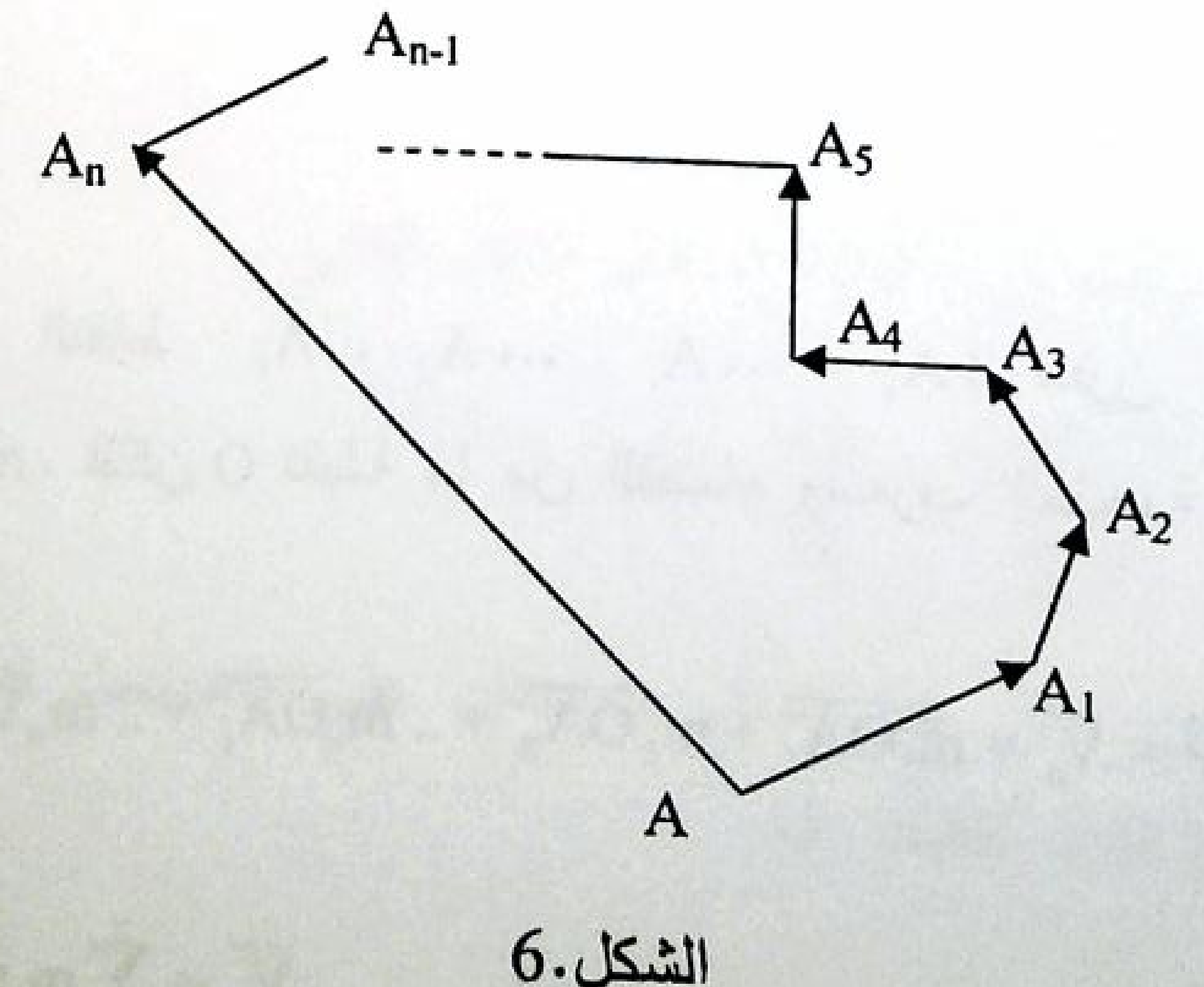
و

$$\overline{CB} = \overline{B_1B_1'} = \ldots = \vec{b}$$

و

$$\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{A_1A_1'} + \overline{B_1B_1'} = \vec{a} + \vec{b}$$

وهكذا نرى أن المتجهات الطليقة تُجمع كما تُجمع المتجهات $\vec{a}$ و $\vec{b}$ الخ في $\vec{E}$ أي حسب قاعدة متوازي الأضلاع، الشكل.5؛ إن مجموع عدد من المتجهات الطليقة ولنرمز لها من الآن فصاعداً بـ $\overline{V_1}$، $\overline{V_2} \ldots \overline{V_n}$ يكون باختيار نقطة ما A وأخذ متجهة مسايرة لـ $\overline{V_1}$، $\overline{AA_1}$ ثم من A_1 متجهة مسايرة لـ $\overline{V_2}$، $\overline{A_1A_2}$ وهكذا.. من A_{n-1} متجهة مسايرة لـ $\overline{V_n}$، $\overline{A_{n-1}A_1}$ مجموع هذه المتجهات هو أي متجهة طليقة $\overline{V}$ مسايرة لـ $\overline{AA_n}$، الشكل.6.



الشكل.6

$$\overline{V_1} + \overline{V_2} + \dots \overline{V_n} = \overline{AA_1} + \overline{A_1A_2} + \dots \overline{A_{n-1}A_n} \quad (1.17)$$

لنكتب أخيراً علاقة شال "(1.15) انطلاقاً من النقطة O بدلاً عن A على الشكل

$$\overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB} \quad (1.18)$$

نقابل المتجهة $\overline{BC}$ في الفضاء التآلفي بالمتجهتين $\overline{OC}$ و $\overline{OB}$ في الفضاء $\overline{E}$ أي أن الفضاء المتجهي والفضاء التآلفي متطابقان.

والخلاصة إذاً أننا نطابق الفضاء الفيزيائي مع متجهات مبدؤها O ونعرف المتجهات بين أي نقطتين في الفضاء كما نعرف المتجهات الطليقة، المتسايرة، دون تحديد نقطة المبدأ؛ نجمع المتجهات حسب قاعدة متوازي الأضلاع ونعمم ذلك إلى مجموع المتجهات الطليقة (1.17)؛ وإذا اخترنا النقطة O كمبدأ ونظمة محاور متعامدة، كنظمة مرجعية، فإن المتجهات تعرف بإعطاء ثلاثة أعداد حقيقية هي (x ، y ، z) إذا كان مبدأ المتجهة O و(x' - x و y' - y و z' - z) إذا كان مبدأ المتجهة النقطة B ذات الإحداثيات (x ، y ، z) ونهايتها النقطة C ذات الإحداثيات (x' ، y' ، z') وذلك حسب العلاقة (1.18). نكتب المتجهات على شكل عمود بثلاثة أسطر هي بالترتيب إحداثيات نهاية المتجهة

$$\overline{OB} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

ونسميها مركبات المتجهة. يمكننا كتابتها على شكل آخر بأن نأخذ ثلاث متجهات طول كل منها يساوي الواحد على المحاور الثلاثة $\overline{e_x}$ ، $\overline{e_y}$ ، $\overline{e_z}$ نسميها المتجهات الواحدية ونكتب $\overline{OB}$ على الشكل

$$\overline{OB} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \quad (1.19)'$$

كما نكتب $\overline{BC}$ حسب العلاقة (1.18) على الشكل

$$\overline{BC} = (x' - x)\vec{e}_x + (y' - y)\vec{e}_y + (z' - z)\vec{e}_z \quad (1.20)$$

3.1- مركز الكتلة :

لتكن لدينا جملة من النقاط A_1 ، A_2 ، ... ، A_i ، ... ، A_n ؛ لنقرن كل نقطة منها بعدد ما m_1 ، m_2 ، ... ، m_i ، ... ، m_n . لتكن O نقطة ما من الفضاء ولنعرف المتجهة $\overline{OP} = \overline{V_o}$ التي مبدؤها O على الشكل التالي

$$\overline{OP} = \overline{V_o} = m_1\overline{OA_1} + m_2\overline{OA_2} + \dots m_i\overline{OA_i} + \dots m_n\overline{OA_n} \quad (1.21)$$

ونكتب اختصاراً

$$\overline{V_o} = \sum_{i=1}^{n} m_i\overline{OA_i} \quad (1.21)$$

وإذا اخترنا نقطة أخرى 'O من الفضاء كمبدأ فسنعرف المتجهة $\overline{V_{o'}}$ بنفس الشكل

$$\overline{O'P'} = \overline{V_{o'}} = \sum_{i=1}^{m} m_i \overline{O'A_i} \qquad (1.22)$$

نكتب انطلاقاً من هاتين العلاقتين وعلاقة شال $\overline{O'O} + \overline{OA_i} = \overline{O'A_i}$

$$\overline{V_{o'}} = \sum_{i=1}^{n} m_i (\overline{O'O} + \overline{OA_i})$$

وباستعمال خواص المتجهات وضربها بعدد (تجميعية الجمع وتوزيعية الضرب بعدد)

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{O'O} + \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{OA_i}$$

$$\overline{V_{o'}} = \overline{O'O}(\sum_{i=1}^{n} m_i) + \vec{V}_o \qquad (1.23)$$

حيث وضعنا $\overline{O'O}$ خارج القوس لأنها مضروبة بكل من الأعداد m_i. ومن جهة أخرى فإن (1.23) تساوي

$$\overline{V_{o'}} = \overline{O'P'} = \overline{O'O} + \overline{OP'} = \overline{O'O}(\sum_{i=1}^{m} m_i) + \overline{OP} \qquad (1.23)'$$

أي أن

$$\overline{OP'} = \overline{O'O}\left[(\sum_{i=1}^{m} m_i) - 1\right] + \overline{OP} \qquad (1.23)''$$

والنقطتان P و 'P منطبقتان على بعضهما في حالة واحدة فقط وهي عندما يكون المجموع

$$m_1 + m_2 + ... + m_i + ... + m_n \quad -1$$

مساوياً للصفر

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \quad - 1 = 0$$

ونقول في ماعدا هذه الحالة ($P \neq P'$) إن بنية الفضاء المتجهي متوقفة على اختيار نقطة المبدأ O.

لنفرض الآن أن الأعداد m_i موجبة كلها، كتل الجسيمات الموجودة في النقاط A_i، فالمجموع $\sum m_i$ مختلف عن الصفر

$$M = \sum_{i=1}^{m} m_i > 0 \qquad (1.24)$$

ونسميه الكتلة الكلية. لنعرف بالتحاكي النقطة C على الشكل التالي

$$\overline{OC} = \frac{\overline{OP}}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{OA_i}}{\sum_i m_i} \qquad (1.25)$$

والنقطتان C و 'C المعرفتان على هذا الشكل منطبقتان على بعضهما: لدينا بالفعل من التعريف (1.25) والعلاقة '(1.23) أياً كانت النقطة 'O

$$\overline{O'C'} = \frac{\overline{O'P'}}{M} = \frac{\overline{O'O}}{M}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) + \frac{\overline{OP}}{M}$$
$$= \overline{O'O} + \overline{OC} = \overline{O'C} \quad (1.25)'$$

ملاحظة :

لنأخذ الكتلة الكلية كوحدة لقياس الكتل $M = 1$ تنطبق عندئذ النقطتان P و C وكذلك P' و C' ولما كانت $\sum m_i - 1 = M - 1 = 0$ فإن $P = C = P' = C'$.

تعريف 3 :

نسمي النقطة الوحيدة C المعرفة بـ (1.25) (أو بـ (1.21) عندما نأخذ مجموع الكتل مساوياً للواحد) والتي لا يتوقف تعيينها على اختيار المبدأ O مركز الكتلة. لنختر C نفسها كمبدأ فتصبح العلاقة (1.25) على الشكل

$$\overline{CC} = \bar{O} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{CA_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

أو

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{CA_i} = \bar{0} \quad (1.26)$$

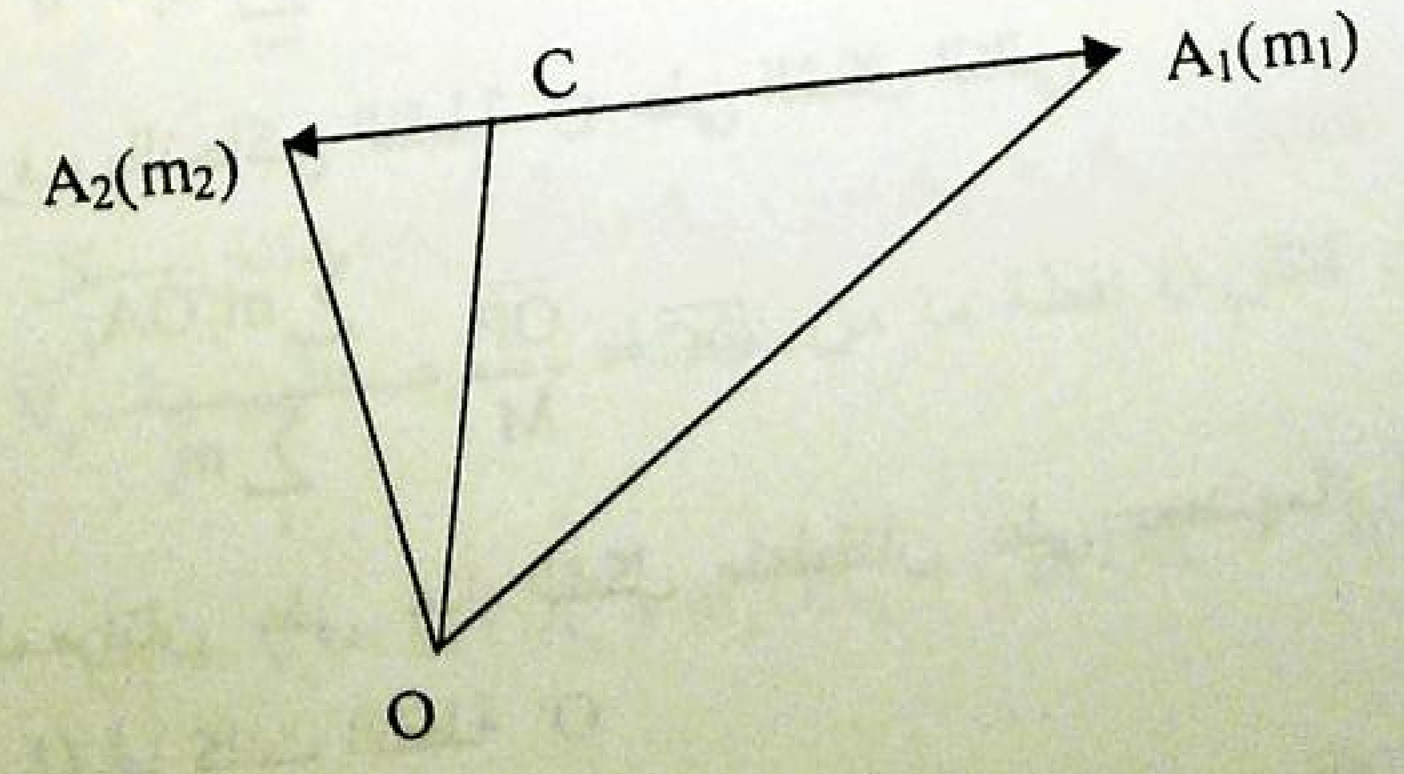
مثال :

1- مركز كتلة نقطتين $A_1\ (m_1)$ و $A_2\ (m_2)$ هو

$$m_1\overline{CA_1} + m_2\overline{CA_2} = \bar{0}$$

أو

$$\frac{\overline{CA_1}}{\overline{CA_2}} = -\frac{m_2}{m_1}$$



2- يمكننا تحديد مركز كتلة عدد أكبر من النقاط تدريجياً وذلك بحساب مركز كتلة نقطتين لا على التعيين ولنسمهما A_1 و A_2 ثم حساب مركز كتلة النقطة الناتجة (ذات الكتلة $m_1 + m_2$) و A_3 مثلاً وهكذا.. وذلك لأن الجمع تجميعي في العلاقة (1.25).

2. العمليات على المتجهات

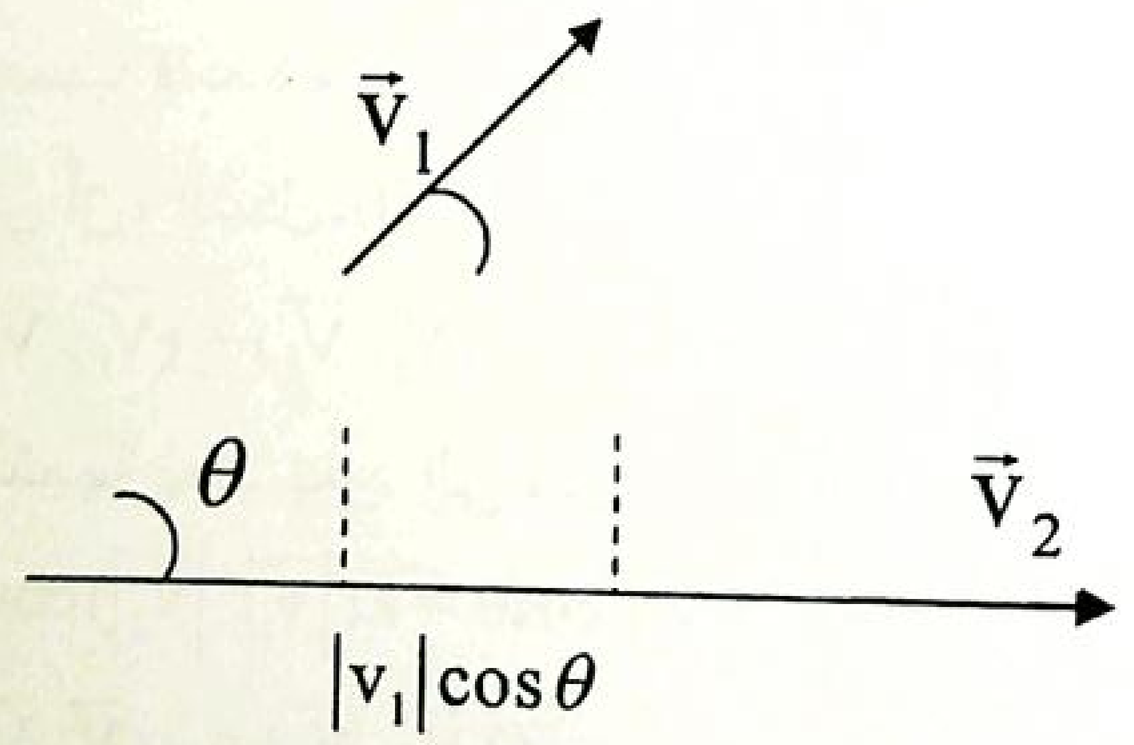
1.2- الجداء السلمي لمتجهتين :

نعرف الجداء السلمي لمتجهتين $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ بأنه العدد الذي يساوي لجداء العددين اللذين يقيسا طولي المتجهتين $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ بتجيب الزاوية بين حامليهما، الشكل.7. نسمي العدد الذي يقيس طول المتجهة[3] بطويلة المتجهة ونرمز له بـ $|\vec{V}|$ وهكذا نكتب

$$(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{V}_1|\,|\vec{V}_2| \cos\theta \qquad (2.1)$$

سنستعمل كلا الرمزين للجداء السلمي (,) أو . كما سنكتب $\cos\theta$ على الشكل

$$\cos\theta = \cos \vec{V}_1 \vec{V}_2$$



الشكل.7

إن

$$\cos \vec{V}_1 \vec{V}_2 = \cos \vec{V}_2 \vec{V}_1$$

لأن

$$\cos\theta = \cos\text{-}\theta$$

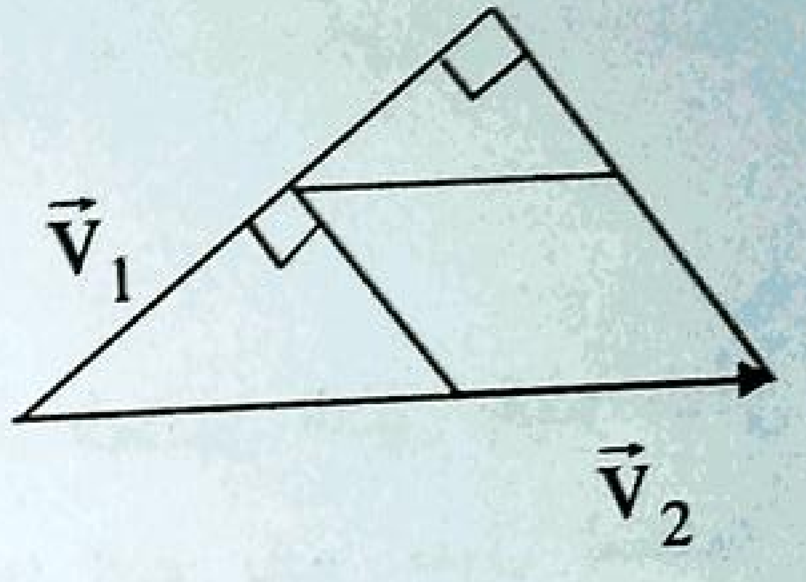
وهكذا نستنتج أن الجداء السلمي تبادلي.

$$(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = (\vec{V}_2, \vec{V}_1) \qquad (2.2)$$

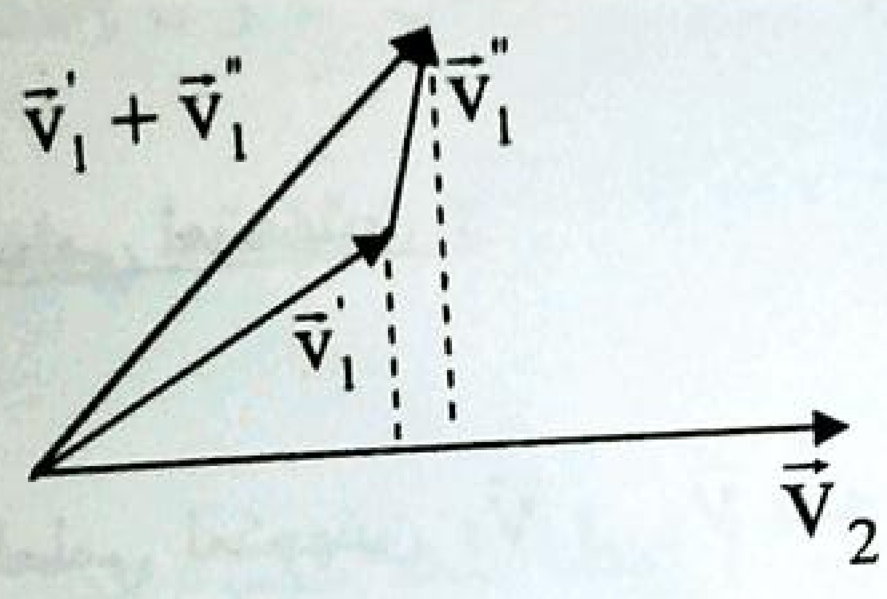
---

[3] هذا يعني أننا عرفنا واحدة الأطوال في الفضاء.

نرى من الشكل.7 أن $\left|\vec{V}_1\right| \cos\theta$ ليس سوى مسقط المتجهة $\vec{V}_1$ على حامل المتجهة $\vec{V}_2$ وكذلك $\vec{V}_2 \cos\theta$ هو مسقط المتجهة $\vec{V}_2$ على حامل $\vec{V}_1$، الشكل.8a (حيث أخذنا المتجهة المسايرة لـ $\vec{V}_1$ انطلاقاً من حامل المتجهة $\vec{V}_2$ تسهيلاً للرسم) وهكذا فإن الجداء السلمي هو جداء طويلة إحدى المتجهتين بمسقط الثانية عليها.



الشكل.8a



الشكل.8b

ولما كانت $\cos\theta = 0$ من أجل $\theta = \frac{k\pi}{2}$ حيث k عدد فردي فإن جداء المتجهات المتعامدة السلمي يساوي الصفر ونكتب

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0 \text{ إذا كان } \vec{V}_1 \perp \vec{V}_2 \text{ (نقرأ } \vec{V}_1 \text{ عمودياً على } \vec{V}_2\text{)} \quad (2.3)$$

ولما كانت المتجهات تجمع حسب قاعدة متوازي الأضلاع، فإن مسقط $\vec{V}'_1 + \vec{V}''_1$ على حامل $\vec{V}_2$ يساوي لمجموع مسقطي $\vec{V}'_1$ و $\vec{V}''_1$ أي أن، الشكل.8b.

$$(\vec{V}'_1 + \vec{V}''_1, \vec{V}_2) = (\vec{V}'_1, \vec{V}_2) + (\vec{V}''_1, \vec{V}_2) \quad (2.3)$$

ومن جهة أخرى فإن ضرب متجهة بعدد يعود إلى ضرب الطويلة بهذا العدد وهكذا فإن

$$(\lambda\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \lambda \left|\vec{V}_1\right| \left|\vec{V}_2\right| \cos\theta = \lambda(\left|\vec{V}_1\right| \left|\vec{V}_2\right|)\cos\theta$$

أي

$$(\lambda\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \lambda(\vec{V}_1, \vec{V}_2) \quad (2.4)$$

وهكذا فإننا إذا ثبتنا $\vec{V}_2$ فإن التطبيق بالنسبة لـ $\vec{V}_1$ و E هو تطبيق خطي لـ E في R حسب (2.3) و(2.4) فهو إذاً شكل خطي (الشكل الخطي هو تعريفاً التطبيق الخطي لفضاء متجه في حقل الأعداد المنشأ عليه هذا الفضاء) ولما كان الجداء تبادلياً فإنه من الممكن تثبيت $\vec{V}_1$ في الطرف الثاني من (2.2) وتكرار (2.3) و(2.4) بالنسبة لـ $\vec{V}_2$ ورؤية أن الجداء السلمي هو أيضاً شكل خطي بالنسبة لـ $\vec{V}_2$ وهكذا فإن التطبيق

$$\vec{V}_1, \vec{V}_2 \rightarrow (\vec{V}_1, \vec{V}_2)$$

هو شكل خطاني (ثنائي الخطية)

$$E \times E \rightarrow R$$

ومن جهة أخرى فإن $(\bar{V}, \bar{V}) = |\bar{V}|^2 > 0$ (2.5)

من أجل $\bar{V} \neq 0$.

أي أن الجداء السلمي لمتجهة بنفسها $\cos\theta = 1$ يساوي مربع طويلة هذه المتجهة وهو عدد موجب دوماً بطبيعة الحال ولا يساوي الصفر إلا إذا كانت $\bar{V} = \bar{O}$. نقول إن الشكل ثنائي الخطية مُعرَّف موجب إذا حقق العلاقة (2.5).

تعريف 4 :

نسمي الجداء السلمي الذي يحقق العلاقات (2.2) إلى (2.5) بالجداء السلمي الإقليدي. فالجداء السلمي الإقليدي هو شكل ثنائي الخطية، متناظر (تبادلية الجداء) معرف موجب ونسمي الفضاءات المتجهة التي زودت بجداء سلمي إقليدي فضاءات إقليدية. والفضاء الفيزيائي، حيث عينت نقطة مبدأ O، هو فضاء متجهي أقليدي والفضاء التآلفي المرتبط بفضاء متجهي إقليدي هو فضاء تآلفي إقليدي.

لنعين المتجهات $\bar{V}_1$ و $\bar{V}_2$ بإحداثياتها في الفضاء المتجهي

$$\bar{V}_1 = x_1\bar{e}_x + y_1\bar{e}_y + z_1\bar{e}_z \quad (2.6)$$

$$\bar{V}_2 = \bar{x}_2\bar{e}_x + \bar{y}_2\bar{e}_y + \bar{z}_2\bar{e}_z$$

ولنلاحظ

$$1 = (e_z, e_z) = (\bar{e}_y, \bar{e}_y) = (\bar{e}_x, \bar{e}_x)$$

$$0 = (e_y, e_z) = (e_x, e_z) = (e_x, e_y)$$

ثم لنستعمل خواص ثنائية الخطية فنجد

$$(\bar{V}_1, \bar{V}_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \quad (2.6)'$$

بصورة خاصة

$$(\bar{V}_1, \bar{V}_1) = |V_1|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \quad (2.6)''$$

أو

$$|V_1| = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{1/2} \quad (2.7)$$

2.2– خواص الجداء السلمي :

مبرهنة 1 :

يحقق الجداء السلمي المتراجحتين التاليتين

$$(\bar{V}_1, \bar{V}_2)^2 \leq (\bar{V}_1, \bar{V}_1) \cdot (\bar{V}_2, \bar{V}_2) = |\bar{V}_1|^2 \cdot |\bar{V}_2|^2 \quad (2.8)$$

وتسمى هذه المتراجحة بمتراجحة كوشي شفارتز Cauchy-Schwarz

$$(\bar{V}_1 + \bar{V}_2, \bar{V}_1 + \bar{V}_2)^{1/2} \leq (\bar{V}_1, \bar{V}_1)^{1/2} + (\bar{V}_2, \bar{V}_2)^{1/2} \quad (2.9)$$

وتسمى هذه المتراجحة بمتراجحة مينكوفسكي Minkowski وهي تعبر ببساطة على أن طول ضلع المثلث $\overline{AC}$ أصغر من مجموع طول الضلعين الآخرين $\overline{BC} + \overline{AB}$ وتتحقق بأخذ مربع الطرفين بوقوع المساواة عندما يكون المثلث قائم الزاوية. أما المتراجحة الأولى فهي نتيجة مباشرة لتعريف الجداء السلمي ومع ذلك نريد البرهان عليهما كالتالي[4] : لنأخذ عدداً λ ولننشر المقدار الموجب الآتي (حسب (2.5))،

$$(\overline{V}_1 + \lambda\overline{V}_2, \overline{V}_1 + \lambda\overline{V}_2) \geq 0 \qquad (2.10)$$

لدينا انطلاقاً من (2.3) و(2.4)

$$= (\overline{V}_1, \overline{V}_1) + 2\lambda(\overline{V}_1, \overline{V}_2) + \lambda^2(\overline{V}_2, \overline{V}_2) \geq 0$$

لدينا هنا ثلاثي حدود بالعدد λ. يجب لكي يبقى هذا الثلاثي موجباً (مع معامل λ^2 موجب) ألا يكون للمعادلة من الدرجة الثانية جذران حقيقيان أي أن يكون مميزها سالباً أي أن

$$(\overline{V}_1, \overline{V}_2)^2 - (\overline{V}_1, \overline{V}_1)(\overline{V}_2, \overline{V}_2) \leq 0$$

وهذا ما يبرهن (2.8).

لنفرض أن $\overline{V}_2 \neq \overline{0}$ وأن $\overline{V}_1$ ليس موازياً لـ $\overline{V}_2$، غير متناسب معه، أي لنفرض أن $\overline{V}_1 + \lambda\overline{V}_2 \neq 0$؛ أياً كانت قيمة λ يبقى طرف المتراجحة (2.10) موجباً مطلقاً. يجب إذاً ألا يكون للمعادلة من الدرجة الثانية أي جذر موجب ويجب بالتالي أن يكون مميزها سالباً مطلقاً : لا تتحقق إشارة التساوي في (2.8) إلا إذا كانت المتجهة $\overline{V}_2 = 0$ أو كانت $\overline{V}_1 = \alpha\overline{V}_2$ (أي $\cos\theta = 1$).

تنتج المتراجحة الثانية عن الأولى؛ إذ إنها تعني إذا أخذنا مربع الطرفين أن

$$(\overline{V}_1 + \overline{V}_2, \overline{V}_1 + \overline{V}_2) \leq (\overline{V}_1, \overline{V}_1) + (\overline{V}_2, \overline{V}_2) + 2(\overline{V}_1, \overline{V}_1)^{1/2}(\overline{V}_2, \overline{V}_2)^{1/2}$$

وبنشر الطرف الأيسر نصل إلى

$$2(\overline{V}_1, \overline{V}_2) \leq 2(\overline{V}_1, \overline{V}_1)^{1/2}(\overline{V}_2, \overline{V}_2)^{1/2}$$

فهي تعني إذاً أن

$$(\overline{V}_1, \overline{V}_2)^2 \leq (\overline{V}_1, \overline{V}_1)(\overline{V}_2, \overline{V}_2)$$

وهو ما تحققه المتراجحة الأولى. تقع المساواة عندما تكون $\overline{V}_1 = \alpha\overline{V}_2$ وهي الحالة الوحيدة التي تكون فيها طويلة مجموع متجهتين تساوي لمجموع الطويلتين.

---

[4] سنرى في دراستنا الفيزيائية أن فضاءات متجهة عديدة هي فضاءات إقليدية، فالفضاء الذي تنتمي إليه التوابع الموجية في ميكانيك الكم مثلاً هو فضاء إقليدي لامتناه الأبعاد ولذلك فلن يكون للمتراجحات فيه هذا المعنى الهندسي الابتدائي.

مبرهنة 2 :

لتكن [5]$\overline{BC}$ المتجهة الواصلة بين النقطة B ذات الإحداثيات (x_1, y_1, z_1) و C ذات الإحداثيات (x_2, y_2, z_2).

إن طويلة هذه المتجهة تحددها العلاقة

$$\left|\overline{BC}\right|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \qquad (2.11)$$

لنعين النقطة B بالمتجهة $\overline{OB} = \overline{V_1}$ و C بالمتجهة $\overline{OC} = \overline{V_2}$ في الفضاء المتجهي المعين في النقطة O بنظمة المحاور المتعامدة. لدينا

$$\overline{BC} = \overline{V_2} - \overline{V_1}$$

$$\left|\overline{BC}\right|^2 = (\overline{V_2} - \overline{V_1}, \overline{V_2} - \overline{V_1})$$

وباستعمال خطانية الجداء السلمي

$$= (\overline{V_2}, \overline{V_2}) + (\overline{V_1}, \overline{V_1}) - 2(\overline{V_1}, \overline{V_2}) \qquad (2.11)'$$

وباستعمال تعريف الجداء السلمي بالنسبة للحد الأخير من الطرف الأيمن

$$= \left|\overline{V_2}\right|^2 + \left|\overline{V_1}\right|^2 - 2\left|\overline{V_1}\right|\left|\overline{V_2}\right|\cos\theta$$

نرى أولاً أن مربع أي ضلع في المثلث يساوي لمجموع مربعي الضلعين ناقص جداء هذين الضلعين بجيب تمام الزاوية بينهما. لنبدل، من جهة ثانية حدود الطرف الثاني بالقيم "(2.6) و '(2.6) فنجد

$$\left|\overline{BC}\right|^2 = (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) + (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - 2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)$$

تعطينا إعادة ترتيب الطرف الثاني في هذه العلاقة الطرف الثاني في (2.11) وهو المطلوب.

لنعرف مركبات المتجهة $\overline{OA} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ بالاستعانة بتعريف الجداء السلمي لدينا

$$\overline{OA} = x\overline{e_x} + y\overline{e_y} + z\overline{e_z}$$

$$\overline{e_x} \cdot \overline{OA} = x$$

لأن $\overline{e_i}$ $(i = x, y, z)$ واحدية متعامدة

ولكن الطرف الأول يساوي تعريفاً $|1|\cdot\left|\overline{OA}\right|\cos\theta_1$ حيث θ_1 هي الزاوية بين المتجهتين $\overline{e_x}$، $\overline{OA}$ وهكذا $x = \left|\overline{OA}\right|\cos\theta_1$ وبنفس الشكل $y = \left|\overline{OA}\right|\cos\theta_2$ و $z = \left|\overline{OA}\right|\cos\theta_3$ حيث θ_2 و θ_3 هما الزاويتان بين $\overline{e_y}$ و $\overline{OA}$، وبين $\overline{e_z}$ و $\overline{OA}$ بالترتيب. لنربع هذه العلاقات الثلاثة ولنجمعها طرفاً لطرف فنجد

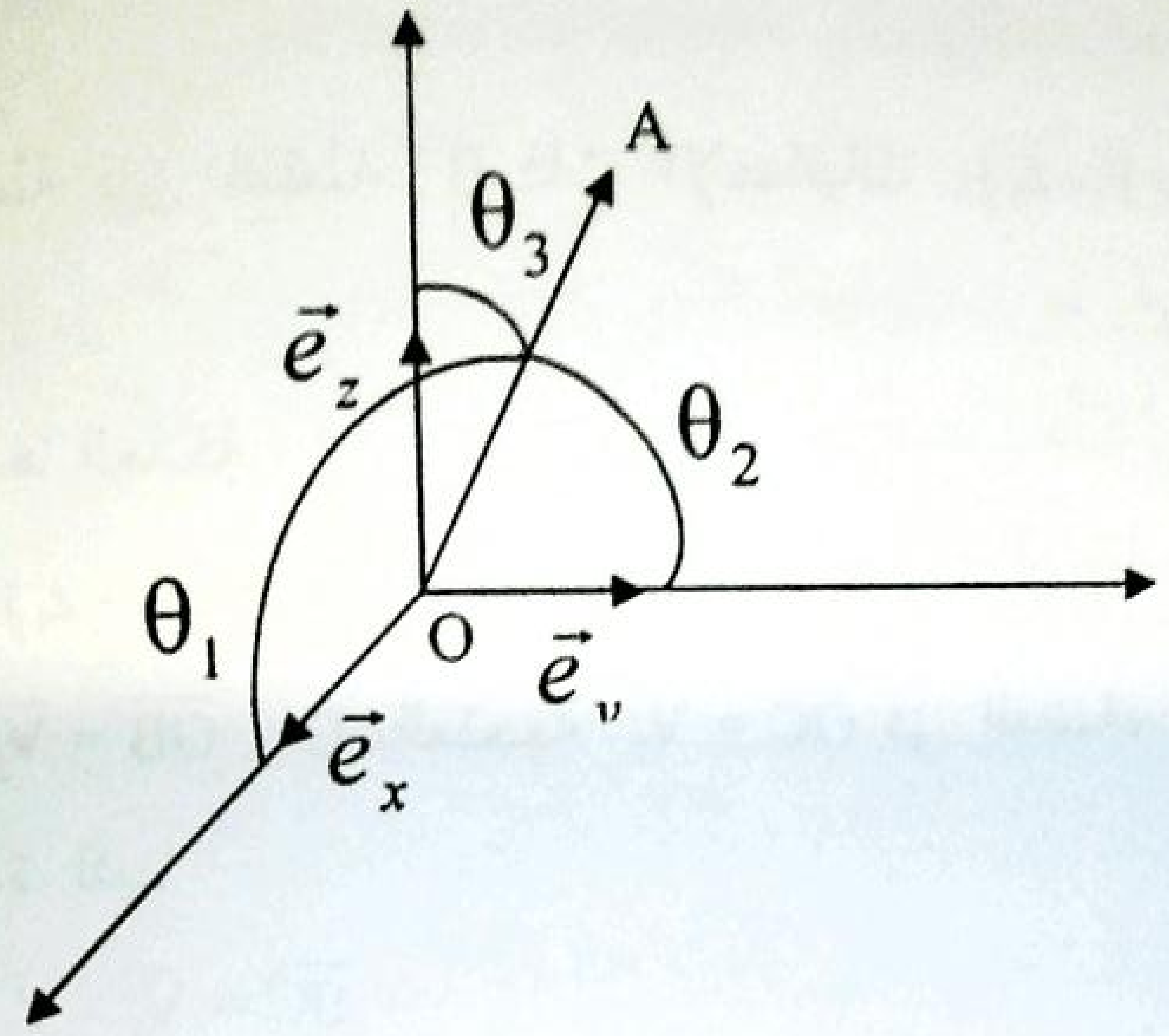
$$x^2 + y^2 + z^2 = \left|\overline{OA}\right|^2 (\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3)$$

ولكن الطرف الأول يساوي لـ $\left|\overline{OA}\right|^2$ لذا فإن

$$1 = \cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 \qquad (2.12)$$

---

[5] $\overline{BC}$ كمتجهة في الفضاء التآلفي.



نسمي جيوب التمام هذه بجيوب التمام الموجهة.

لنذكر أخيراً بمعادلة المستوي مكتوبة على شكل جداء سلمي. لتكن، الشكل.9، X ، Y ، Z إحداثيات النقطة A التي يلتقي فيها المستقيم العمودي المسقط من O مع المستوي P ولنعين نقطة ما من المستوي بالمتجهة $\overline{OB}$ ولتكن إحداثيات هذه النقطة المتغيرات (x, y, z) لدينا

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OA} \cdot \overline{OA} + \overline{OA} \cdot \overline{AB}$$

ولكن

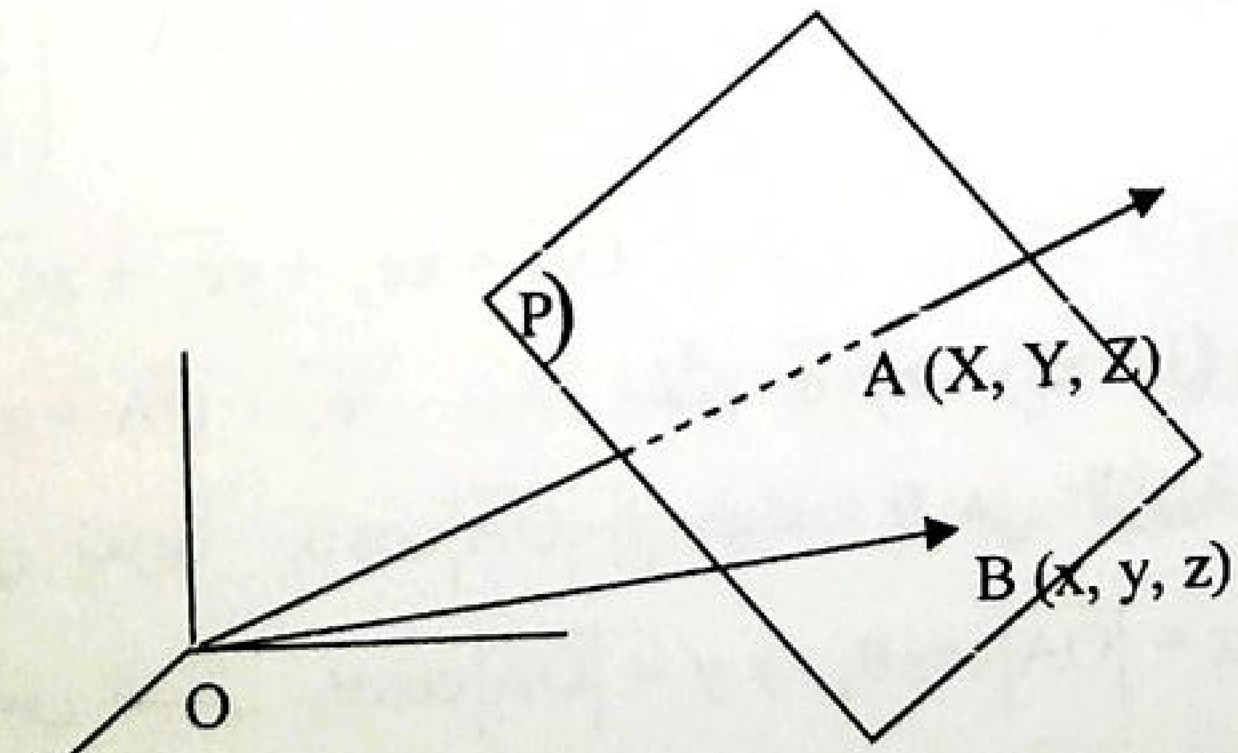
$$\overline{OA} \cdot \overline{AB} = 0$$

وتعرف المتجهات الواقعة في المستوي وهكذا فإن معادلة المستوي هي

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \left|\overline{OA}\right|^2 = \text{ثابتة}$$

أو باستعمال المركبات

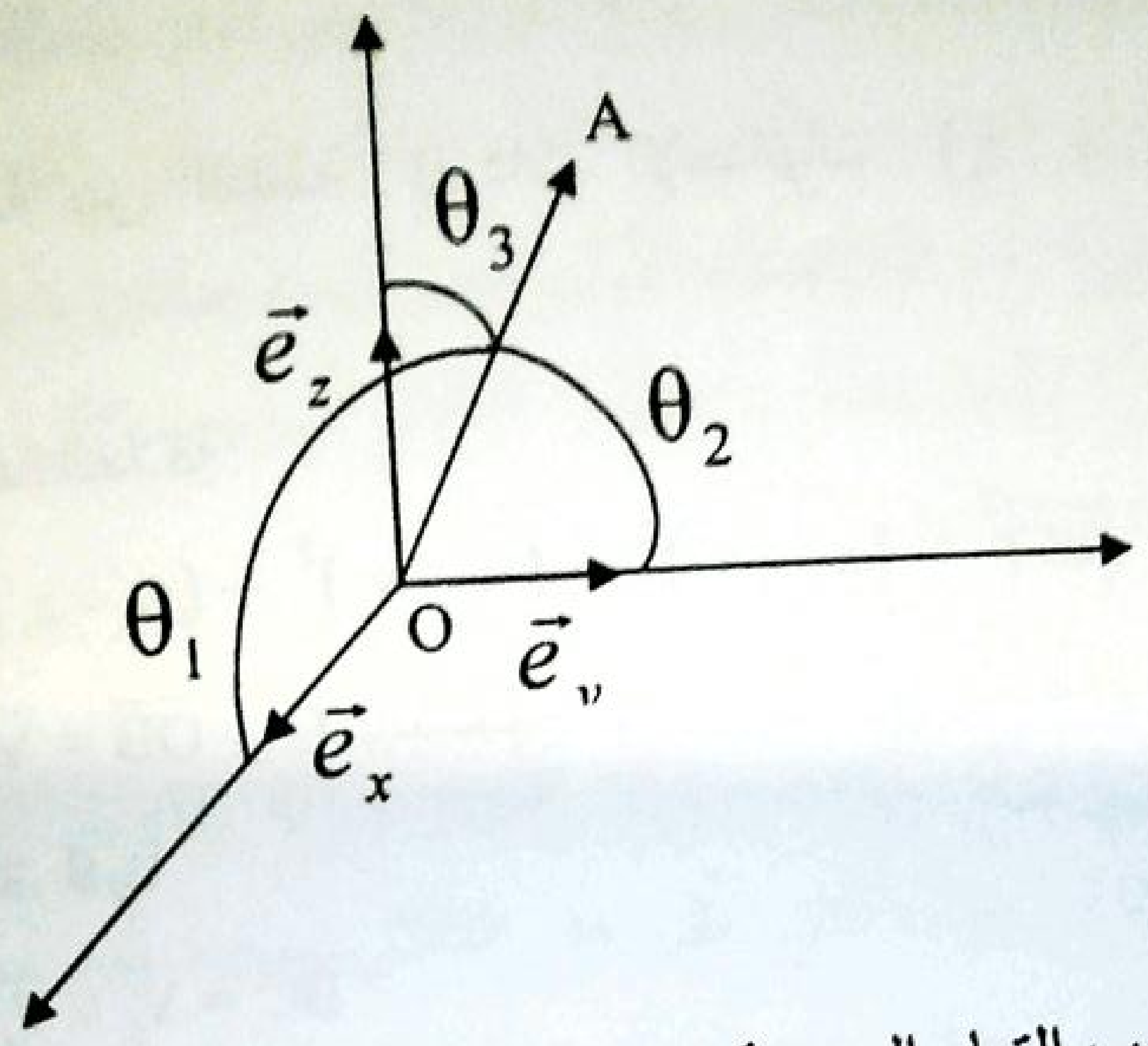
$$xX + yY + zZ = \text{ثابتة} \qquad (2.13)$$



الشكل.9

3.2– الجداء المتجه :

نسمي جداء متجهاً لمتجهتين $\overline{V_1}$ و $\overline{V_2}$ تفصل بين اتجاهيهما الزاوية θ المقدار المتجه $\overline{P}$ المعرف بإعطاء القيم التالية :



نسمي جيوب التمام هذه بجيوب التمام الموجهة.

لنتذكر أخيراً بمعادلة المستوي مكتوبة على شكل جداء سلمي. لتكن، الشكل.9، X ، Y ، Z إحداثيات النقطة A التي يلتقي فيها المستقيم العمودي المسقط من O مع المستوي P ولنعين نقطة ما من المستوي بالمتجهة $\overline{OB}$ ولتكن إحداثيات هذه النقطة المتغيرات (x, y, z) لدينا

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OA} \cdot \overline{OA} + \overline{OA} \cdot \overline{AB}$$

ولكن

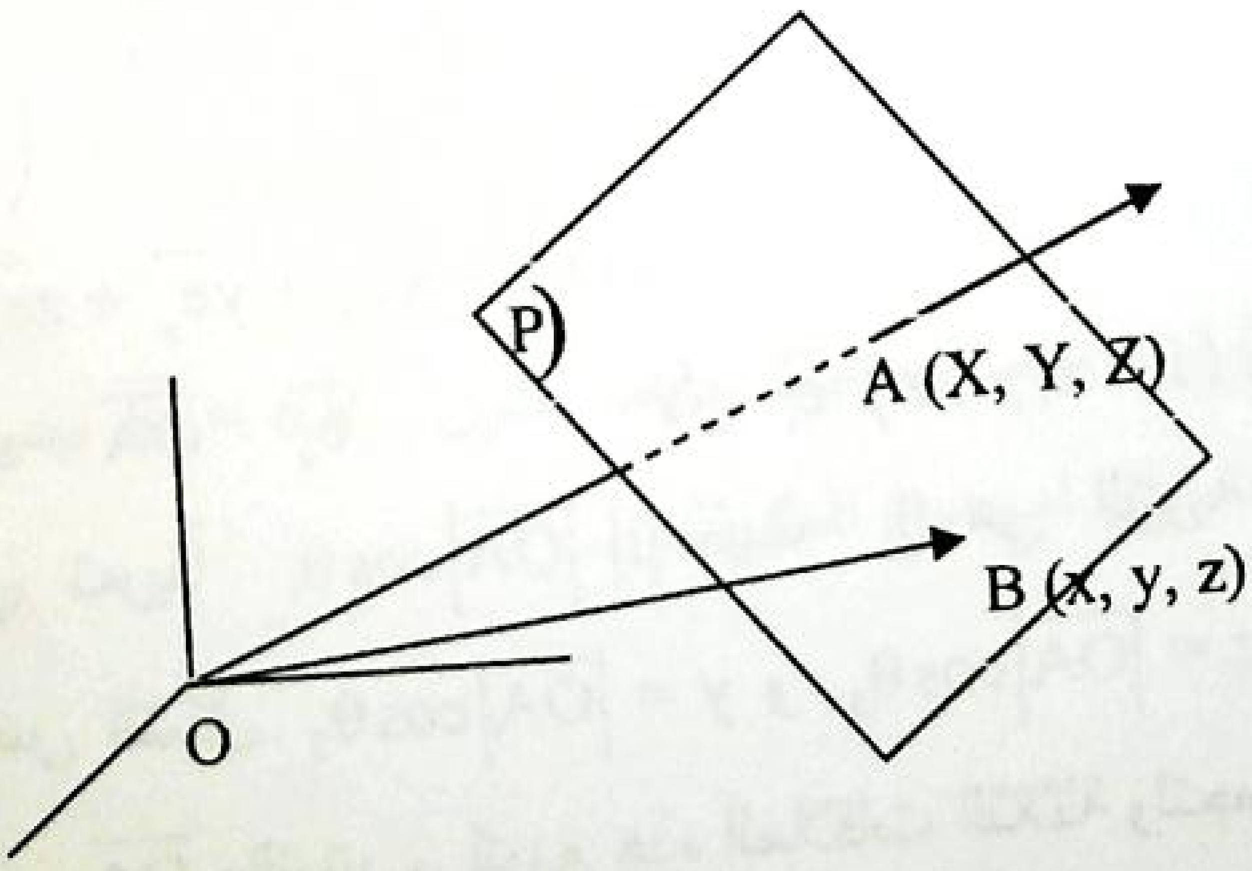
$$\overline{OA} \cdot \overline{AB} = 0$$

وتعرف المتجهات الواقعة في المستوي وهكذا فإن معادلة المستوي هي

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \left|\overline{OA}\right|^2 = \text{ثابتة}$$

أو باستعمال المركبات

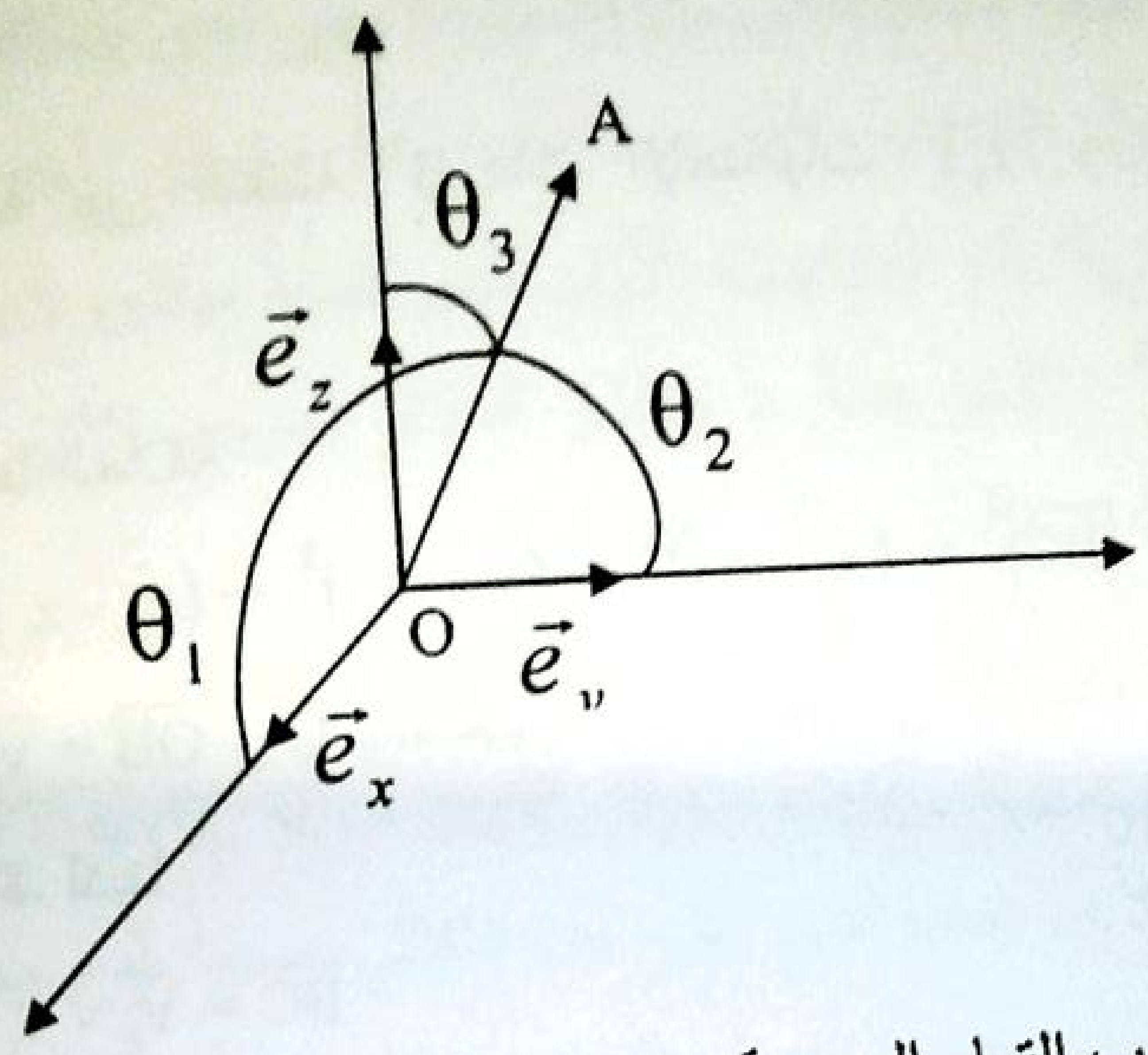
$$xX + yY + zZ = \text{ثابتة} \qquad (2.13)$$



الشكل.9

3.2- الجداء المتجه :

نسمي جداء متجهاً لمتجهتين $\overline{V_1}$ و $\overline{V_2}$ تفصل بين اتجاهيهما الزاوية θ المقدار المتجه $\overline{P}$ المعرف بإعطاء القيم التالية :



نسمي جيوب التمام هذه بجيوب التمام الموجهة.

لنذكر أخيراً بمعادلة المستوي مكتوبة على شكل جداء سلمي. لتكن، الشكل.9، X ، Y ، Z إحداثيات النقطة A التي يلتقي فيها المستقيم العمودي المسقط من O مع المستوي P ولنعين نقطة ما من المستوي بالمتجهة $\overline{OB}$ ولتكن إحداثيات هذه النقطة المتغيرات (x, y, z) لدينا

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OA} \cdot \overline{OA} + \overline{OA} \cdot \overline{AB}$$

ولكن

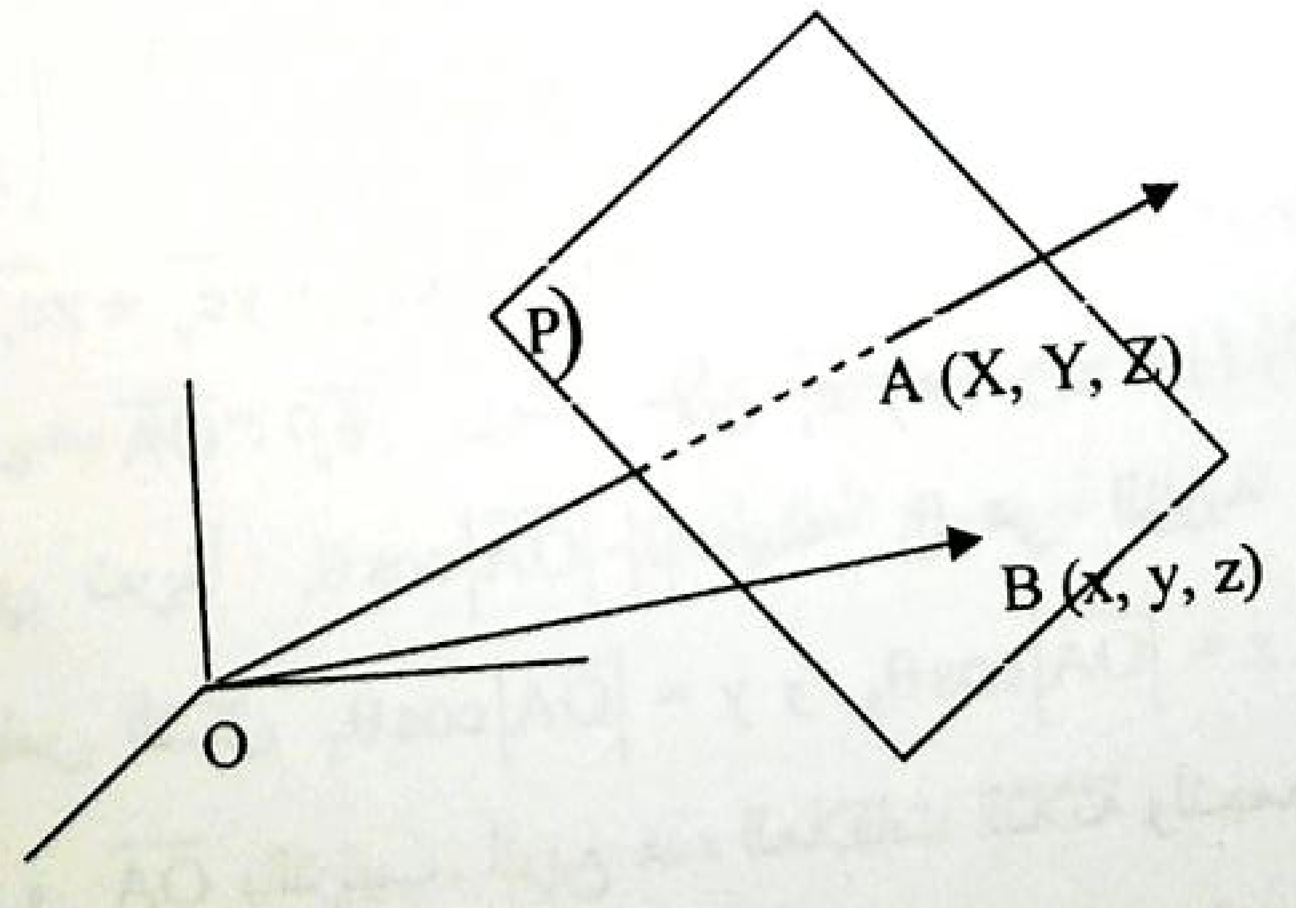
$$\overline{OA} \cdot \overline{AB} = 0$$

وتعرف المتجهات الواقعة في المستوي وهكذا فإن معادلة المستوي هي

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \left|\overline{OA}\right|^2 = \text{ثابتة}$$

أو باستعمال المركبات

$$xX + yY + zZ = \text{ثابتة} \qquad (2.13)$$



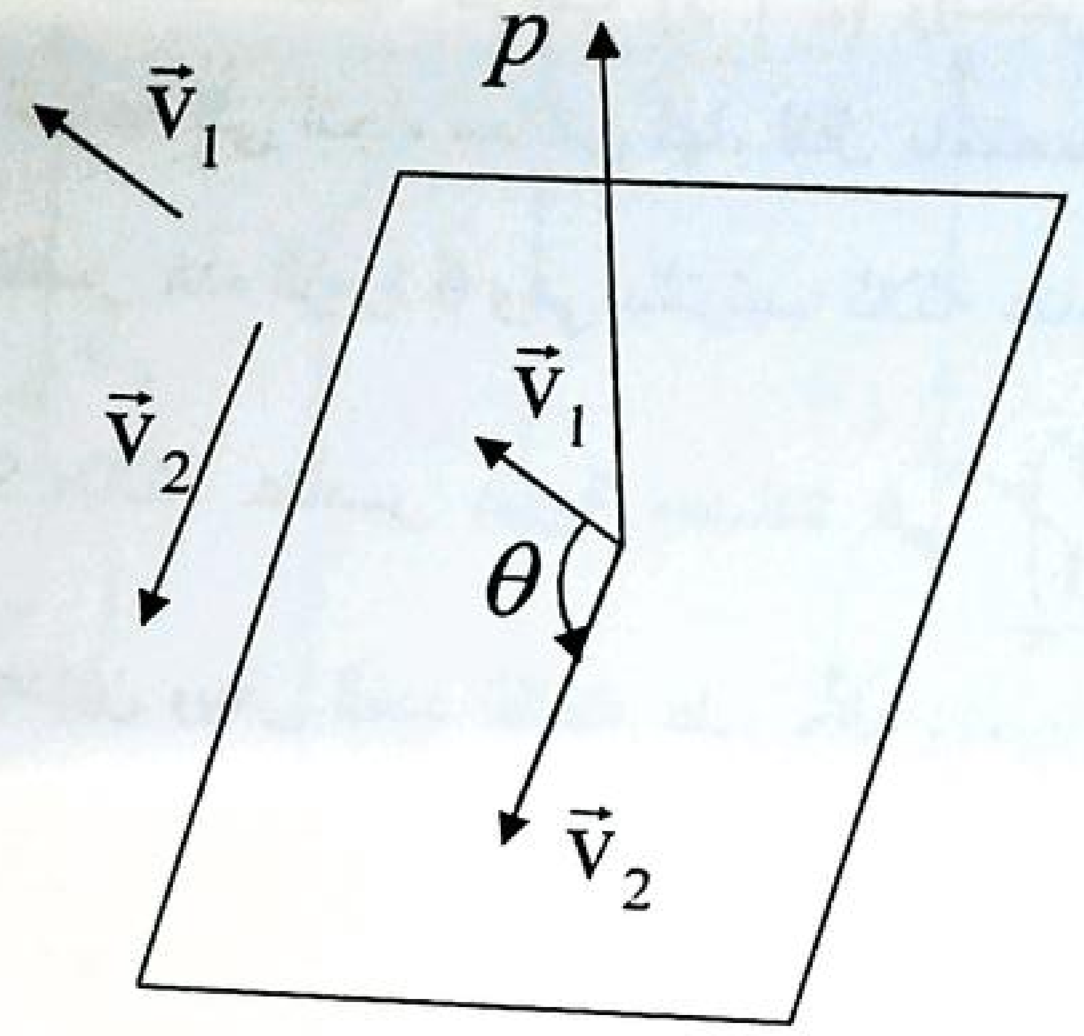
الشكل.9

3.2- الجداء المتجه :

نسمي جداء متجهاً لمتجهتين $\overline{V_1}$ و $\overline{V_2}$ تفصل بين اتجاهيهما الزاوية θ المقدار المتجه $\overline{P}$ المعرف بإعطاء القيم التالية :

- طويلة $|\vec{P}| = |\vec{V}_1||\vec{V}_2|\sin\theta$ وهي تساوي إذاً سطح متوازي الأضلاع المنشأ على $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$.
- منحاه عمودي على مستوى المتجهتين $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$.
- اتجاهه هو بحيث يرى الراصد الواقف في اتجاه $\vec{P}$ المتجهة $\vec{V}_1$ إلى يمينه، أي أن الدوران حول $\vec{P}$ للانتقال من $\vec{V}_1$ إلى $\vec{V}_2$ هو من اليمين إلى اليسار، الشكل.10. نتعارف على تسمية هذا الدوران دوراناً موجباً. لنرمز بـ $\vec{p}$ إلى المتجهة الواحدية في اتجاه $\vec{P}$ ونكتب

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \vec{P} = \vec{p}|\vec{V}_1||\vec{V}_2|\sin\theta \qquad (2.14)$$



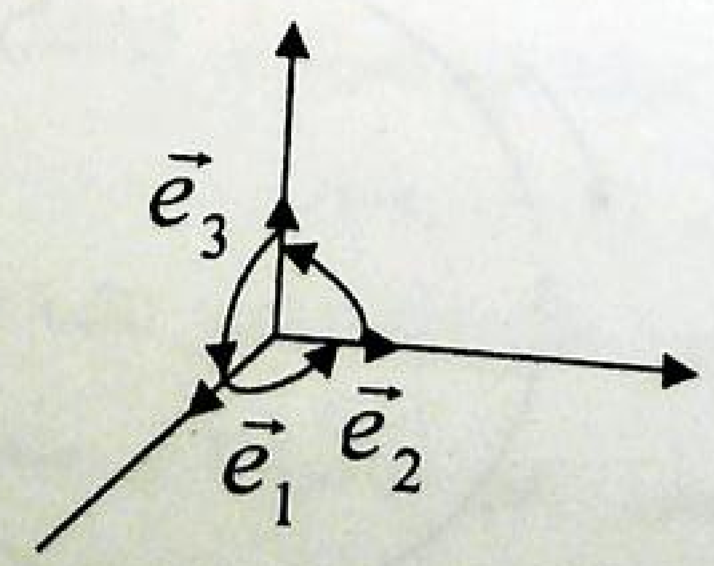
الشكل.10

تعريف 5 :

إذا كان الدوران $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ نسمي مجموعة محاور ثلاثة غير واقعة كلها في مستو واحد ثلاثية مباشرة إذا كان الدوران حول $\vec{e}_3$ لتطبيق $\vec{e}_1$ على $\vec{e}_2$ موجباً، الشكل.11، وكذلك الدوران حول $\vec{e}_1$ لتطبيق $\vec{e}_2$ على $\vec{e}_3$ وأخيراً حول $\vec{e}_2$ لتطبيق $\vec{e}_3$ على $\vec{e}_1$. ونكتب اختصاراً (3 2 1) للدوران الأول (1 3 2) للثاني و(2 1 3) للثالث ونسمي الدوران إذا تحقق حسب هذا الترتيب دوراناً دورياً : (3 2 1).

لنفرض أن المتجهات $\vec{e}_i$ واحدية ومتعامدة ونظمة المحاور مباشرة $i = 1, 2, 3 = x, y, z$ فالدوران الدوري يعني أن

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \vec{e}_k \qquad (2.15)$$



الشكل.11

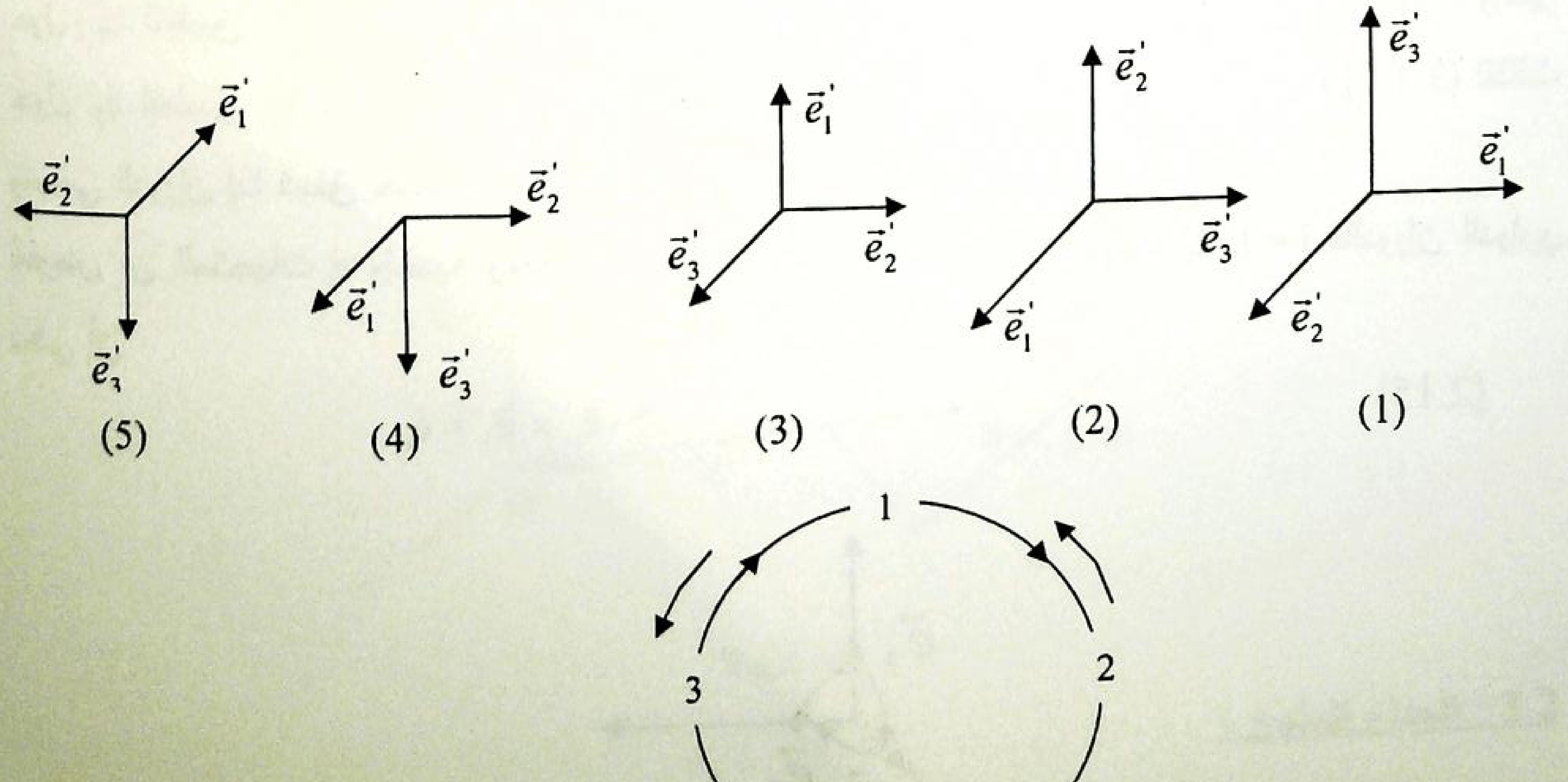
حيث (i, j, k) تكون دورة. أما إذا عرفنا الجداء المتجه بحيث يكون الدوران من اليسار إلى اليمين ونقول عندئذ إن الثلاثية غير مباشرة فإن

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_3$$

$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_1$$

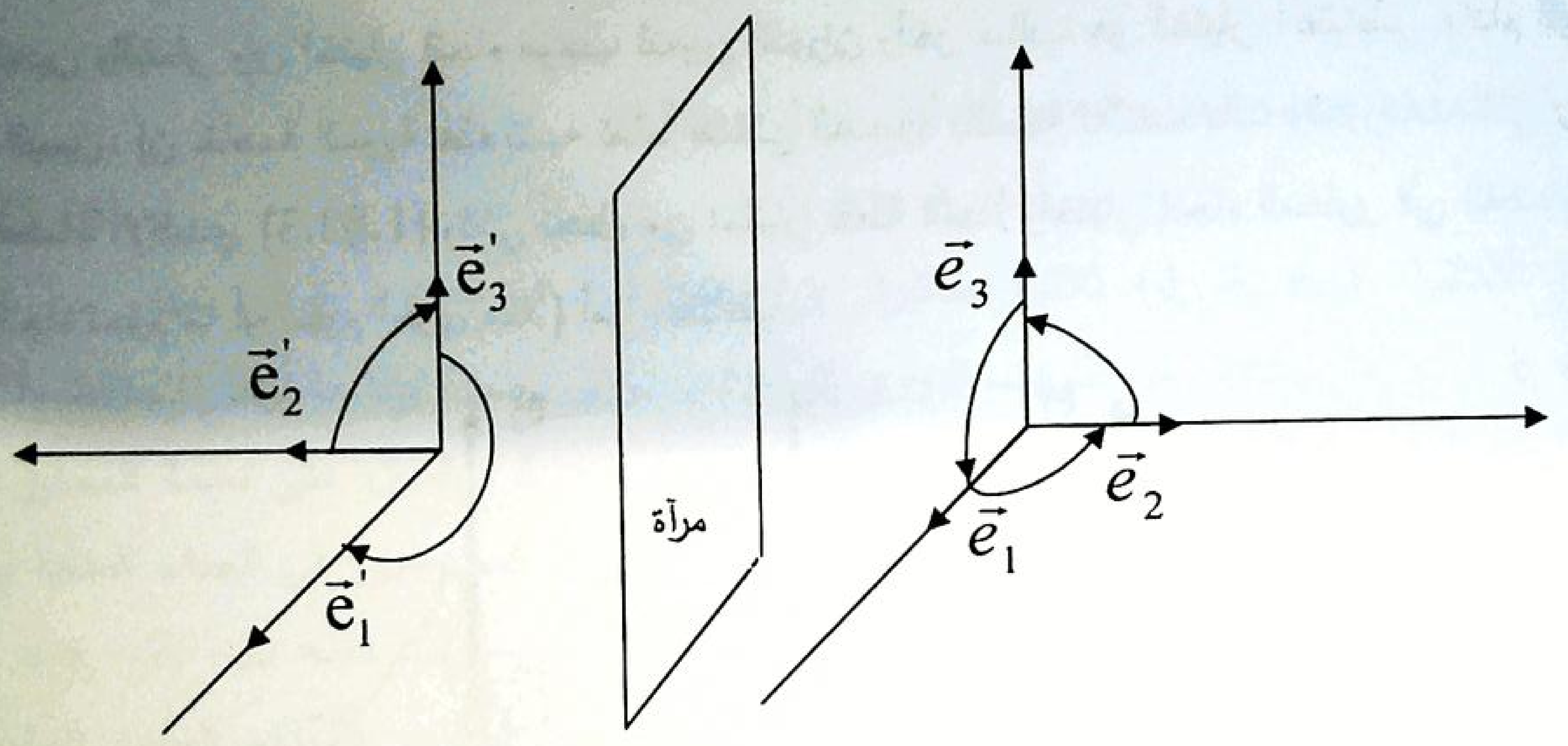
$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_2$$

يصبح الدوران إذاً دوارياً مضاداً محققاً حسب الترتيب (3 1 2) وينعكس اتجاه السهم على الدائرة من دوران في اتجاه حركة عقارب الساعة إلى اتجاه معاكس لها. لنقل باختصار إن الأمر يتعلق بزمرة تبديل ثلاثة أعداد $(1, 2, 3)$؛ عدد عناصر هذه الزمرة 6 وهي بالترتيب ثلاثة عناصر دورية هي $S_1 : \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix}$، $S_2 : \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix}$، $S_3 : \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix}$ وثلاثة عناصر دورية مضادة هي $S_4 : \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{pmatrix}$، $S_5 : \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix}$، $S_6 : \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,2\,1 \end{pmatrix}$ التي تبادل بين عددين ويبقى العدد الثالث على حاله وتغير بالتالي اتجاه الدوران وتعطينا الثلاثيات (1)، (2) و(3) في الشكل.12، حيث لدينا كما في (2.15) $\vec{e}'_i \times \vec{e}'_j = \vec{e}'_k$ (i, j, k) دورة. لنلاحظ أننا ننتقل من ثلاثية مباشرة إلى أخرى بالقيام بعدد من الدورانات المباشرة أو غير المباشرة فنحصل على سبيل المثال على الثلاثية (1 3 2) انطلاقاً من (2 1 3) وفق الجداء (في الزمرة) $S_3 \circ S_3 = S_2$: $S_3(S_3(1)) = 2$، $S_3(S_3(2)) = 3$ و $S_3(S_3(3)) = 1$. ويعود الأمر هندسياً إلى القيام بعدد من الدورانات المباشرة أو غير المباشرة



الشكل.12

يمكن مثلاً الحصول على الثلاثيتين (2) و(3) انطلاقاً من (1) بالقيام بدورانات غير مباشرة من اليسار إلى اليمين : يمكن مثلاً الحصول على (2) بأن ندير المستوي $\vec{e}_1$، $\vec{e}_2$ بزاوية $\frac{\pi}{2}$ حول $\vec{e}_3$ فنحصل على ثلاثية الشكل.13. ثم بدوران آخر بـ $\frac{\pi}{2}$ حول $\vec{e}_1'$ فنحصل على الثلاثية (2). يمكن الحصول على الثلاثية (4) انطلاقاً من (2) بتدوير $\vec{e}_2'$ $\vec{e}_3'$ بزاوية $\frac{\pi}{2}$ حول $\vec{e}_1'$ وعلى الثلاثية (5) انطلاقاً من (4) بتدوير $\vec{e}_1'$ و $\vec{e}_2'$ بزاوية π حول $\vec{e}_3'$ الخ.

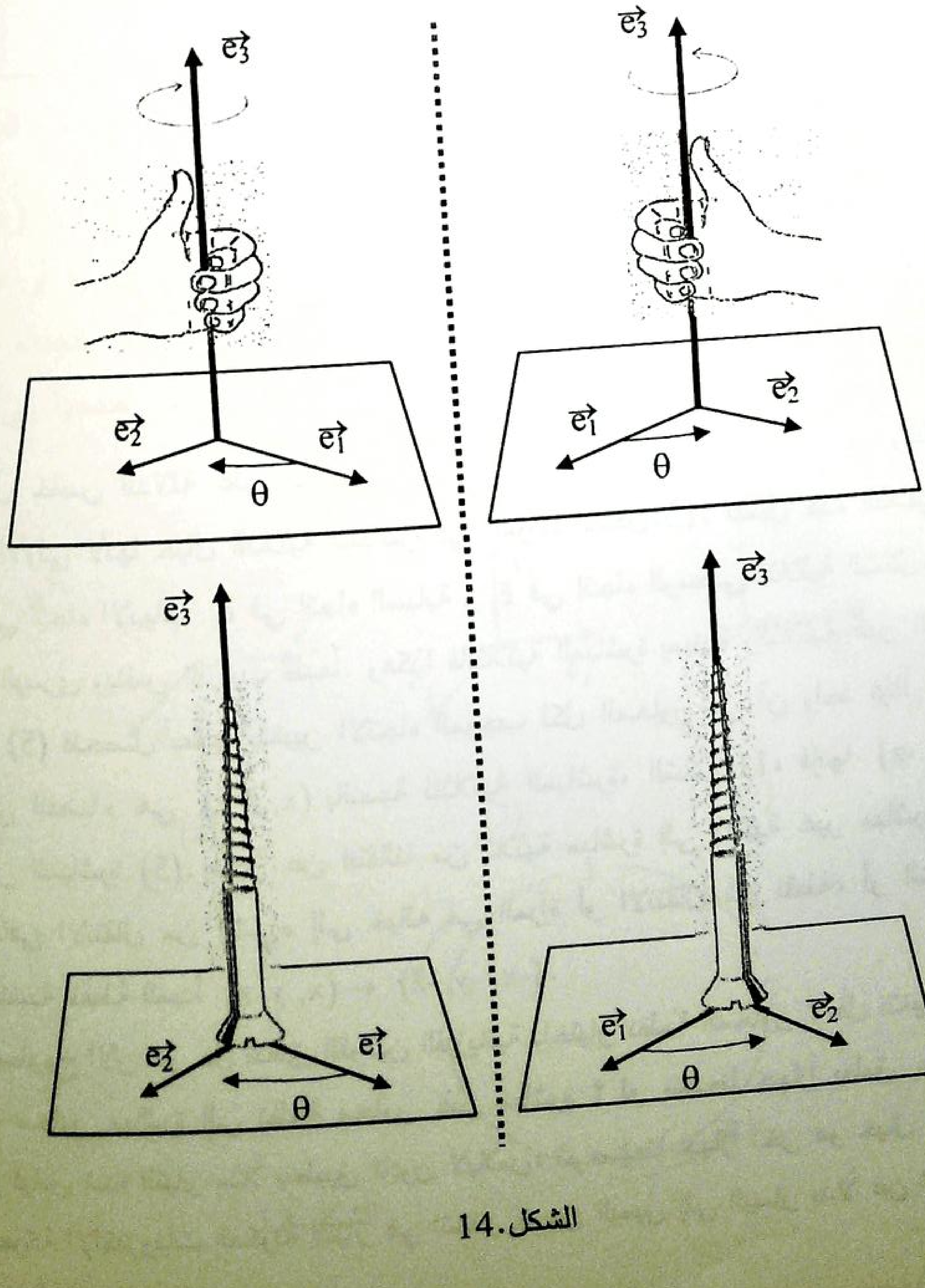


الشكل.13

سنختار بشكل خاص للدلالة على الثلاثيات غير المباشرة الثلاثية في الشكل.13، والثلاثية (5) في الشكل.12، الأولى لأنها خيال الثلاثية المباشرة في المرآة، الشكل.13. لنمثل هذه الثلاثية بأصابع اليد اليمنى $\vec{e}_1$ في اتجاه الإبهام، $\vec{e}_2$ في اتجاه السبابة و $\vec{e}_3$ في اتجاه الوسطى فثلاثية الشكل.13 هي ثلاثية أصابع اليد اليسرى وبنفس الترتيب طبعاً. وهكذا فالثلاثية المباشرة يمينية والثلاثية غير المباشرة يسارية. أما الثلاثية (5) فنحصل عليها بتغيير الاتجاه الموجب لكل المحاور في آن واحد فإذا كانت إحداثيات نقطة ما في الفضاء هي (x, y, z) بالنسبة للثلاثية المباشرة، الشكل.11، فإنها $(-x, -y, -z)$ بالنسبة للثلاثية غير المباشرة (5). نعبر عن انتقالنا من ثلاثية مباشرة إلى ثلاثية غير مباشرة بقولنا إن هذا الانتقال يكافئ الانتقال من الشيء إلى خياله في المرآة أو الانتقال من نقطة، أو الشيء ككل، إلى نظيرتها بالنسبة لنقطة المبدأ $(x, y, z) \leftarrow (-x, -y, -z)$.

والسؤال المطروح الآن هو هل تتعلق القوانين الفيزيائية باختيار نظمة المحاور ؟ هل تتغير النتائج بانتقالنا من نظمة محاور مباشرة إلى نظمة محاور غير مباشرة ؟ لو صنعنا جهازاً يطبق عدداً من القوانين الفيزيائية، قياس شدة التيار مثلاً بتطبيق قانون لابلاس، ثم صنعنا جهازاً آخر هو خيال الجهاز الأول في المرآة : حركة الإلكترونات المكونة للتيار في اتجاه $\vec{e}_2'$ من اليمين إلى اليسار بدلاً عن الاتجاه حسب $\vec{e}_2$

من اليسار إلى اليمين ودوران المسننات مقلوب أيضاً من اليسار إلى اليمين مثلاً بدلاً من العكس وكذا المؤشر على تدريجات الجهاز والأمر نفسه في النوابض والبراغي، براغي يسارية بدلاً من براغي يمينية، الشكل.14، الخ. ترى هل سيعمل هذا الجهاز كالجهاز الأول وهل سيطبق بنفس الشكل القوانين الفيزيائية التي أنشئ بحسبها ؟ وهل سيصح ذلك ببساطة على كل الأجهزة ؟ إن الجواب على ذلك هو بنعم عندما يتعلق الأمر بالفيزياء الجهرية، فيزياء الأجسام الكبيرة التي تتفاعل فيما بينها تحت تأثير قوى الجاذبية والقوى الكهرطيسية وسنبين صحة هذا الجواب من خلال دراستنا ونقول إذاً إن الفيزياء الجهرية لا تفرق بين اليمين واليسار وإن اختيار اتجاه موجب لتعيين الدوران وآخر سالب هو اختيار اعتباطي مادام اليسار سواء اليمين. إن خاصة السوية هذه تشبه تماماً صفتي الصمود بالنسبة للانسحابات والدورانات التي يتمتع بها الفضاء الإقليدي (3.3§.1) والتي تجعل من اختيار نقطة المبدأ واختيار اتجاه المحاور في الفضاء (في اتجاه نجوم ما أو نجوم أخرى مثلاً) أمراً اعتباطياً.



الشكل.14

وقد كان يظن، حتى منتصف القرن العشرين، أن خاصة السوية تنطبق أيضاً على الفيزياء المجهرية، فيزياء الجسيمات، إلا أنه اكتشف تجريبياً في عام 1957 أن التفاعلات النووية الضعيفة (إشعاعات β) تميز بين اليمين واليسار وتكسر التناظر بينهما.

4.2- خواص الجداء المتجه :

يبدو للعيان من تعريف الجداء المتجه أنه ليس تبادلياً وهكذا فإن

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3 = -\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \qquad (2.16)$$

حيث الثلاثية $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ثلاثية مباشرة. إن انتقالنا من $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$ إلى جداء من الشكل $\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = \vec{e}'_3$ هو الانتقال من الترتيب الدواري إلى ترتيب دواري مضاد؛ وإذا ما أردنا الاحتفاظ بالترتيب الدواري فلا بد من تغيير تسمية المتجهتين : $\vec{e}'_1 = \vec{e}_2$ و $\vec{e}'_2 = \vec{e}_1$ فنحصل على نظمة المحاور غير المباشرة (1)، من الشكل.12، حيث $\vec{e}'_1 \times \vec{e}'_2 = \vec{e}'_3$ أي أن تبادل المضروبين في الجداء المتجه يكافئ الانتقال من نظمة مباشرة إلى نظمة غير مباشرة ولكننا نرى في الوقت نفسه من $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$ و $\vec{e}'_1 \times \vec{e}'_2 = \vec{e}'_3$ أن تعريف الجداء المتجه مرتبط باختيار نظمة المحاور فالجداء المتجه للمتجهتين الواحديتين في اتجاه الطول والعرض مثلاً هو المتجهة الواحدية نحو الأعلى في نظمة المحاور المباشرة ونحو الأسفل في نظمة المحاور غير المباشرة. فإذا كانت هاتان النظمتان سواء (التناظر بين اليمين واليسار) فإن الأعلى والأسفل سواء واختيار اتجاه ما وتسميته أعلى هو اختيار اعتباطي؛ فالأسفل مثلاً بالنسبة للراصد في نصف الكرة الشمالي هو الأعلى بالنسبة للراصد في نصف الكرة الجنوبي.

يبين ارتباط تعريف الجداء المتجه $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \vec{P}$ باختيار نظمة المحاور أن $\vec{P}$ ليست متجهة حقيقية في الفضاء الإقليدي، لأن تعريف المتجهات في هذا الفضاء التآلفي لا يتوقف في أي حال على اختيار O أو اختيار نظمة المحاور ولذلك سنضع من الآن فصاعداً العارضة | على السهم لنفرق بين متجهات تتوقف على اختيار نظمة المحاور والمتجهات الحقيقية غير المتوقفة عليها، نسمي المتجهات الأولى المتجهات المشتبهة. فإذا كانت مركبات متجهة حقيقية هي (x, y, z) في نظمة الإحداثيات المباشرة، الشكل.11 فإنها $(-x, -y, -z)$ في نظمة الإحداثيات غير المباشرة، الشكل.12 (5) بينما لا تتغير مركبات المتجهات المشتبهة فمركبات $\vec{e}_3$ هي $(0, 0, 1)$ في النظمة المباشرة ومركبات $\vec{e}'_3$ هي أيضاً $(0, 0, 1)$ في النظمة غير المباشرة.

مبرهنة 3 :

إن الجداء المتجه توزيعي بالنسبة لعملية جمع المتجهات.

يعود البرهان على أي خاصة للجداء المتجه إلى برهانها بالنسبة للمتجهات الواحدية التي تعبر العلاقة (2.15) عن جداءاتها بالإضافة إلى العلاقة $\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{0}$ حسب تعريف الجداء المتجه ($\sin\theta = 0$).

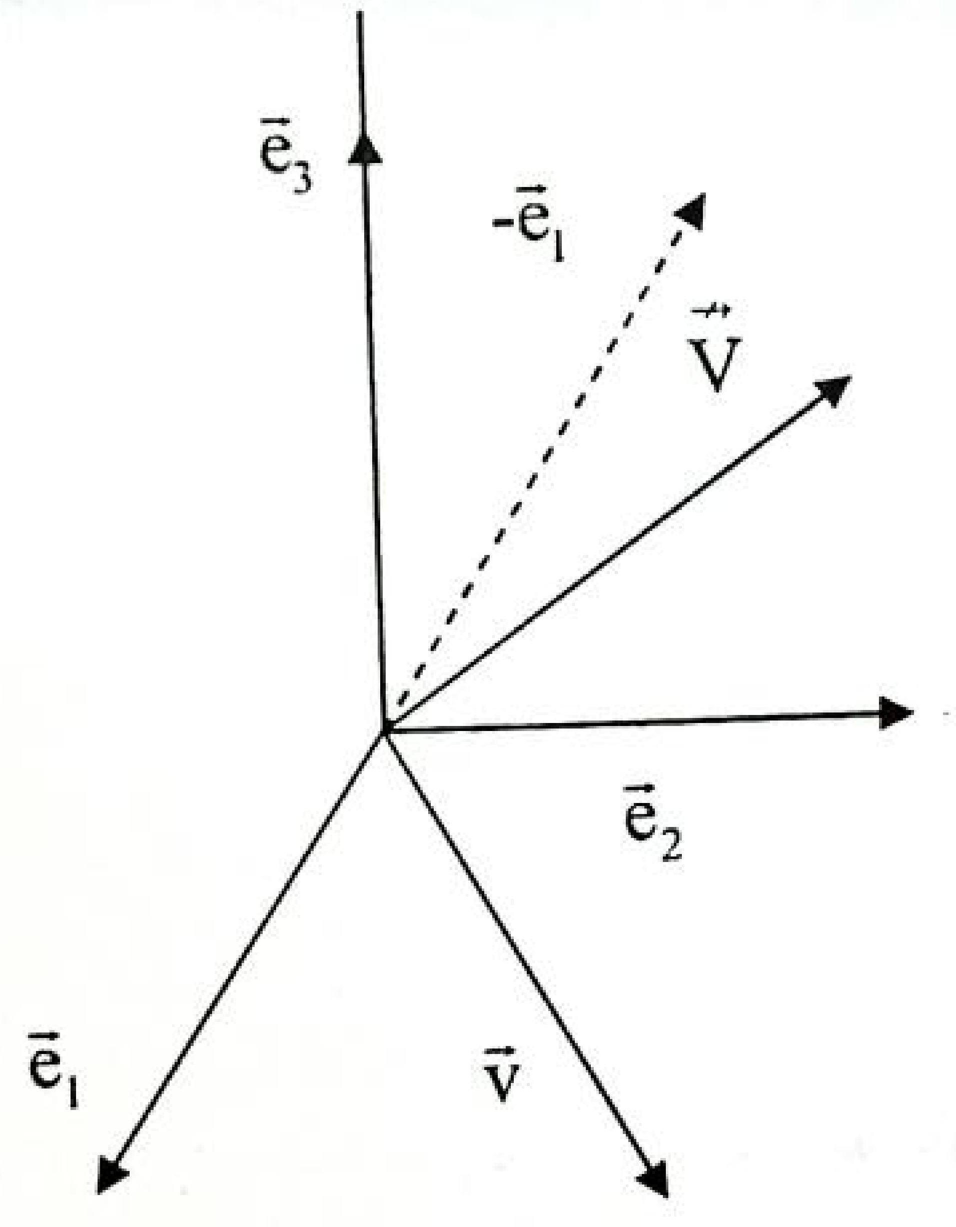
لنحسب الجداء

$$\vec{e}_3 \times (\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$$

إن المتجهة $\vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ واقعة في المستوى $\vec{e}_1, \vec{e}_2$، طويلتها $\sqrt{2}$ وتقع على المنصف الأول لهذا المستوي، فالجداء

$$\vec{e}_3 \times \vec{v} = \vec{V}$$

هي متجهة طويلتها أيضاً $\sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot 1$ وعمودية على $\vec{e}_3$ و $\vec{v}$، فهي تصنع إذاً زاوية $45°$ مع $\vec{e}_2$ وتقع على المنصف الثاني، الشكل.15



الشكل.15

ومن جهة ثانية فإن

$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

و

$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$$

ومجموع هاتين المتجهتين الشبيهتين $\vec{e}_2 - \vec{e}_1$ هي المتجهة $\vec{V}$ في المستوي $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ والواقعة على المنصف الثاني لدينا إذاً

$$\vec{e}_3 \times (\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 \qquad (2.17)$$

إن ضرب متجهة $\bar{V}_1$ بعدد موجب m يغير طويلتها فقط وبالتالي فإن جداءها المتجه بـ $\bar{V}_2$ سيكون مساوياً لـ

$$\left|m\bar{V}_1 \times \bar{V}_2\right| = m\left|\bar{V}_1\right|\left|\bar{V}_2\right|\sin\theta$$

$$m\bar{V}_1 \times \bar{V}_2 = m\vec{P}$$

وإذا كان العدد سالباً m- فإن اتجاه $\bar{V}_1$ سيتغير وبالتالي اتجاه الجداء حتى تبقى الثلاثية مباشرة

$$-m\bar{V}_1 \times \bar{V}_2 = -\vec{p}\, m\left|\bar{V}_1\right|\left|\bar{V}_2\right|\sin\theta = -m\vec{P}$$

حيث $\vec{p}$ هي المتجهة الواحدية في اتجاه $\vec{P}$. لدينا إذاً

$$m\bar{V}_1 \times \bar{V}_2 = m(\bar{V}_1 \times \bar{V}_2) = \bar{V}_1 \times m\bar{V}_2 \qquad (2.18)$$

نستنتج من (2.15) – (2.18) بسهولة أن جداء أي متجهتين $\bar{V}$ و $\bar{V}'$ المعرفتين بمركباتهما $(x = x_1, y = x_2, z = x_3)$ و (x_1', x_2', x_3') هو

$$\bar{V} \times \bar{V}' = (x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3) \times (x_1'\bar{e}_1 + x_2'\bar{e}_2 + x_3'\bar{e}_3)$$

$$= x_1x_2'\bar{e}_1 \times \bar{e}_2 + x_1x_3'\bar{e}_1 \times \bar{e}_3 + x_2x_1'\bar{e}_2 \times \bar{e}_1 + x_2x_3'\bar{e}_2 \times \bar{e}_3 + x_3x_1'\bar{e}_3 \times \bar{e}_1 + x_3x_2'\bar{e}_3 \times \bar{e}_2$$

$$(2.19)\quad \bar{V} \times \bar{V}' = (x_2x_3' - x_3x_2')\bar{e}_1 + (x_3x_1' - x_1x_3')\bar{e}_2 + (x_1x_2' - x_2x_1')\bar{e}_3$$

ونكتب هذا التعبير رمزياً على شكل معين

$$\bar{V} \times \bar{V}' = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \end{vmatrix} \qquad (2.19)'$$

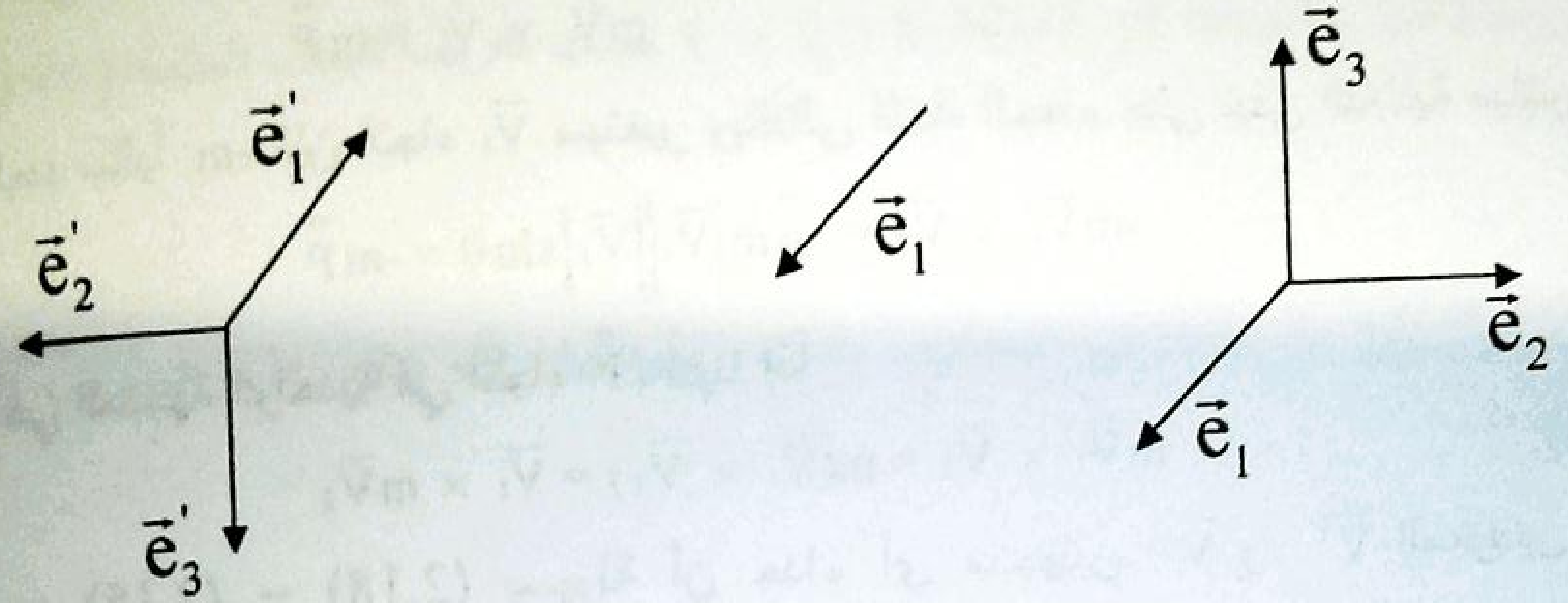
<u>مبرهنة 4</u> :

إن حصيلة الجداء المتجه لمتجهة حقيقية بمتجهة مشتبهة هي متجهة حقيقية.

لنبرهن هذه الخاصة كما فعلنا في سابقتها بالنسبة للمتجهات الواحدية. لتكن $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)$ متجهة حقيقية و $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ متجهة مشتبهة. إن الجداء المتجه لهاتين المتجهتين هو حسب (2.15) المتجهة $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)$ في نظمة المحاور المباشرة. لننتقل من نظمة المحاور المباشرة إلى النظمة غير المباشرة، الشكل.12 (5) ولننظر إلى نتيجة الجداء في هذه النظمة، فإذا ضربت مركبات $\bar{e}_3$ بـ 1- كانت متجهة حقيقية وإذا بقيت دون تغيير فهي مشتبهة.

ولما كانت $\vec{e}_1$ متجهة حقيقية فإن اتجاهها في الفضاء لا يتوقف على نظمة المحاور ولذا فإن مركباتها في نظمة المحاور غير المباشرة هي (0،0،1-)، الشكل .16 لذا نكتبها على الشكل

$$\vec{e}_1 = -\vec{e}\,'_1$$



الشكل.16

أما $\vec{e}_2$ المتجهة المشتبهة فستبقى مركباتها دون تغيير (0،1،0) (يتوقف اتجاهها على نظمة المحاور) ولذا فإن $\vec{e}_2$ أصبحت مساوية لـ $\vec{e}\,'_2$ في النظمة غير المباشرة وهكذا يصبح الجداء في النظمة غير المباشرة

$$-\vec{e}\,'_1 \times \vec{e}\,'_2 = -\vec{e}\,'_3 = \vec{e}_3$$

أي أن الجداء لم يغير اتجاهه (مركباته في النظمة غير المباشرة (0،0،1-)) فهو إذاً تعبير عن متجهة حقيقية ونكتب بالرمز انطلاقاً من هذه المبرهنة وسابقتها

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \vec{V}_3 \quad (2.20)$$

نرى بنفس الطريقة أن

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \vec{V}_3 \quad (2.21)$$

إن سوية اليسار واليمين في الفيزياء الجهرية تعني إذاً أن المتجهات المشتبهة ستدخل القوانين الفيزيائية على شكل جداء متجه مع متجهات حقيقية كي يكون هذا الجداء متجهة حقيقية لا يتغير اتجاهها عند الانتقال من نظمة محاور مباشرة إلى نظمة غير مباشرة. وسنرى فعلاً أن الحقل المغنطيسي $\vec{B}$ هو متجهة مشتبهة ولكن القوة المغنطيسية هي على الشكل

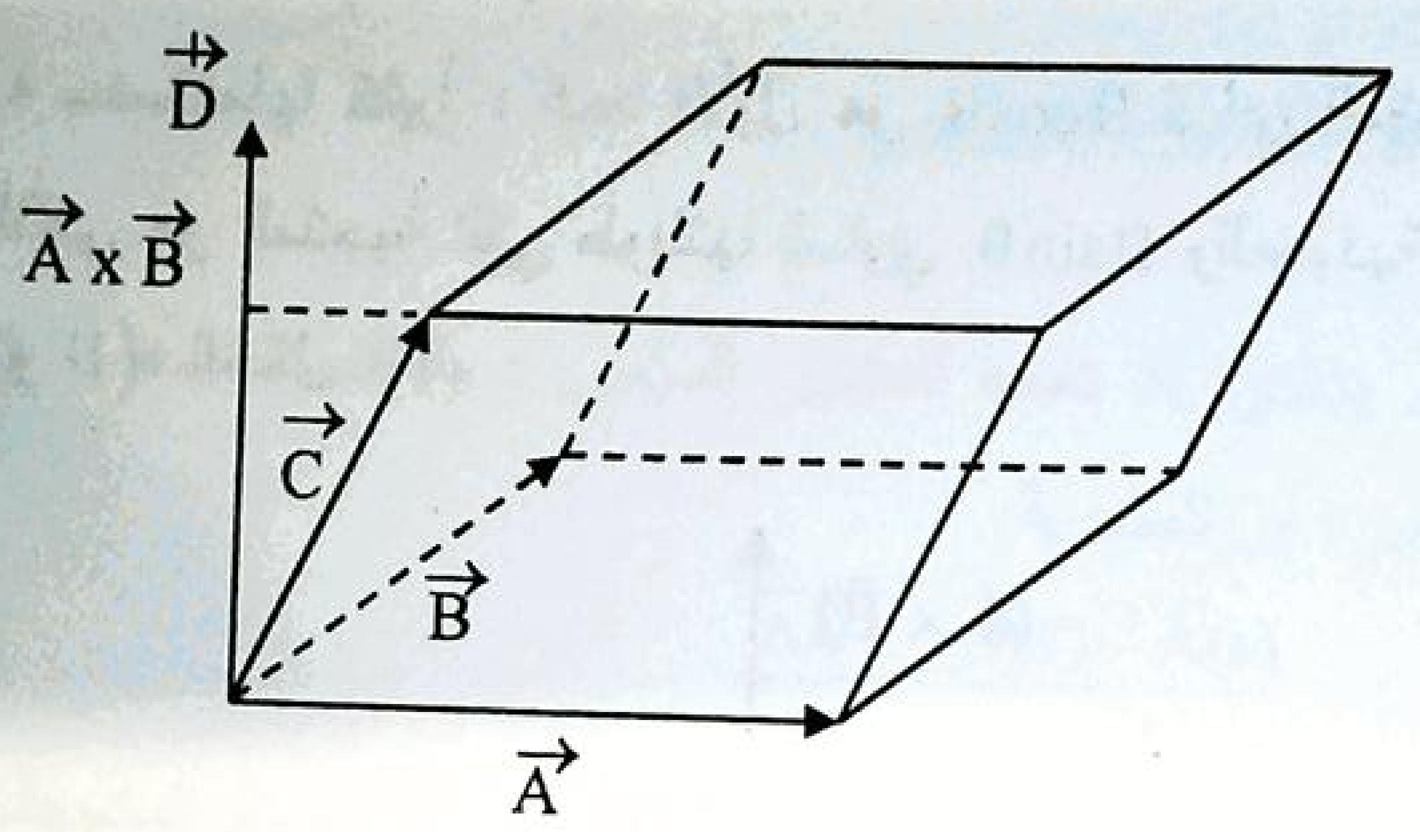
$$\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$$

حيث $\vec{v}$ متجهة السرعة التي سنعرفها في الفقرة القادمة و q شحنة الجسم المتحرك، وهكذا فإن القوة متجهة حقيقية كما يقتضي ذلك تعريف القوة كتفاعل بين جسمين لا علاقة له بنظم المحاور.

تطبيق 1 :

الجداء المختلط $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$: إن $\vec{A} \times \vec{B}$ هو سطح متوازي الأضلاع ذي الضلعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ وهو المتجهة $\vec{D}$ العمودية على المستوي $(\vec{A}, \vec{B})$ وجداؤه بـ $\vec{C}$ يعطينا حجم متوازي الوجوه المقام على هذه الحروف الثلاثة، الشكل.17. إن إشارة هذا الحجم موجبة أو سالبة حسبما تكون الثلاثية $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ مباشرة أو غير مباشرة. تكون الزاوية بين $\vec{A} \times \vec{B}$ و $\vec{C}$ حادة في الحالة الأولى ومنفرجة في الحالة الثانية. ولما كان الجداء هو الحجم فإن هذا يعني أن

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} = \Delta \qquad (2.22)$$



الشكل.17

نكتب هذا الجداء تحليلياً على شكل المعين

$$\Delta = \begin{vmatrix} x''_1 & x''_2 & x''_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \end{vmatrix} = \vec{D} \cdot \vec{C} \qquad (2.23)$$

حيث $\vec{A} = (x_1, x_2, x_3)$، $\vec{B} = (x'_1, x'_2, x'_3)$ و $\vec{C} = (x''_1, x''_2, x''_3)$. إن العلاقة (2.22) مكافئة لخواص المعينات؛ وتتغير إشارة المعين إذا بادلنا سطرين فيه $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = -(\vec{B} \times \vec{A}) \cdot \vec{C}$ الخ.

إن تعريفنا للجداء المختلط يبين أنه جداء سلمي لمتجهة مشتبهة بمتجهة حقيقية $\vec{C}$ فالعدد الناتج هو موجب أو سالب حسبما تكون الثلاثية مباشرة أو غير مباشرة فهو إذاً ليس عدداً سلمياً بالمعنى الصحيح لأن الأعداد السلمية تعريفاً لا علاقة لها بالفضاء المتجهي وبالمحاور لذا نسمي هذا النوع من الأعداد السلمية بالأعداد السلمية المشتبهة.

تطبيق 2 : الجداء الثلاثي.

لنحسب المتجهة الحقيقية

$$\vec{R} = \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$$

إن $\vec{B} \times \vec{C} = \vec{D}$ متجهة عمودية على المستوي الذي تعينه هاتان المتجهتان وبالتالي فإن الجداء $\vec{A} \times \vec{D}$ العمودي على $\vec{D}$ واقع في المستوي $(\vec{B}, \vec{C})$ يمكننا إذاً أن نكتبه على شكل مجموع لهاتين المتجهتين

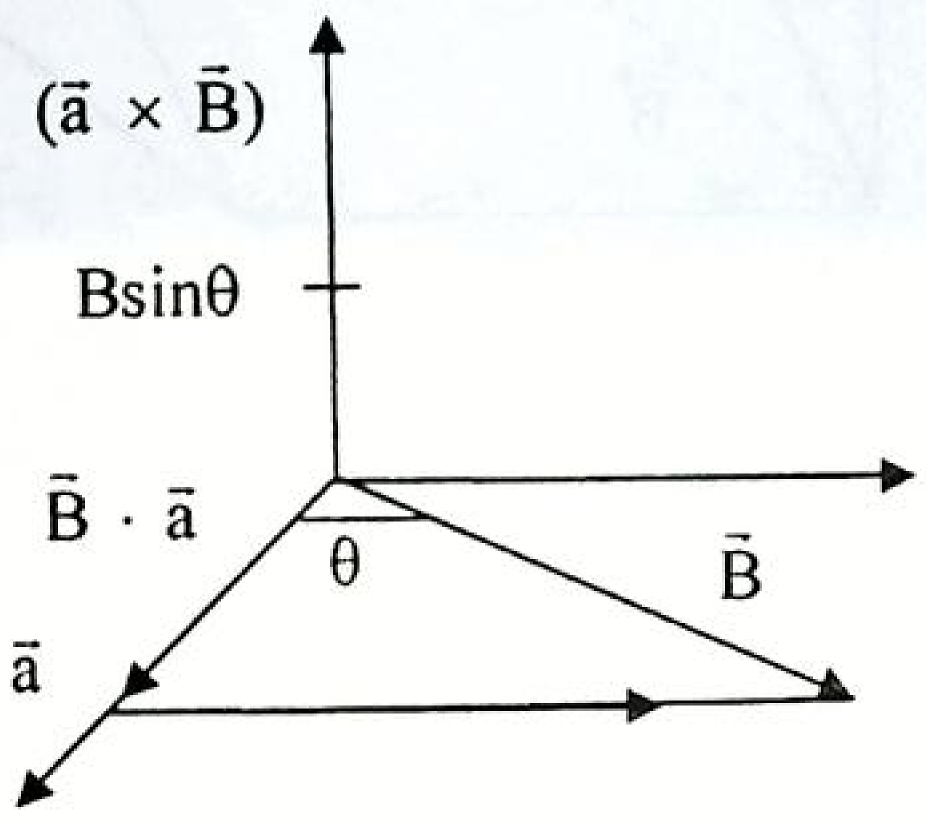
$$\vec{R} = \vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \lambda\vec{B} + \mu\vec{C} \qquad (2.24)$$

ولنحدد قيمة العددين λ و μ :

لنأخذ المتجهة الواحدية $\vec{a}$ في الفضاء. يمكننا كتابة أي متجهة $\vec{B}$ على الشكل

$$\vec{B} = \vec{a}\left(\vec{B} \cdot \vec{a}\right) + \vec{a} \times \left(\vec{B} \times \vec{a}\right) \qquad (2.25)$$

وهي علاقة هامة وبسيطة سنستعملها كثيراً : الحد الأول هو $\vec{a}\,B\cos\theta$ أي المتجهة الموازية لـ $\vec{a}$ التي طويلتها $B\cos\theta$ والحد الثاني هو المتجهة التي طويلتها تساوي $B\sin\theta$ والعمودية على $\vec{a}$ (في المستوي الذي تعينه المتجهتان $\vec{a}$ و $\vec{B}$)، الشكل.18،



الشكل.18

وإذا بدلنا الآن $\vec{a}$ بـ $\vec{A} = \left|\vec{A}\right|\vec{a}$ فإن حدي العلاقة في الطرف الأيمن سيضربان بـ $\left|\vec{A}\right|^2$. يمكننا إذاً أن نكتب

$$\vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{A}) = \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{A}) + \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{A}) \qquad (2.25)'$$

لنكتبها من أجل $\vec{B}$ و $\vec{C}$ بدلاً عن $\vec{A}$ و $\vec{B}$ فنحصل على

$$\vec{C}(\vec{B} \cdot \vec{B}) = \vec{B}(\vec{C} \cdot \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{B}) \qquad (2.25)''$$

نضرب طرفي العلاقة (2.24) بـ $\vec{B}$ فنحصل

$$\left[\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right)\right] \cdot \vec{B} = \lambda\,\vec{B} \cdot \vec{B} + \mu\,\vec{C} \cdot \vec{B} \qquad (2.26)$$

ونستعمل خاصة الجداء المختلط (2.22) بوضع $\vec{B} \times \vec{C} = \vec{D}$ لحساب الطرف الأيسر في هذه العلاقة إنه : $\left(\vec{A} \times \vec{D}\right) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) \times \vec{B} = \vec{A} \cdot \left(\vec{D} \times \vec{B}\right)$ ونلاحظ أن

$$\vec{B} \times \left(\vec{C} \times \vec{B}\right) = -\vec{B} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) \times \vec{B}$$

ونأخذ "(2.25) بعين الاعتبار فيصبح هذا الطرف في (2.26) مساوياً لـ

$$\bar{A} \cdot \left[\bar{C}\left(\bar{B} \cdot \bar{B}\right) - \bar{B}\left(\bar{C} \cdot \bar{B}\right)\right] = \lambda\, \bar{B} \cdot \bar{B} + \mu\, \bar{C} \cdot \bar{B}$$

فإذا كان الجداءان $\bar{B} \cdot \bar{B}$ و $\bar{C} \cdot \bar{B}$ مستقلين عن بعضهما أي إذا لم تكن $\bar{C}$ متناسبة مع $\bar{B}$ فإن $\lambda = \bar{A} \cdot \bar{C}$ و $\mu = -\bar{A} \cdot \bar{B}$ ومنه

$$\bar{A} \times \left(\bar{B} \times \bar{C}\right) = \left(\bar{A} \cdot \bar{C}\right) \cdot \bar{B} - \left(\bar{A} \cdot \bar{B}\right) \bar{C} \qquad (2.27)$$

3. المتجهات المشتقة والحركة

1.3- مشتق المتجهات بالنسبة لعدد سلمي :

لتكن لدينا المتجهة $\bar{A}$ ولتكن $\bar{A}$ تابعة للمتغير السلمي s ولنكتب $\bar{A}(s)$ و $\bar{A}(s')$ المتجهتين من أجل القيمتين s و s' للمتغير. إن للمتجهة

$$\frac{\Delta\bar{A}}{\Delta s} = \frac{\bar{A}(s') - \bar{A}(s)}{\Delta s} \qquad (3.1)$$

حيث $\Delta s = s' - s$ معنى واضحاً ما دمنا نستطيع القيام بعمليات جمع المتجهات، وضربها بأعداد حقيقية (موضوعات الفضاء المتجهي). نسمي مشتق المتجهة $\bar{A}$ بالنسبة للمتغير (s) ونكتب $\frac{d\bar{A}}{ds}$ الحد، في حالة وجوده، الذي تنتهي إليه العلاقة (3.1) عندما ينتهي الفرق $\Delta s = s' - s$ إلى الصفر.

$$\frac{d\bar{A}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\bar{A}}{\Delta s} \qquad (3.2)$$

لنأخذ كمتجهة $\bar{A}$ متجهة في الفضاء التآلفي ذي نقطة المبدأ O، ولنفرض أنها تعين وضع الجسم المتحرك بالنسبة للنقطة O سنرمز للمتجهة التي تعين الوضع بالنسبة لـ O من الآن فصاعداً بـ $\bar{r}$.

سنقبل الموضوعة التالية في الميكانيك النيوتوني :

م2 : "يسيل (ينساب) الزمن المطلق، الحقيقي والرياضي، بذاته، ومن حيث طبيعته الخاصة، بانتظام وبدون اعتبار لأي شيء خارجي ونسميه أيضاً المدة".

هذا هو كلام نيوتن بالحرف الواحد. ولكن نيوتن يناقض نفسه حين يقول من جهة إنه سيحلل كل شيء انطلاقاً من الواقع ولا يبين لنا من جهة أخرى من أين أتى بهذا الزمن المطلق الذي يسيل بانتظام الخ. ولكنه استوحى حتماً التجربة اليومية كما هو عليه الأمر في كل ما يقبله الإنسان دون تمحيص عميق.

م'2 : إن الزمن عدد سلمي وهو نفسه بالنسبة لكل الأجسام مهما تكن حركتها.

هذا يعني أننا إذا زودنا الأجسام المتحركة بميقاتيات فإن هذه الميقاتيات، مهما تكن الحركات الدورية التي بنيت على أساسها، ستدق الثواني بشكل متزامن دون تأخر أو سبق لبعضها بالنسبة للبعض الآخر وأياً كانت حركتها النسبية. هذا هو زمن نيوتن المطلق : إنه وسيط يسمح لنا بدراسة حركة الأجسام بالنسبة لبعضها بعضاً.

تعريفات 6 :

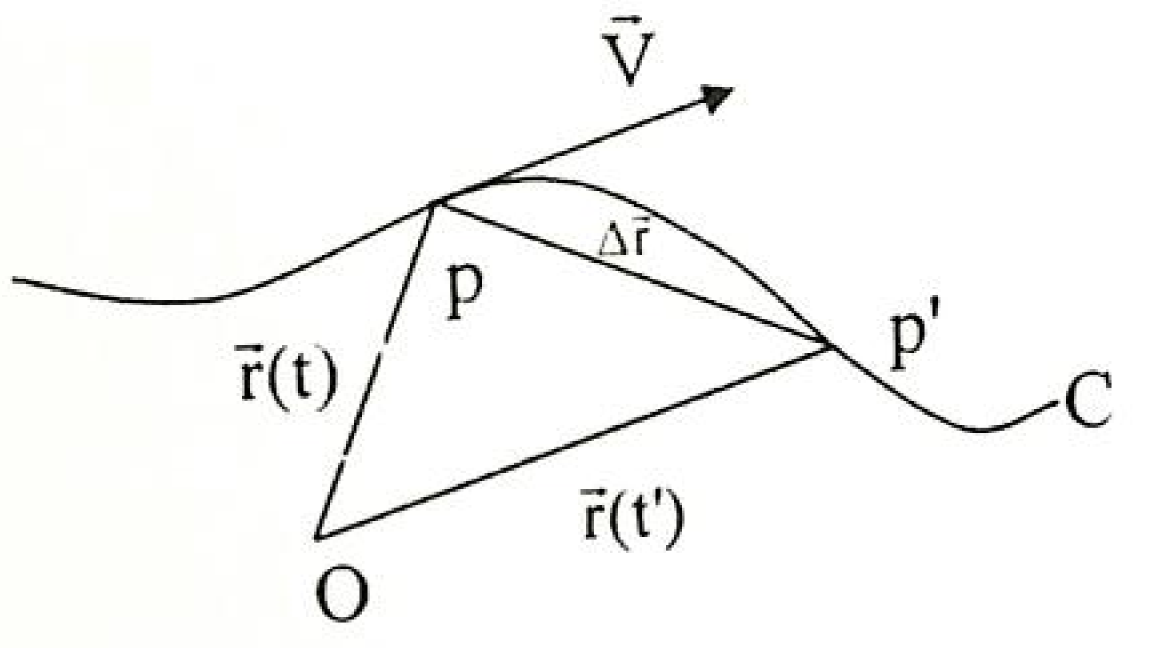
ولذا فسنسمي

$$\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{\bar{r}(t') - \bar{r}(t)}{\Delta t} \quad \text{حيث} \quad \Delta t = t' - t \qquad (3.1)'$$

متجهة السرعة الوسطية خلال المدة Δt وهو الزمن الذي يستغرقه ذهاب المتحرك من النقطة P إلى النقطة 'P، ونسمي الحد – إن وجد – الذي تنتهي إليه متجهة السرعة الوسطية عندما تتناهى المدة إلى الصفر بمتجهة السرعة الآنية ونكتب

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{r}(t') - \bar{r}(t)}{\Delta t} \qquad (3.2)$$

نسمي $|\bar{v}|$ القيمة المطلقة للسرعة. نسمي المنحني الذي ترسمه النقطة P كتابع للزمن بمحرك النقطة أو مسارها. كلما صغرت Δt قل الفرق بين $\overline{\Delta r}$ وبين القوس 'PP على المنحني واقتربت 'P من P واقتربت المتجهة $\frac{\overline{\Delta r}}{\Delta t}$ من اتجاه المماس على المنحني C، الشكل.19.



الشكل.19

إذا قرنا النقطة O بنظمة محاور عمودية وكتبنا

$$\bar{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (3.3)$$

فإن

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{pmatrix} \qquad (3.4)$$

ونسمي المشتق الثاني لـ $\bar{r}$ بالنسبة للزمن تسارعاً ونكتب

$$\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d\bar{v}}{dt} \qquad (3.5)$$

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} d^2x/dt^2 \\ d^2y/dt^2 \\ d^2z/dt^2 \end{pmatrix} \qquad (3.5)'$$

يمكننا بالطبع أخذ تغيرات $\vec{a}$ مع الزمن والحصول على المشتق الثالث، وهكذا. ولكننا سنرى أن قوانين الطبيعة تكتفي بالمشتق الثاني للتعبير عن التفاعلات. يمكننا أخيراً كتابة

$$\vec{r}(t) = r(t)\,\vec{e_r}(t) \qquad (3.6)$$

حيث $\vec{e_r}(t)$ هي المتجهة الواحدية في اتجاه $\overline{OP}$ و $r(t)$ طويلة المتجهة $\vec{r}$.

لدينا

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t)\,\vec{e_r}(t+\Delta t) - r(t)\,\vec{e_r}(t)}{\Delta t}$$

ونكتب الصورة على الشكل

$$\left(r(t) + \frac{dr}{dt}\Delta t\right)\left(\vec{e_r}(t) + \frac{d\vec{e_r}}{dt}\Delta t\right) - r(t)\,\vec{e_r}(t)$$

$$= \Delta t\left(\frac{dr}{dt}\,\vec{e_r}(t) + r\,\frac{d\vec{e_r}}{dt}\right) + \Delta t^2\left(\frac{dr}{dr}\,\frac{d\vec{e_r}}{dt}\right)$$

نهمل الحد الثالث في الطرف الأيمن باعتباره لا متناه في الصغر من الدرجة الثانية بحيث

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\vec{e_r}(t) + r\,\frac{d\vec{e_r}}{dt} \qquad (3.6)'$$

وهكذا فإن حدين يسهمان في متجهة السرعة حد ناتج عن تغير الطول $\frac{dr}{dt}$ (واتجاه ثابت) وآخر ناتج عن تغير الاتجاه (طول ثابت).

__تعريف 7__ :

نطلق اسم راسم الخطى Holograph على المنحني الذي ترسمه متجهة السرعة.

وهي ترجمة حرفية لتعبير فيه لبس، كان من الأفضل أن يسمى راسم السرع لأنه في الواقع المخطط القطبي للسرع : المنحني الذي ترسمه نهايات متجهة السرعة بدأ من نقطة واحدة هي القطب.

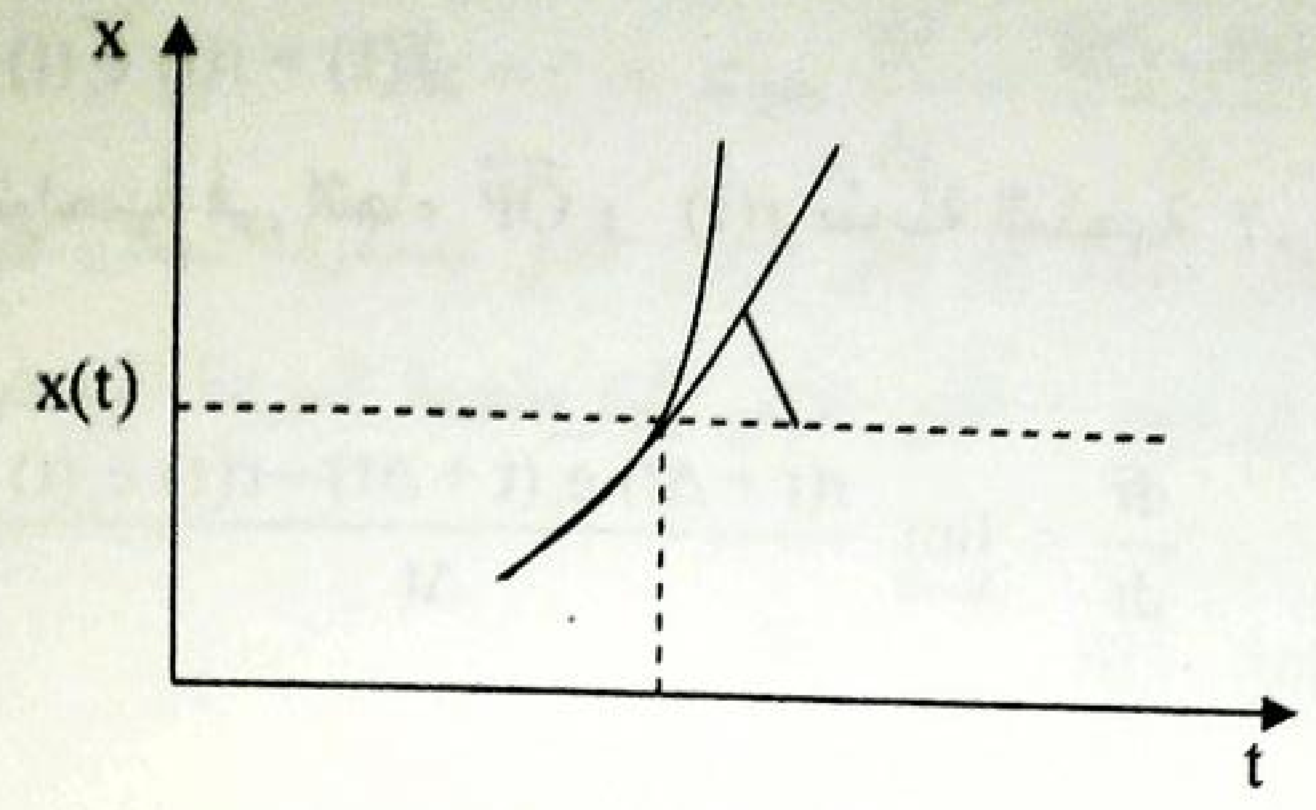
إن '(3.6) تعبر لنا عن طريقة اشتقاق جداء متجهة بعدد سلمي كلاهما تابع لـ t

$$\frac{d}{dt}\,a(t)\,\vec{A}(t) = \frac{da}{dt}\,\vec{A} + a\,\frac{d\vec{A}}{dt}$$

__2.3- الحركة المستقيمية :__

إن $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ عندما نأخذ المستقيم الذي تقع عليه الحركة كمحور أول، حينئذ تصبح $\vec{v}$ متجهة على نفس المحور $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$، حيث رمزنا بـ x' إلى مشتق x بالنسبة للزمن، $x' = \frac{dx}{dt}$. يمكننا أن نعين في

مستوٍ (t, x) تغيرات x بالنسبة للزمن فنحصل على منحن نسميه منحني القانون الميقاتي. يمثل الميل الزاوي للمماس القيمة الجبرية لمتجهة السرعة، الشكل.20.



الشكل.20

نقول عن الحركة المستقيمة إنها منتظمة إذا كانت

$$x' = \text{ثابت} \qquad (3.7)$$

وبالتالي $x'' = 0$ أو التسارع معدوم

نسمي متجهة الواحدة في اتجاه OX $\vec{e}_1$:

$\vec{r} = x\vec{e}_1$ ، $\vec{v} = x'\vec{e}_1$ و $(\vec{a} = \vec{0}$ في حالة الحركة المستقيمة المنتظمة)

لنسم الثابتة في (3.7) x'_o وهي السرعة في لحظة ما، $t_o = 0$، نأخذها كمبدأ لقياس الأزمنة. نكامل (3.7) فنحصل على $x = x'_o t +$ ثابتة، نسمي الثابتة هنا x_o وهي فاصلة المتحرك في لحظة البدء $t_o = 0$ فنحصل على العلاقة

$$x = x'_o t + x_o \qquad (3.8)$$

أي أن منحنى القانون الميقاتي مستقيم أيضاً.

أما إذا كان التسارع ثابتاً، عوضاً عن السرعة، فنقول عن الحركة إنها متسارعة بانتظام

$$x'' = \text{ثابتة} \qquad (3.9)$$

نسمي الثابتة، قيمة التسارع في اللحظة $t_o = 0$، x''_o، نكامل هذه العلاقة مرتين فنجد

$$x' = x''_o t + x'_o \qquad (3.10)$$

$$x = \frac{x''_o t^2}{2} + x'_o t + x_o \qquad (3.11)$$

منحنى القانون الميقاتي للحركة المستقيمة المتسارعة بانتظام قطع مكافئ محوره موازٍ لـ Ox.

نقول عن الوضع – فاصلة المتحرك هنا – x_o، وعن سرعته x'_o في اللحظة البدائية $t_o = 0$، إنهما الشرطان البدائيان اللذان يعينان تماماً قانون الحركة : القانون الميقاتي.

3.3- الحركة الدائرية :

محرك النقطة P دائرة C، نصف قطرها R. نأخذ مبدأ الإحداثيات في مستوى الحركة، في مركز الدائرة. لدينا

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

و R ثابتة طبعاً.

تعريف 8 :

نسمي مشتق θ بالنسبة للزمن السرعة الزاوية أو التواتر الزاوي ونرمز له بـ $\theta' = \omega(t)$. لدينا باشتقاق مركبات $\vec{r}$:

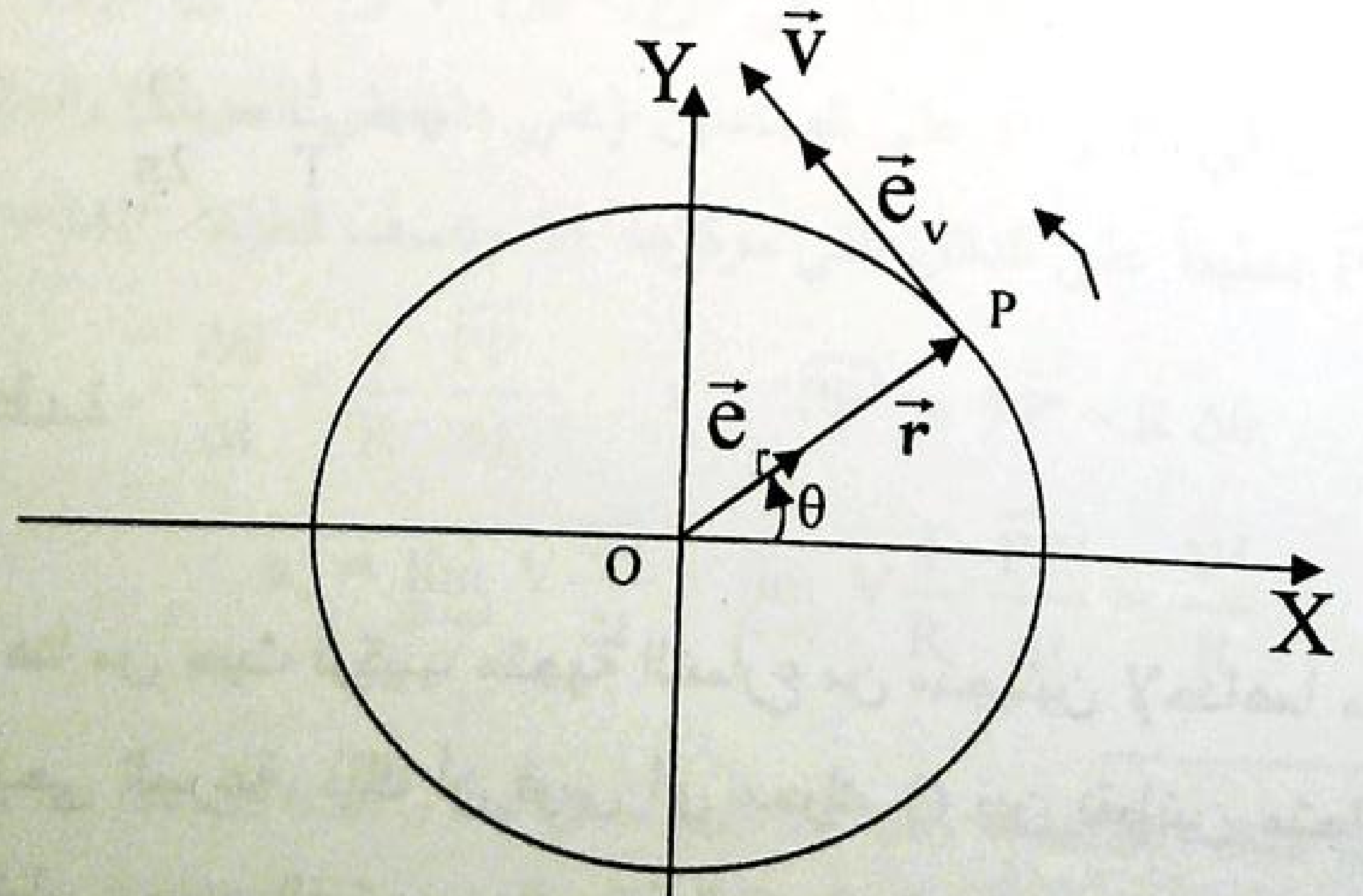
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -R\omega\sin\theta \\ R\omega\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = -R^2\omega\cos\theta\sin\theta + R^2\omega\sin\theta\cos\theta = 0 \quad (3.14)$$

وهذه هي خاصة بالدائرة : المماس عمودي على $\vec{r}$، نصف قطر الدائرة. نستعمل في كثير من الأحيان كما في (3.14) الجداء السلمي لمتجهتين للتحقق من تعامدهما.

$$v = |\vec{v}| = R|\omega| = R\left|\frac{d\theta}{dt}\right| \quad (3.15)$$

$\omega = \frac{d\theta}{dt}$ موجبة أو سالبة حسبما تتحرك P في اتجاه السهم أو في الاتجاه المعاكس وهي موجبة في الشكل.21



الشكل.21

لنحسب متجهة التسارع ولنسم $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ التسارع الزاوي

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -R\alpha\sin\theta - R\omega^2\cos\theta \\ R\alpha\cos\theta - R\omega^2\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 x - \alpha y \\ -\omega^2 y + \alpha x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

نرى أن متجهة التسارع هي مجموع متجهتين أولاهما موازية لـ $\vec{r} = \overline{OP}$ لأن مركباتها متناسبة مع x و y بالترتيب وثانيتهما موازية لـ $\vec{v}$ لأن مركباتها متناسبة مع -y و x. لنحدد طويلة المتجهة الأولى ولنرمز لها بـ $\vec{a}_\perp$ (ونقصد بذلك العمودية على متجهة السرعة).

$$\vec{a}_\perp = -\omega^2\vec{r} \quad (3.17)$$

$$|\vec{a}_\perp| = \omega^2|\vec{r}| = \omega(x^2 + y^2)^{1/2} = \omega^2 R \quad (3.17)'$$

ونظراً لـ (3.15)

$$= \frac{v^2}{R}$$

أما طويلة المتجهة الأولى ولنرمز لها بـ $\vec{a}_\parallel$ (ونقصد بذلك الموازية لمتجهة السرعة)

$$\vec{a}_\parallel = \frac{\alpha}{\omega}\vec{v} \quad (3.18)$$

$$|a_\parallel| = \frac{\alpha}{\omega}|\vec{v}| = \frac{\alpha}{\omega}\omega(x^2 + y^2)^{1/2} = \alpha|\vec{r}| = \alpha R \quad (3.18)'$$

الحركة الدائرية المنتظمة هي عندما تكون السرعة الزاوية ω ثابتة، $\alpha = 0$ والتسارع المماسي يساوي الصفر حسب (3.18). يبقى التسارع الناظمي المتجه نحو مركز الدائرة فقط.

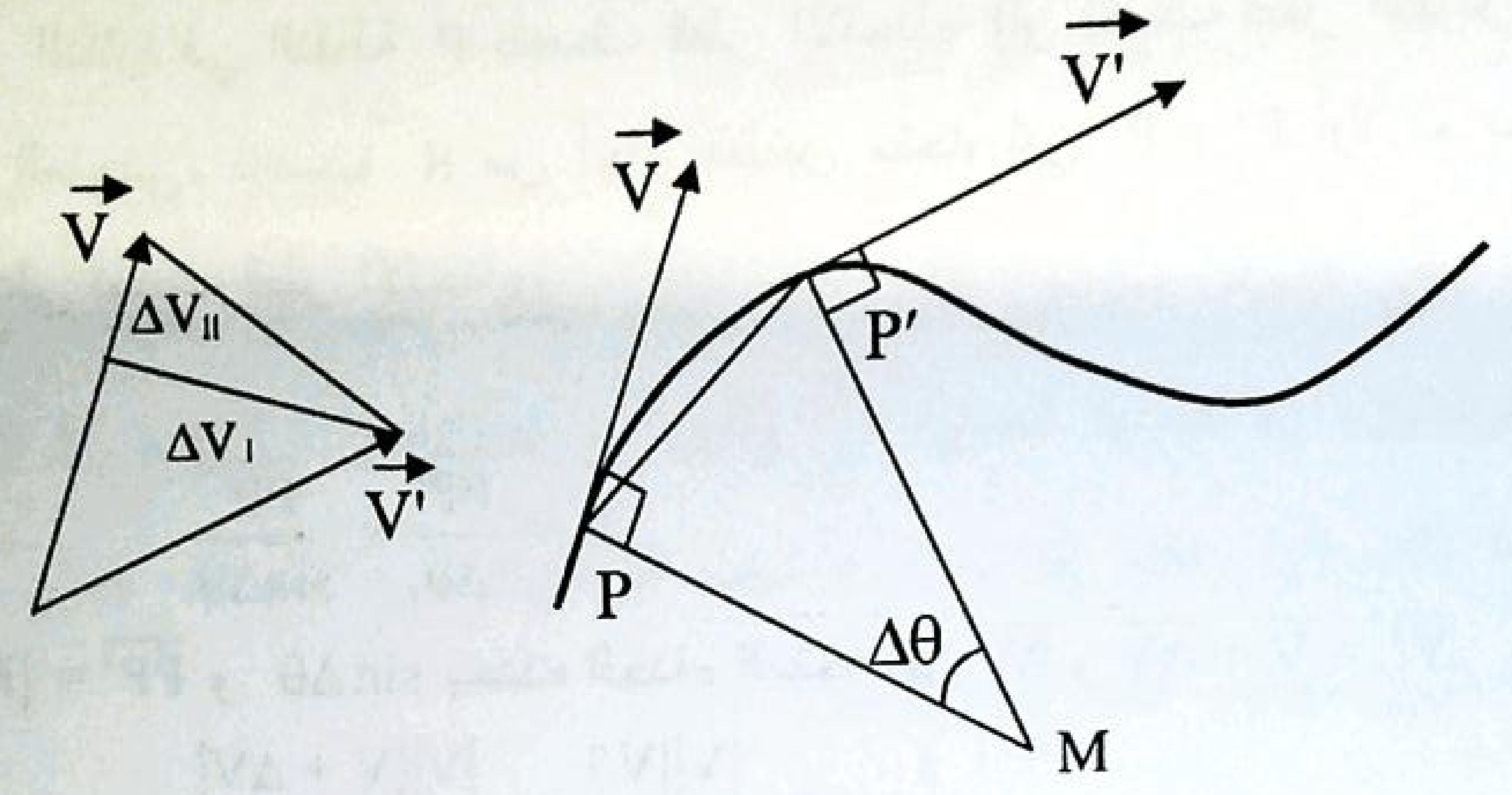
إن السرعة الزاوية هي الزاوية التي يمسحها نصف قطر الدائرة في واحدة الزمن. فالزمن اللازم لتحقيق دورة كاملة هو $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ونسميه بالدور ونسمي مقلوب هذا المقدار الذي يعين عدد الدورات الكاملة في واحدة الزمن (عدد المرات التي يمر فيها المتحرك في نفس النقطة P في واحدة الزمن) بالتواتر ونرمز له بـ ν

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

4.3- المستوي اللاصق :

يمكننا تعميم ما فعلناه هنا من حيث تركيب متجهة التسارع من متجهتين لإحداهما منحى السرعة وللأخرى منحى عمودي على منحى السرعة. ذلك أن قوس أي محرك C بين نقطتين متجاورتين P و P' ينطبق على قوس دائرة ذات قطر معين والفرق بين الحركة الدائرية والحركة بصورة عامة هو أن أقطار الدوائر المتتالية بين P و P' المتجاورتين، ثم بين P' و P" المتجاورتين، الخ. مختلفة عن بعضها بعضاً. تحدد

متجهتا السرعة $\vec{V}$ والتسارع $\vec{a}$ في النقطة P مستوياً مماساً للمحرك C، الذي لا تقع كل نقاطه بالضرورة على مستو واحد، نسميه المستوي اللاصق. لنسقط في هذا المستوي التسارع $\vec{a}$ على منحى $\vec{V}$ وعلى منحى عمودي على $\vec{V}$ ونسمي هذين المسقطين بالمركبة المماسية $a_{\parallel} = a_t$ والمركبة الناظمية $a_{\perp} = a_n$ ولنحسب هاتين المركبتين : لتكن $\vec{V}$ و $\vec{V'}$ متجهتي السرعة في النقطتين P و P' من المحرك، الشكل.22.



الشكل.22

لدينا تعريفاً التسارع في النقطة P :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V'} - \vec{V}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\overline{\Delta V_{\parallel}}}{\Delta t} + \frac{\overline{\Delta V_{\perp}}}{\Delta t} \right)$$

إن منحى $\overline{\Delta V_{\parallel}}$ هو منحى المماس، المثبت في علاقتنا، وطويلته تساوي القيمة المطلقة لتغيرات القيمة الجبرية لـ V (فكأن الحركة هي حركة مستقيمة) لدينا إذاً

$$a_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V_{\parallel}}{\Delta t} = \frac{dV}{dt} \qquad (3.19)$$

ومن جهة ثانية فإن $\Delta V_{\perp} = V\Delta\theta$ [6] حيث $\Delta\theta$ هي الزاوية بين V و V'. إن الزاوية $\Delta\theta$ هي الزاوية التي يصنعها العمودان المقامان في P و P' على المماسين (على متجهتي السرعة) والملتقيان في النقطة M. يمكن اعتبار القوس $\widehat{PP'}$ مطبقاً على الدائرة التي مركزها M ونصف قطرها $R = MP = MP'$.

لدينا إذاً $\widehat{PP'} \cong \overline{PP'} = R\,\Delta\theta$ ؛ $\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{1}{R}\dfrac{\widehat{PP'}}{\Delta t}$

ومنه

$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} V \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} V \frac{1}{R} \frac{\widehat{PP'}}{\Delta t} = \frac{V^2}{R} \qquad (3.20)$$

---

[6] $\Delta V_{\perp}$ هي في الواقع حسب الشكل $V'\sin\Delta\theta$ ولكن $\Delta\theta$ زاوية صغيرة جداً و $\sin\Delta\theta = \Delta\theta$ ؛ هذا من جهة ومن جهة ثانية فإن $V'\Delta\theta = ((V + \Delta V_{\parallel})^2 + \Delta V_{\perp}^2)^{1/2}\Delta\theta$ وبإهمالنا للمتناهيات في الصغر من الدرجة الثانية من الشكل $\Delta V \cdot \Delta\theta$ نحصل على $V'\Delta\theta = V\Delta\theta$.

ذلك أن $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{PP'}}{\Delta t}$ هي القيمة الجبرية V للسرعة، ولدينا كما في الحركة الدائرية :

$$a_n = \frac{V^2}{R} \qquad (3.20)'$$

تعريف 9 :

نسمي نصف قطر الدائرة في النقطة P بنصف قطر الانحناء (أو نصف قطر التقوس) لأنه هو الذي يحدد فعلاً تحدب المنحني. نحسب R من أجل نقطتين متجاورتين P و 'P أولاً ثم نجعل 'P تتناهى نحو P فنحصل على نصف قطر الانحناء.

لدينا

$$R = \frac{\overline{PP'}}{\Delta\theta} = \frac{\overline{PP'}}{\sin\Delta\theta}$$

ولتكن $\overline{PP'} = |\vec{r}' - \vec{r}| = \Delta r$ و $\sin\Delta\theta$ يحدده الجداء المتجه بين $\vec{V}$ و $\vec{V}' = \vec{V} + \overline{\Delta V}$

$$\frac{1}{\sin\Delta\theta} = \frac{|V||V'|}{|\vec{V}\times\vec{V'}|} = \frac{|V||V+\Delta V|}{|\vec{V}\times\overline{\Delta V}|}$$

نظراً لأن $\vec{V}\times\vec{V} = 0$.

ومنه

$$R = \frac{\Delta r(|V||V+\Delta V|)}{|\vec{V}\times\overline{\Delta V}|}$$

$$= \frac{\Delta r\,|V|^2}{|\vec{V}\times\overline{\Delta V}|} \qquad (3.21)$$

وذلك بإهمالنا للحد اللامتناهي في الصغر من الدرجة الثانية في الصورة.

قلنا إننا نحصل على نصف قطر الانحناء بجعل 'P تتناهى نحو P. نحصل على ذلك بتقسيم الصورة والمخرج في (3.21) على Δt وجعل Δt تتناهى نحو الصفر فنحصل على

$$R = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{\Delta r}{\Delta t}|V|^2}{\left|\vec{V}\times\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}\right|} = \frac{|V|^3}{|\vec{V}\times\vec{a}|} \qquad (3.22)$$

هذه العلاقة مستقلة طبعاً عن نظمة المحاور. لنختر نظمة متعامدة تكون فيها

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

حيث فتحة وفتحتان تعينان المشتق الأول والمشتق الثاني بالنسبة للزمن، لنحصل على

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}{\left[(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2\right]^{1/2}} \qquad (3.23)$$

وذلك باستعمال (2.19) التي تعطي التعبير التحليلي للجداء المتجه و(2.7) التي تعطي طويلة المتجهة.

5.3- الإحداثيات القطبية :

يمكننا تعيين وضع نقطة P في المستوي ببعدها عن النقطة O وبالزاوية θ التي يشكلها المستقيم الواصل بينها وبين O مع اتجاه ثابت في المستوى Δ.

يمكننا حساب متجهة سرعة P باستعمالنا للمحاكمة التي استعملناها لحساب مشتق $\overline{V}$ وبإسقاط $\overline{\Delta r}$ في اتجاه $\overline{r}$ ، $\overline{\Delta r_{\parallel}}$، وفي اتجاه عمودي على $\overline{r}$ ، $\overline{\Delta r_{\perp}}$، ونجد على هذا الشكل أن لمتجهة السرعة $\dot{\overline{r}} = \frac{d\overline{r}}{dt} = \overline{V}$ مركبتين، $V_{\parallel}$ قيمتها الجبرية $\frac{dr}{dt}$ (قارن مع العلاقة (3.19)) و $V_{\perp}$ قيمتها الجبرية $r\theta'$ (قارن مع العلاقة (3.20)) وهكذا إذا سمينا المتجهة الواحدية على OP ، $\overline{e}_r$، وعلى المستقيم العمودي على OP (نتيجة دوران موجب قدره $\frac{\pi}{2}$) $\overline{e}_{\perp}$ فإن

$$\overline{V} = r'\,\overline{e}_r + r\,\theta'\,\overline{e}_{\perp} \qquad (3.19)'$$

لنطبق من جديد نفس المحاكمة على كل من المتجهتين في الطرف الثاني لحساب التسارع فنجد بالنسبة للحد الأول

$$(r'\overline{e}_r)' = r''\,\overline{e}_r + r'\theta'\,\overline{e}_{\perp}$$

أما بالنسبة للحد الثاني، نلاحظ أن المتجهة العمودية عليه معاكسة لاتجاه $\overline{e}_r$ (حتى يكون الدوران موجباً من $\overline{e}_{\perp}$ إلى ($-\overline{e}_r$))، لدينا إذاً

$$(r\theta'\overline{e}_{\perp})' = (r\theta')'\overline{e}_{\perp} - (r\theta')\theta'\,\overline{e}_r$$
$$= (r'\theta' + r\theta'')\overline{e}_{\perp} - r\theta'^2\overline{e}_r$$

وهكذا فإن التسارع الكلي هو

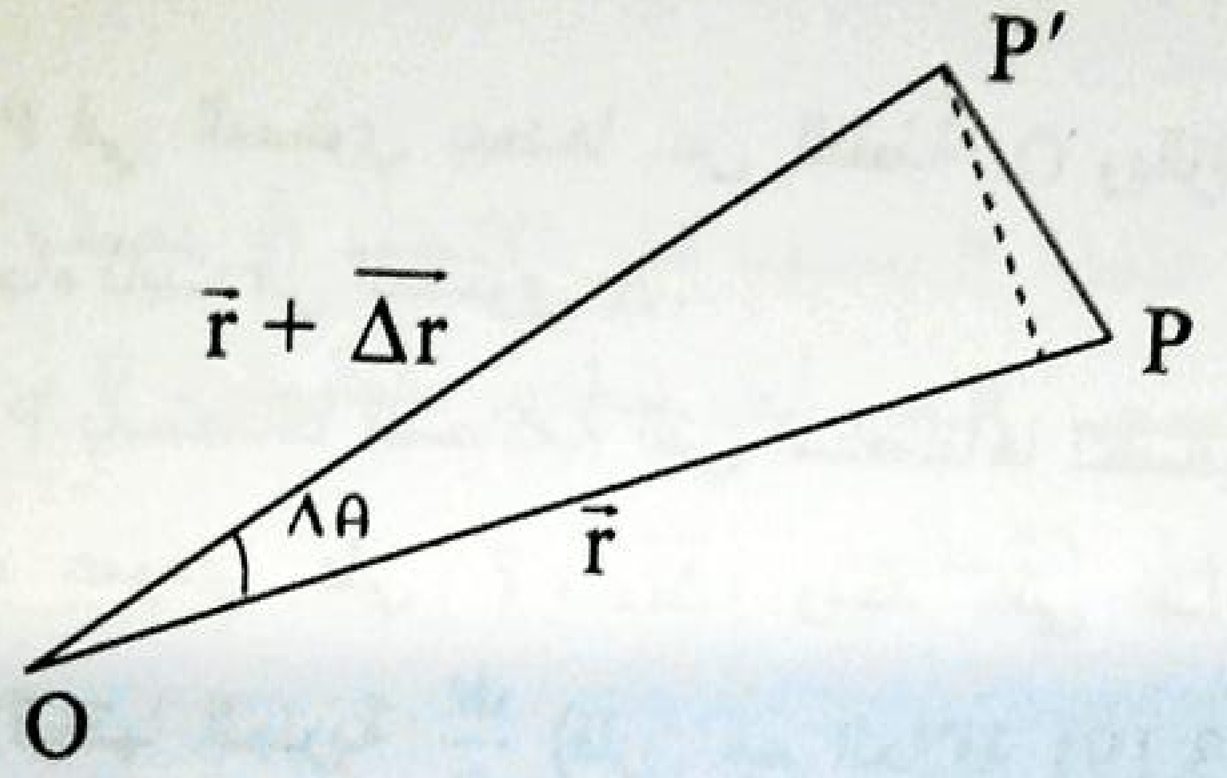
$$\overline{a} = (r'' - r\theta'^2)\overline{e}_r + (2r'\theta' + r\theta'')\overline{e}_{\perp} \qquad (3.19)''$$

ملاحظة :

ترينا العلاقة "(3.19) أن التسارع يبقى ناظمياً، في اتجاه الشعاع المتجه $\overline{Or} = r\overline{e}_r$، عندما يتحقق الشرط $2r'\theta' + r\theta'' = 0$ ، الذي نكتبه على شكل مشتق بالنسبة للزمن بضربه بـ r.

$$\frac{d}{dt}(r^2\theta') = 2rr'\theta' + r^2\theta'' = 0 \qquad (3.24)$$

إن المقدار $\frac{1}{2}\frac{r^2\Delta\theta}{\Delta t}$، كما يتضح من الشكل.23، ليس سوى سطح المثلث الصغير OPP' حيث اعتبرنا تساوي القوس مع الوتر $\overline{PP'} = \widehat{PP'}$. يعبر ثبات هذا السطح عن قانون كبلر الثاني القائل بتناسب السطوح الممسوحة مع الزمن اللازم لمسحها، كما سنرى في دراسة حركة الكواكب حول الشمس.



الشكل.23

إن كل ما فعلناه في الإسقاط الموازي والعمودي يعود إلى ما يلي : نكتب أي متجهة في المستوي على الشكل $\vec{r} = r\vec{e}_r$، نشتقها

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

ونلاحظ أن مشتق $\vec{e}_r$ يعود إلى حساب متجهة السرعة في الحركة الدائرية (طويلة $\vec{e}_r$ ثابتة تساوي 1) هذه المتجهة هي حسب (3.13) $\theta'\vec{e}_\perp$؛ لدينا إذاً

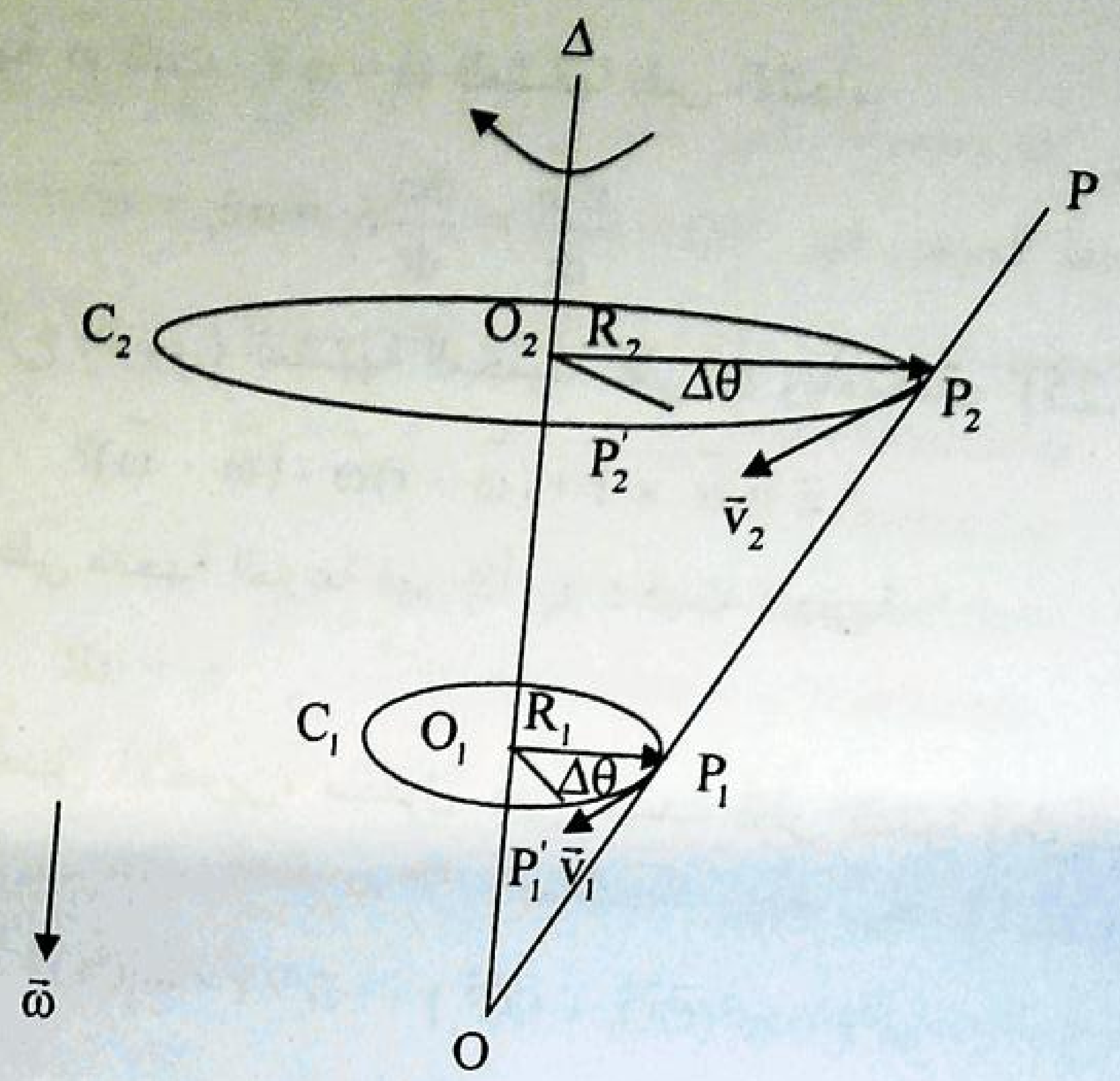
$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}' = r'\vec{e}_r + r\theta'\vec{e}_\perp$$

6.3- الحركة الدورانية :

إنها الحركة حول محور ثابت ونرمز له بـ Δ، حركة جسم صلب مثلاً.

لنفرض أن Δ يلتقي بالجسم الصلب في النقطة O، تولد مجموع نقاط الجسم الواقعة على المستقيم OP مخروطاً، لأن كل نقطة من نقاطه ترسم دائرة حول Δ. ولكي تبقى النقاط P_1، P_2، $P_i \ldots P$ على استقامة واحدة. أي حتى يبقى الجسم متماسكاً وجب أن تكون السرع الزاوية على الدوائر C_1، C_2، $\ldots C_i$ متساوية، الشكل.24. وهكذا فإن سرعة أي نقطة P_i هي $R_i\omega$ حيث R_i نصف قطر الدائرة التي ترسمها النقطة P_i حول Δ و ω هي السرعة الزاوية المشتركة

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$



الشكل.24

إن $R_i\omega$ تعين القيمة الجبرية لـ V_i ولكنها لا تعين اتجاه المتجهة $\vec{V}_i$ ولذلك سنعرف متجهة مشتبهة جديدة محمولة على Δ نسميها متجهة السرعة الزاوية $\vec{\omega}$ بحيث يمكن كتابة

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \overline{O_iP_i} \qquad (3.25)$$

حيث $\overline{O_iP_i}$ هي المتجهة المحمولة على نصف قطر الدائرة C_i التي ترسمها النقطة $\vec{P}_i$. إن اتجاه $\vec{\omega}$ في الشكل.24 معاكس لاتجاه OZ على Δ، لأن اتجاه الدوران من P_i إلى P_i' سالب ولكن الثلاثية $(\vec{\omega}, \overline{O_iP_i}, \vec{V}_i)$ مباشرة طبعاً. لنلاحظ إذا أردنا أن نكتب سرعاً لا تتوقف على أنصاف أقطار الدوائر أن $\overline{O_iP_i} = \overline{OP_i} - \overline{OO_i}$ ولما كان الجداء $\vec{\omega} \times \overline{OO_i} = \vec{0}$ لتوازي هاتين المتجهتين فإن

$$\frac{d\overline{OP_i}}{dt} = \vec{V}_i = \vec{\omega} \times \overline{OP_i} \qquad (3.25)'$$

وهذا من أجل كل نقطة في الجسم الصلب تعينها المتجهة $\vec{r} = \overline{OP}$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (3.25)'$$

لنحسب متجهة التسارع ملاحظين أن مشتق جداء متجه[7] يحقق العلاقة

$$(\vec{a} \times \vec{b})' = \vec{a}' \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b}'$$

وهكذا فإن التسارع في الحركة الدورانية هو

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (3.26)$$

[7] لدينا تعريفاً $(\vec{a} \times \vec{b})' = \lim \left(\vec{a} + \frac{\overline{\Delta a}}{\Delta t}\right) \times \left(\vec{b} + \frac{\overline{\Delta b}}{\Delta t}\right) - \vec{a} \times \vec{b} = \lim \frac{\overline{\Delta a}}{\Delta t} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{\overline{\Delta b}}{\Delta t}$.

إن اتجاه السرعة الزاوية $\vec{\omega}$ ثابت $\vec{\omega} = \omega\,\vec{e}_z$ فلمشتقها نفس الاتجاه.

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\vec{e}_z = \alpha\vec{e}_z = \vec{\alpha}$$

نسمي $\vec{\alpha}$ بمتجهة التسارع (الزاوي) المشتبهة المحمولة على Δ وباستعمال '(3.25) و (2.27) نجد

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + (\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})\vec{r} \qquad (3.26)'$$

إن الحد الأول محمول على متجهة السرعة فهو إذاً a_t : قيمته الجبرية

$$a_t = \alpha R \qquad (3.27)$$

والحد الباقي، مجموع الحدين الأخيرين، محمول على نصف قطر الدائرة وطويلته $\omega^2 R$ وباتجاه مركز الدائرة، ذلك لأن

$$\omega^2\vec{r} = \omega^2(\overline{OO_i} + \overline{O_iP_i}) \;;\; \vec{\omega} \cdot \vec{r} = \omega|OO_i|$$

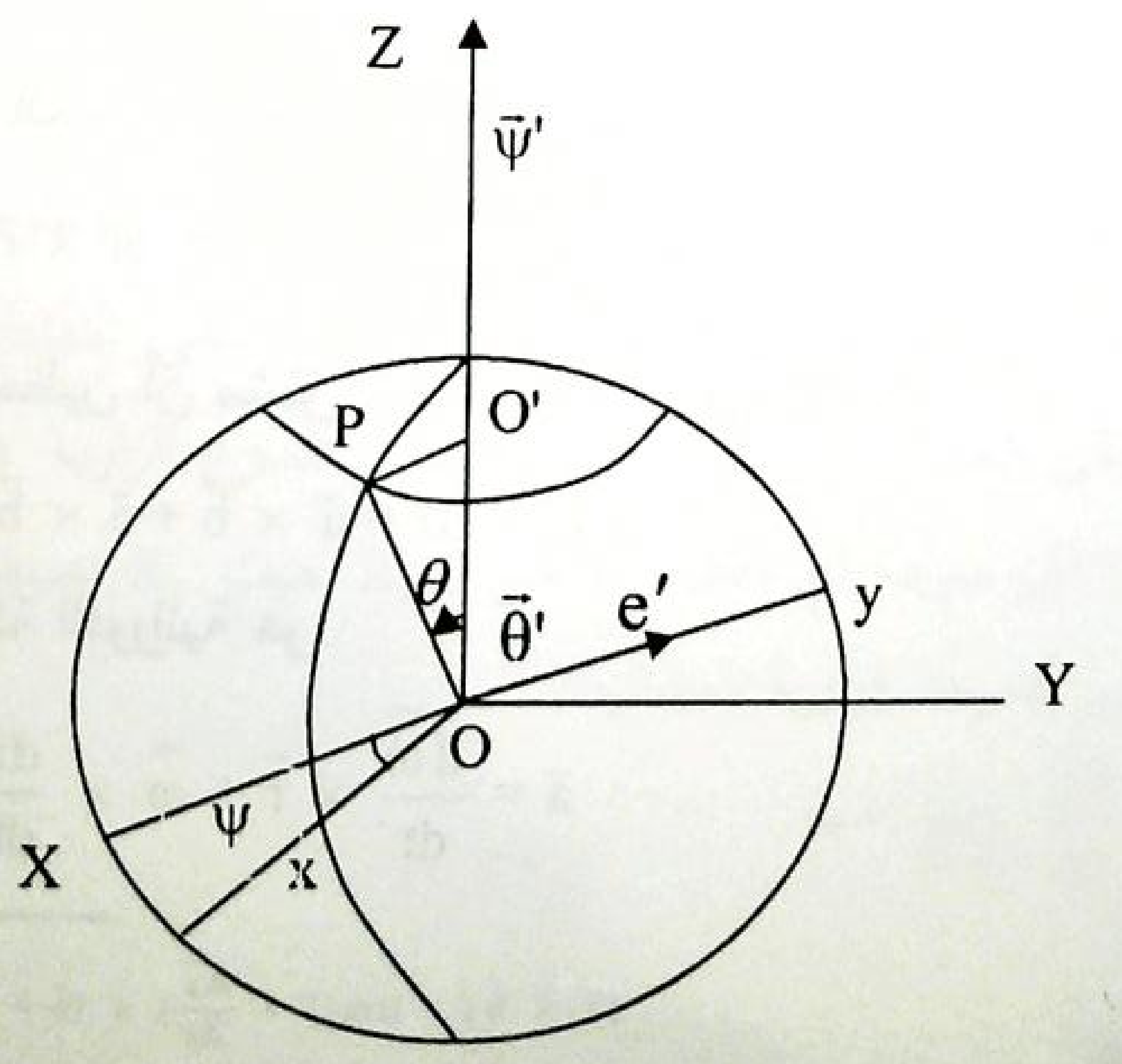
ومنه

$$\vec{a}_\perp = (\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{\omega} - \omega^2\vec{r} = \omega^2\overline{OO_i} - \omega^2(\overline{OO_i} + \overline{O_iP_i}) = -\omega^2\overline{O_iP_i} \qquad (3.28)$$

7.3– الحركة على سطح كروي :

نعين وضع النقطة P على سطح الكرة ذات نصف القطر r بتعين زاويتين : الزاوية ψ التي يحدثها خط طول النقطة P مع خط طول ثابت، أي مع المحور الثابت OX، والزاوية θ بين نصف القطر المتجه والمحور الثابت OZ والتي تعين خط العرض. وهكذا فإن إحداثيات P هي، الشكل.25

$$\begin{cases} X = r\sin\theta\cos\psi \\ Y = r\sin\theta\sin\psi \\ Z = r\cos\theta \end{cases} \qquad (3.29)$$



الشكل.25

إن السرعة الزاوية الأولى ψ' محمولة على OZ والثانية θ' على Oy العمودية على مستوى خط الطول. أما نصف قطر خط العرض فهو $r\sin\theta = O'P$ ذو المساقط $r\sin\theta\cos\psi$، $r\sin\theta\sin\psi$، 0، وسرعة P وتسارعها عليه حسب (3.13) و(3.16) اللتين تعينان سرعة وتسارع الحركة الدائرية.

$$\overline{V}_{ع} = \begin{cases} -\psi' r\sin\theta\sin\psi \\ \psi' r\sin\theta\cos\psi \end{cases} \qquad (3.30)_{ع}$$

$$\bar{a}_{ع} = \begin{cases} -\psi'^2 r\sin\theta\cos\psi - \psi'' r\sin\theta\sin\psi \\ -\psi'^2 r\sin\theta\sin\psi + \psi'' r\sin\theta\cos\psi \end{cases} \qquad (3.31)_{ع}$$

وكذلك فإن مركبتي نصف قطر خط الطول OP في مستواه OZ، Ox هما $r\cos\theta$ و $r\sin\theta$. نطبق هنا أيضاً (3.13) و(3.16) على هذين المسقطين، اللذين يلعبان دور x و y على الترتيب، لنجد مركبات السرعة والتسارع بالنسبة للمحورين OZ و Ox، ومن بعدها بالنسبة لـ OZ و OX، OY أي أننا سنبدل في (3.13) و (3.16) x بـ $r\cos\theta$ الواقعة على OZ و y بمسقطيها $r\sin\theta\cos\psi$ و $r\sin\theta\sin\psi$ على OX و OY فنحصل على

$$\overline{V}_{ط} = \begin{cases} \theta' r\cos\theta\cos\psi \\ \theta' r\cos\theta\sin\psi \\ -\theta' r\sin\theta \end{cases} \qquad (3.30)_{ط}$$

$$\bar{a}_{ط} = \begin{cases} -\theta'^2 r\sin\theta\cos\psi + \theta'' r\cos\theta\cos\psi \\ -\theta'^2 r\sin\theta\sin\psi + \theta'' r\cos\theta\sin\psi \\ -\theta'^2 r\cos\theta - \theta'' r\sin\theta \end{cases} \qquad (3.31)_{ط}$$

إن جمع مركبات المتجهات (3.30) $(\overline{V}_{ع} + \overline{V}_{ط})$ هو ما يعطيه الاشتقاق المباشر للمركبات (3.29) حيث لدينا

$$\overline{V}_{ع} + \overline{V}_{ط} = \begin{cases} X' = \theta' r\cos\theta\cos\psi - \psi' r\sin\theta\sin\psi \\ Y' = \theta' r\cos\theta\sin\psi + \psi' r\sin\theta\cos\psi \\ Z' = -\theta' r\sin\theta \end{cases} \qquad (3.32)$$

أما مجموع $\bar{a}_{ع} + \bar{a}_{ط}$ فيختلف عن مركبات المشتق الثاني للمركبات (3.29)

$$\begin{cases} X'' = -\theta'^2 r\sin\theta\cos\psi + \theta'' r\cos\theta\cos\psi - \psi'^2 r\sin\theta\cos\psi \\ \qquad - \psi'' r\sin\theta\sin\psi - 2\theta'\psi' r\cos\theta\sin\psi \\ Y'' = -\theta'^2 r\sin\theta\sin\psi + \theta'' r\cos\theta\sin\psi - \psi'^2 r\sin\theta\sin\psi \\ \qquad + \psi'' r\sin\theta\cos\psi + 2\theta'\psi'\cos\theta\cos\psi \\ Z'' = -\theta'^2 r\cos\theta - \theta'' r\sin\theta \end{cases} \qquad (3.33)$$

بالمقدار

$$\overline{V}_c = 2\overline{\psi'} \times \overline{V}_{ط} \qquad (3.34)$$

تعريف 10 :

نسمي حركة النقطة P بالنسبة للجملة OXYZ حركة مطلقة وحركتها بالنسبة لخط الطول حركة نسبية. أما حركتها بالنسبة لخط العرض والتي تعين في حقيقة الأمر حركة الجملة OxyZ بالنسبة للجملة OXYZ حركة جر ونرمز لسرع هذه الحركات على الترتيب بـ $\overline{V}_a$، و $\overline{V}_r = \overline{V}_L$ و $\overline{V}_e = \overline{V}_\ell$ لدينا من (3.32)

$$\overline{V}_a = \overline{V}_r + \overline{V}_e$$

نرمز بـ $\vec{a}$ لمتجهات التسارع فنحصل من (3.33) و (3.34) على

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + 2\overline{\psi'} \times \overline{V}_r \qquad (3.35)$$

نسمي الحد الأخير أي الفرق بين التسارع المطلق ومجموع تسارع الجر والتسارع النسبي بتسارع كوريوليس Coriolis.

الفصل الثالث

أسس الميكانيك النيوتوني

1. القوى.. 75
2. أسس الميكانيك النيوتوني........................ 87
3. تطبيقات ابتدائية................................ 96

الفصل الثالث: أسس الميكانيك النيوتوني

1. القـوى

1.1- مفهوم القوة :

يرتبط مفهوم القوة، ككل مفاهيم الفيزياء التقليدية الجهرية، بمنشئه الفيزيولوجي، بالجهد العضلي الواجب بذله لتغيير هيئة جسم ما وتشويهه من ضغط وكسر ولي الخ. أو لتغيير وضع كل الجسم في الفضاء أي لتحريكه، يطلق عادة على القوة في الحالة الأولى اسم القوة الساكنة وعلى القوة في الحالة الثانية القوة الديناميكية.

ولكننا نعلم اليوم أنه لا فرق من وجهة النظر المجهرية بين هذين الصنفين من القوى، فالتشويه مثلاً هو إبعاد جزيئات الجسم عن بعضها أي تحريكها مسافات قصيرة قد يعود بعدها الجسم إلى حالته الأولى أو لا يعود حسب أهمية القوى التي تؤثر فيها جزيئاته على بعضها بعضاً والتي نعبر عنها بمرونة الجسم؛ ولذلك فمن الأفضل في محاولتنا تعريف القوة الحديث عن التفاعل بين الأجسام. فقولنا إن قوة ما تؤثر على جسم A يعني أن جسماً أو أجساماً أخرى $B_1 ... B_i$.. قد مارست هذه القوة. فالقوة إذاً تعبير عن تفاعل الأجسام، عن عدم وجود الجسم A وحده في الكون أو على الأقل في حيز ما منه. ونصنف القوى حسبما تكون المسافات التي تفصل بين الأجسام المتفاعلة كبيرة أو صغيرة ونسمي الأولى قوى عن بعد والأخرى قوى تماس، ولكن هذا المفهوم غامض أيضاً لأننا لم نحدد بدقة مفهوم المسافات الكبيرة والصغيرة : كبيرة أو صغيرة بالنسبة لماذا ؟ إن هذا الغموض مرتبط ارتباطاً صميمياً بالفيزياء كلها لأن المفاهيم الفيزيائية لا تتضح إلا بالتقريبات المتتالية ولا يمكن أن يكون لتعريف فيزيائي محتوى دقيق إلا بقدر ما نجد أجهزة ملائمة تقيس بدقة معينة المقدار المعرف. وهذا ما يجعل التعريف الفيزيائي يختلف اختلافاً جوهرياً عن التعريف الرياضي الذي لا يحتاج إلى أي تقريب أو أي جهاز لتحديد مفهومه فهو يقوم على تصور كائنات رياضية، تسمى في الهندسة الإقليدية مثلاً نقطاً ومستقيمات ومستويات، الخ. تُعرّف بينها علاقات، علاقة التوازي مثلاً، وتخضع لعدد ما من الموضوعات وتعين علاقات جديدة بالبراهين المنطقية وحدها، تسمى مبرهنات.

2.1– القوى عن بعد :

لنحاول رغم هذه الملاحظة الإبقاء على تصنيف القوى حسب المسافات، ولنقل إننا ننظر إلى جسمين على أنهما غير متماسين إذا كانت المسافة التي تفصل بين سطحيهما أكبر بكثير من المسافة بين الذرات التي هي بحدود[1] (10^{-10}م) بحيث لا تتفاعل ذرات وجزيئات سطح الجسم الأول مباشرة مع ذرات وجزيئات سطح الجسم الثاني، وإنما يتفاعل الجسم الأول ككل مع الثاني ككل. يكفي لذلك أن تكون المسافة الفاصلة بين السطحين مساوية إلى بضع مئات أو بضع آلاف من المرات المسافة الذرية أي بحدود الميكرون. يمكننا أن نعطي كمثل عليها الثقل وهو القوة التي تجعل الأجسام الموجودة على مقربة من سطح الأرض تسقط سقوطاً حراً نحوها وهو أولى القوى عن بعد المعروفة. نقيس الثقل بقياسنا لتمدد نابض عُلق الجسم في طرفه الأسفل. ولكن الثقل ليس سوى تعبير عن قوة الجاذبية الكونية التي تجعل الأجسام تتجاذب بقوة متناسبة طرداً مع كتلتها وعكساً مع مربع المسافة الفاصلة بينها. تتناقص شدتها مع المسافة طبعاً ولكن هذا التناقص بطيء بمعنى أن هذه القوة لن تصبح معدومة إلا عندما تصبح المسافة بين الجسمين لا متناهية. إن هذه القوة هي واحدة من قوى التفاعل الأساسية في الطبيعة.

إن المثل الآخر الذي نعرفه للقوى عن بعد هي القوى الكهربائية التي تجعل الأجسام تتجاذب أو تتنابذ بقوة متناسبة طرداً مع شحنتها الكهربائية : تتجاذب عندما تكون الشحنتان من نوعين مختلفين، إحداهما موجبة والأخرى سالبة وتتنابذ عندما تكونان من نوع واحد. تتناسب القوى هنا أيضاً عكساً مع مربع المسافة وهي كقوة التفاعل التثاقلي بعيدة المدى (تتناهى نحو الصفر عندما تتناهى المسافة إلى ما لا نهاية). هذه القوى الكهربائية الراكدة هي شكل من أشكال القوى الكهرطيسية، إحدى قوى التفاعل الأساسية الأربعة في الطبيعة.

يمكننا أن نتصور إذاً جسيمين A وA' تعرفهما شحنتاهما الكهربائيتان q وq'. هذا من جهة ومن جهة ثانية فقد رأينا أنهما معرفتان كنقطتين في الفضاء بالمتجهة التي مبدؤها إحدى هاتين النقطتين ونهايتها النقطة الثانية ("(1.4).1) فمن الطبيعي إذاً أن يُعرّف التفاعل عن بعد بين النقطتين بمتجهة $\vec{F}$ تابعة للمقدارين الفيزيائيين q وq' وللمتجهة $\overline{AA'}$ ولذا نكتب

$$\vec{F}_{\text{كهربائية}} \sim qq'\frac{\overline{AA'}}{r^3} \qquad (1.1)$$

وكذلك الأمر بالنسبة للتفاعل التثاقلي حيث تعرف m وm' الجسيمين A وA'

$$\vec{F}_{\text{تثاقلية}} \sim mm'\frac{\overline{AA'}}{r^3} \qquad (1.2)$$

---

[1] هذا أيضاً تحديد غامض لنقل أنه "بحدود" تعني عدداً من المرات تتراوح بين 1 إلى عشرة وسطياً.

وضعنا إشارة تناسب ~ بدلاً عن إشارة التساوي لأننا لم نعرف بعد أبعاد ووحدات القوى ووضعنا r^3 في المخرج حتى تكون طويلة $\vec{F}$ متناسبة مع معكوس r^2 فقط : $|\overline{AA'}| = r$.

وهكذا وإذا انطلقنا من مفهوم الجسيمات كنقط فإن القوى متجهات تجمع حسب قاعدة متوازي الأضلاع. وهذا ما نتحقق منه في كل التطبيقات اليومية، فإذا كان المراد من القوة مثلاً تغيير حركة الجسم أي تغيير متجهة سرعته فإن لهذا التغيير، التسارع، وللمسبب له نفس الطبيعة المتجهة الموجودة لمتجهة السرعة فالثقل مثلاً منحى هو المنحى العمودي، منحى الشاقول، في النقطة التي يوجد فيها الجسيم (أو مركز كتلة الجسم كما سنرى) قرب سطح الأرض واتجاه من الأعلى إلى الأسفل وشدة تختلف من جسم إلى آخر هي ثقل الجسم أو وزنه.

ولكن ماذا تعني المتجهة عندما تكون طويلتها بحدود الفيرمي، 10^{-15}م، أي عندما يكون الجسيمان المتفاعلان (البروتون والنوترون مثلاً) في داخل النواة ؟ هل يمكننا متابعة الكلام عن جسيمين، عن نقطتين هندسيتين تفصلهما مسافة هي أصغر ما يمكن للفيزيائي أن يتخيله ؟ قلنا في الفصل الأول إن التفاعلات المجهرية لا تدرس في نطاق الميكانيك التقليدي وإن إطارها الحقيقي هو ميكانيك الكم. سنرى أن مفهوم القوة سيفقد عندئذ من أهميته وأن مفاهيم أخرى ستحل محله للتعبير عن التفاعلات المجهرية بما في ذلك التفاعلات الكهربائية التي عرفناها بالمتجهة (1.1). وسنبقي على مفهوم القوة كمتجهة في التفاعلات بعيدة المدى التثاقلية والكهربائية فقط، أي في نطاق الفيزياء الجهرية تحديداً.

3.1– مفهوم الحقل :

لنبدأ بتجربة بسيطة تتمثل في وضع جسم ما، مدفئة مثلاً، في حيز ما من الفضاء في صالة كبيرة. إن وجود هذه المدفئة قد غير من خواص الفضاء المحيط بها. نحس فيزيولوجياً بهذا التغيير ونقيسه فيزيائياً بأن نضع في كل نقطة محراراً يعين درجة حرارتها، معطياً عدداً، وسنجد أن هذا العدد يختلف من نقطة إلى أخرى فهو كبير قرب المدفئة وهو أكبر منه في جوار السقف من النقاط القريبة من أرض الصالة. نقول إن المدفئة قد خلقت في الفضاء المحيط بها حقلاً سلمياً، مادمنا نعينه بعدد حقيقي واحد، هو حقل درجة الحرارة. إن هذا الحقل موجود بغض النظر عن إحساسنا الفيزيولوجي به أو عن وجود المحرار الذي يقيسه. سنرمز لهذا الحقل بـ $f(\vec{r})$: $f(x, y, z)$ حيث $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ هي المتجهة التي تعين وضع نقطة ما في الفراغ، ولا يهمنا هنا معرفة كيفية تغير هذا التابع بتغيرات إحداثيات النقطة $\vec{r}$ وعلاقة هذا التغيير بالغاز الذي يملأ الفضاء وحركته. نكتفي بالقول إن شكل التابع $f(\vec{r})$ هو أبسط ما يكون عندما يكون الفضاء المحيط بالمدفئة خاوياً.

لنعمم هذه الفكرة على القوى بعيدة المدى ولنقل إن مجرد وجود الشحنة الكهربائية q في النقطة A قد غير صفات الفضاء الخاوي المحيط بها، فخلقت في كل نقطة منه حقلاً كهربائياً يمكننا قياسه كما في مثل المحرار السابق بأن نضع في كل نقطة تهمنا A' شحنة كهربائية q' نسميها شحنة القياس أو شحنة التجربة، بحيث تشعر هذه الشحنة بالقوة التي تعبر عنها العلاقة (1.1) وكما أن القوة متجهة فإن الحقل الكهربائي، خلافاً لحقل درجة الحرارة، متجهة أيضاً نرمز لها بـ $\vec{E}(\bar{r})$ ويحددها، ككل المتجهات، في نظمة محاور معينة، إعطاء مركباتها الثلاثة ولنرمز لها بـ E_x ، E_y ، E_z

$$E_x(\bar{r}) = E_x(x, y, z)$$

$$E_y(\bar{r}) = E_y(x, y, z)$$

$$E_z(\bar{r}) = E_z(x, y, z)$$

أي أن كل مركبة تابعة لإحداثيات النقطة A' بالنسبة لإحداثيات النقطة A، التي اعتبرناها هنا كنقطة مبدأ. نكتب العلاقة (1.1) على الشكل

$$\vec{F}_{qq'} \sim q'\vec{E} \sim q'q\frac{\overline{AA'}}{r^3} \qquad (1.3)$$

ونقرأ : إن شدة القوة المؤثرة على الشحنة q' الموجودة في A' نتيجة وجود الشحنة q في A تتناسب مع q' ومع الحقل الكهربائي، وهو حقل متجه، الذي تحدثه الشحنة q في النقطة A'. إن هذا الحقل يتناسب مع $q\frac{\overline{AA'}}{r^3}$ ونكتب

$$\vec{E} \sim q\frac{\overline{AA'}}{r^3} \qquad (1.4)$$

وكذلك الأمر بالنسبة للتفاعل التثاقلي : تحدث الكتلة m الموجودة في A حقلاً تثاقلياً متجهاً في كل نقطة من نقاط الفضاء نرمز له بـ $\vec{C}$؛ تشعر الكتلة m' الموجودة في A' بقوة تعطيها العلاقة

$$\vec{F} = m\,\vec{C} \qquad (1.5)$$

ويتناسب حقل التثاقل الذي تحدثه الكتلة m في النقطة A' مع $m\frac{\overline{AA'}}{r^3}$ ونكتب

$$\vec{C} \sim m\frac{\overline{AA'}}{r^3} \qquad (1.6)$$

قد يبدو مفهوم الحقل للقارئ المبتدئ مفهوماً تافهاً إذ إن كل ما يخلص إليه هو استبدال أحد المضروبين في الجداء $\left(\frac{q\overline{AA'}}{r^3}\right) \cdot q'$ برمز جديد $\vec{E} = q\frac{\overline{AA'}}{r^3}$؛ وهو في الواقع غير ذي أثر على دراستنا للميكانيك النيوتوني حيث تلعب القوى المعطاة على الشكل (1.1) و (1.2) مثلاً الدور الأساسي وحيث نعتبر الجسم A المنتج للقوة ثابتاً، لا يتغير وضعه أو صفاته الأخرى مع الزمن : فالشمس "أزلية" لا يتغير فيها شيء عندما ندرس حركة الكواكب بالنسبة إليها، وكذلك الأرض عندما ندرس سقوط الأجسام على مقربة منها، وكذلك المدفئة التي أعطيناها كمثل. أما إذا لم تكن المسببات مستقرة، أما إذا اعتبرنا مثلاً أننا

أوقدنا نار المدفئة في لحظة معينة وأننا أخذنا بتغيير سعارها فمتى وكيف ستشعر نقطة الفضاء بما حدث؟ كيف سيتغير حقل درجة الحرارة السلمي مع الزمن ؟ وكذلك إذا حدث انفجار هائل في الشمس، متى ستصل إشارة هذا الانفجار نقطة الفضاء، الأرض مثلاً، وكيف ستتأثر به ؟ إن مفهوم الحقل وحده هو الذي سيسمح لنا بالإجابة على هذه الأسئلة. وهو الذي يسمح لنا منذ الآن بالقول إن صفات الفضاء تتغير شيئاً فشيئاً مع الزمن $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t)$، حيث t هو الزمن، وأن خَبَرَ ما يحدث في الشمس أو إشارة الحادث في الشمس لن يصلنا ولن تشعر به أجهزتنا أياً كانت إلا بعد مرور فترة زمنية من وقوعه ($8\frac{1}{3}$ دقيقة). أما إذا تخلينا عن مفهوم الحقل وعدلنا عن مفهوم انتشار الحدث فإن التفاعلات تصبح آنية. إن أي تغيير في A ستشعر به A' فور وقوعه؛ إذا حركنا A فإن بعده عن A' قد تبدل وتبدلت القوة المؤثرة على A' فوراً وهذا أمر غير مقبول على غرار قولنا أن إدخال المدفئة سيغير فوراً درجة حرارة نقطة ما من الصالة.

والخلاصة إن مفهوم الحقل يخلصنا من مفهوم التفاعل الآني، المسمى أحياناً الفعل عن بعد، ليحل محله مفهوم انتشار الفعل وضرورة انتظار فترة زمنية للشعور به. هذا من جهة، ومن جهة ثانية فإن قولنا إن الحقل موجود في نقطة من نقاط الفضاء وأنه يكفي للشعور به وضع جهاز ما، شحنة تجربة، أو كتلة تجربة (أو جهاز مستقبل لأمواج الراديو إذا شئنا) يعني أننا أعطينا للفضاء صفات فيزيائية فهو لم يعد الوعاء الذي يحوي المادة وإنما أصبح يتأثر بها وشريكاً لها وهذا أمر مهم جداً بالنسبة لتطور المفاهيم في الفيزياء كما سيتضح لنا. إن فارادي Faraday هو الذي أدخل هذا المفهوم في منتصف القرن التاسع عشر.

ليكن لدينا الآن عدد من النقاط المادية A_1، $A_2 \dots A_i . A_n$، ذات الكتل m_1، m_2، $\dots m_i \dots m_n$، تغير كل واحدة من هذه النقاط المادية صفات الفضاء بأن تحدث في نقطة A' مثلاً تبعد عنها بالترتيب المسافات r_1، r_2، $\dots r_i \dots r_n$ الحقول التثاقلية $\vec{C}_1$، $\vec{C}_2$، $\dots \vec{C}_i \dots \vec{C}_n$، التي تعطينا العلاقة (1.6)

$$\vec{C}_i \sim m_i \frac{\overrightarrow{A_iA'}}{r_i^3}$$

بمعنى أن الكتلة m' الموجودة في A' ستشعر فيما إذا كانت تتأثر بالكتلة m_i وحدها بالقوة

$$\vec{F}_i \sim m'm_i \frac{\overrightarrow{A_iA'}}{r_i^3}$$

ومادامت القوى، وحقول القوى، متجهات فإننا سنقبل أن الحقل الكلي في النقطة A' بوجود كل الكتل هو مجموع الحقول

$$\vec{C} = \vec{C}_1 + \vec{C}_2 + \dots \vec{C}_2 = \sum_{i=1}^{n} \vec{C}_i \qquad (1.7)$$

$$\vec{C} \sim \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\overrightarrow{A_iA'}}{r_i^3} \qquad (1.8)$$

وأن القوة التي تتأثر بها كتلة التجربة m' في A' هي حسب (1.5) و (1.8)

$$\vec{F} = m'\vec{C} \sim m'\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\overline{A_i A'}}{r_i^3} \qquad (1.8)'$$

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \sim \sum_{i=1}^{n} m' m_i \frac{A_i A'}{r_i^3} \qquad (1.7)'$$

أي أن كل نقطة A_i تؤثر على A' كما لو كانت وحدها المؤثرة بشكل مستقل عن وجود النقطة الأخرى A_j $(j \neq i)$. وهذا ما يعرف باسم مبدأ التوضيع[2] Superposition (أي تنضيد القوى بعضها على بعض في النقطة A') إن دراسة المد والجزر مثلاً هي بأن نجمع حقلي التثاقل الناتجين عن الشمس والقمر على سطح الأرض.

4.1- قوى التماس :

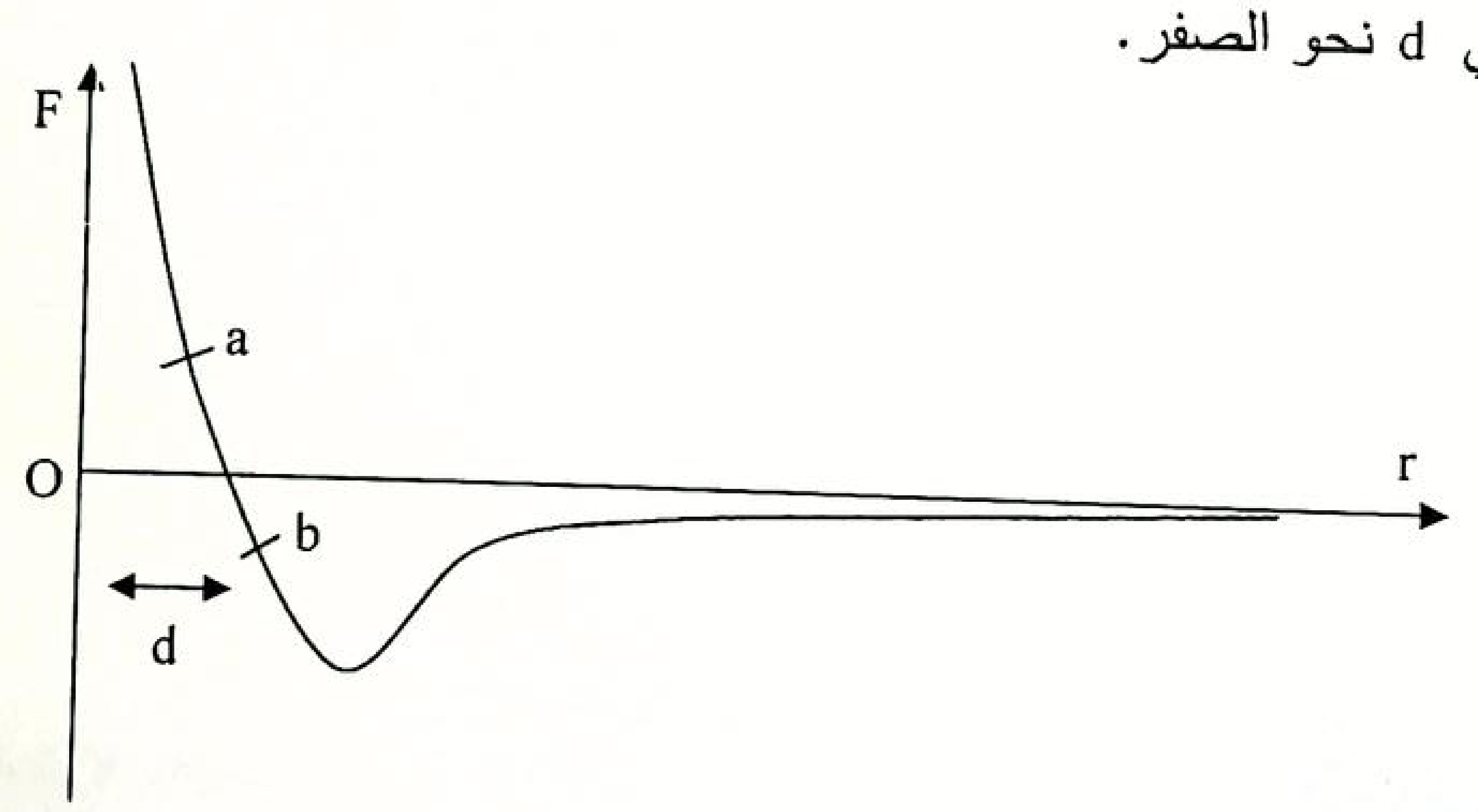
حددنا في §2.1 القوى عن بعد بقولنا إنها القوى التي تجعل جسمين ما يتفاعلان مع بعضهما ككل مهملين تفاعلات جزئيات سطح الجسم الأول مع جزئيات سطح الجسم الثاني "لبعد" هاتين المجموعتين عن بعضهما. وعلى العكس من ذلك فإننا سنأخذ بعين الاعتبار تفاعلات مجموعات الجزيئات والذرات مع بعضها سواء في داخل الجسم الواحد، كالفتل والشد والضغط وكذلك قوى التماسك في الجسم الصلب - وهي القوى التي تمنع الجسم من تغيير هيئته بأن تمنع جزئياته من الحركة بالنسبة لبعضها بعضاً -، أو بين جسمين كقوى الاحتكاك الناتجة عن وضع الجسم الأول على سطح الجسم الثاني وإبقاء الجسمين بدون حركة على سطح التماس (احتكاك ساكن) أو تحريكهما (احتكاك ديناميكي). ولما كانت التفاعلات تحدث بين ذرات وجزيئات، دون أي إسهام للنويات فيها، فهي تفاعلات تثاقلية أو كهربائية، أي أنها تنتج عن سلسلة من التفاعلات الأولية المتناسبة مع عكس مربع المسافة. فعندما نضع كرة على سطح طاولة مثلاً فإن التفاعل هو بين القوة التثاقلية التي تجذب الكرة نحو الأرض وبين القوى الكهربائية الراكدة التي تجذب جزئيات المادة التي صنعت منها الطاولة إلى بعضها وتجعلها تتماسك وتقاوم القوة التثاقلية. أما التفاعل بين السطحين المتماسين فهو ناتج عن اصطدام مجهري بين الجزيئات واهتزازها أو اقتلاعها من السطح الخ.

إن كون قوى التماسك في الجسم ناتجة عن تفاعلات كهربائية راكدة لا يعني أنها سهلة الدراسة بل إنها، على العكس من ذلك، تشكل جزءاً هاماً من فيزياء الجسم الصلب التي تدرس التركيب الهندسي للبلورات وحركات الأيونات الاهتزازية حول وضع وسطي وتعطي مستعملة ميكانيك الكم دالة تغير القوى بين

---

[2] يكافئ مبدأ التوضيع كما رأينا أخذنا للتفاعل التثاقلي والكهربائي كمتجهة. وهذا في رأينا ليس موضوعة إضافية وإنما نتيجة لموضوعات الفضاء الإقليدي ولتعريف القوة كتفاعل.

الجزيئات مع المسافة. وهي دالة معقدة وتتوقف على كون الجزيء متناظراً كهربائياً أم لا. نقول عن الجزيء إنه متناظر، أو إنه ذو تناظر كروي، عندما ينطبق مركز كتلة (وشحنة) الإلكترونات على مركز النويات ويبدو الجزيء عن بعدٍ حيادياً كهربائياً، أما إذا كان التناظر غير كامل فيبدو الجزئي عن بعد وكأنه مكون من شحنتين متساويتين بالقيمة المطلقة إحداهما موجبة تنطبق، في حالة الذرة، على مركز النواة والثانية سالبة تنطبق على مركز كتلة الإلكترونات المحيطة؛ يبدو الجزيء كثنائي قطب ويسمى جزيئاً قطبياً كجزيء الماء مثلاً. أما جزيء الأوكسجين O_2 فهو غير قطبي. ومع أن هذه الجزيئات حيادية كهربائياً فإنها تتجاذب بقوة تتناسب مع $\frac{1}{r^7}$ عندما تكون الجزيئات بعيدة عن بعضها أما قوة تجاذب الجزيئات القطبية فهي أكبر من ذلك. وفي كل الأحوال تتنابذ الجزيئات بقوة كبيرة عندما تكون المسافة بينها صغيرة، الشكل.1. إن قوى التجاذب على مسافات كبيرة والتنابذ على مسافات صغيرة (كبيرة بالنسبة للأنغستروم (10^{-10}م) وأجزائه (10^{-9} - 10^{-8})) هي التي تفسر تماسك الأجسام الصلبة بفعل الأولى وعدم التحام الجزيئات مع بعضها بفعل الثانية. تصبح القوى مساوية للصفر من أجل مسافة وسطية d. يتطلب تقريب الجزيئات من بعضها إلى مسافة أقصر من d قوة ضغط كبيرة جداً لتزايد القوة النابذة تزايداً سريعاً مع تناهي d نحو الصفر.

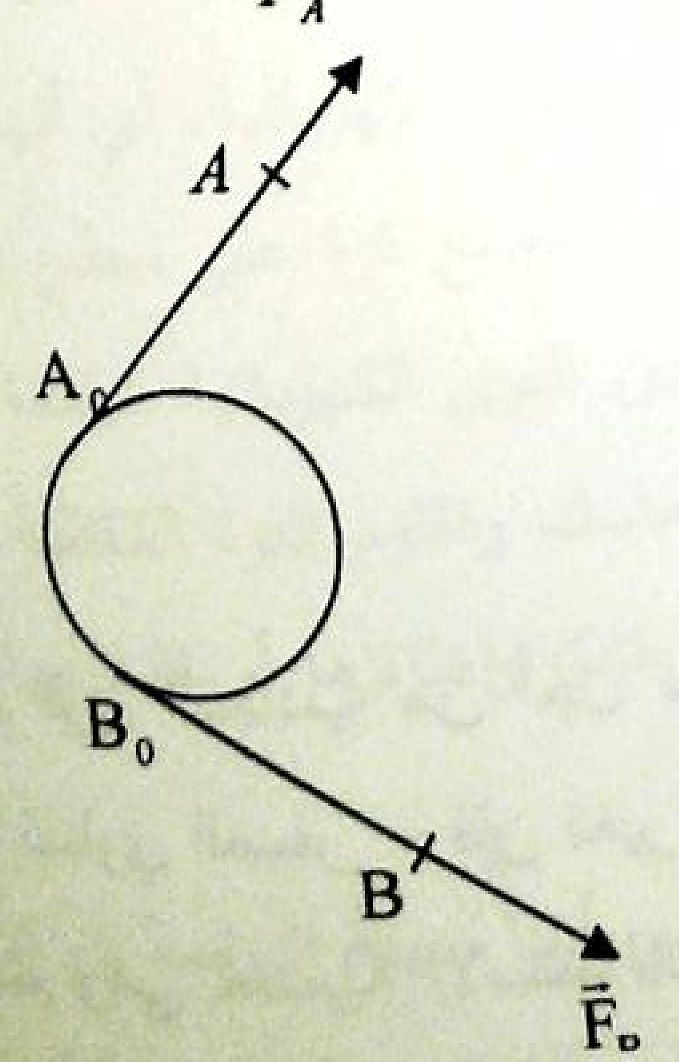


الشكل.1

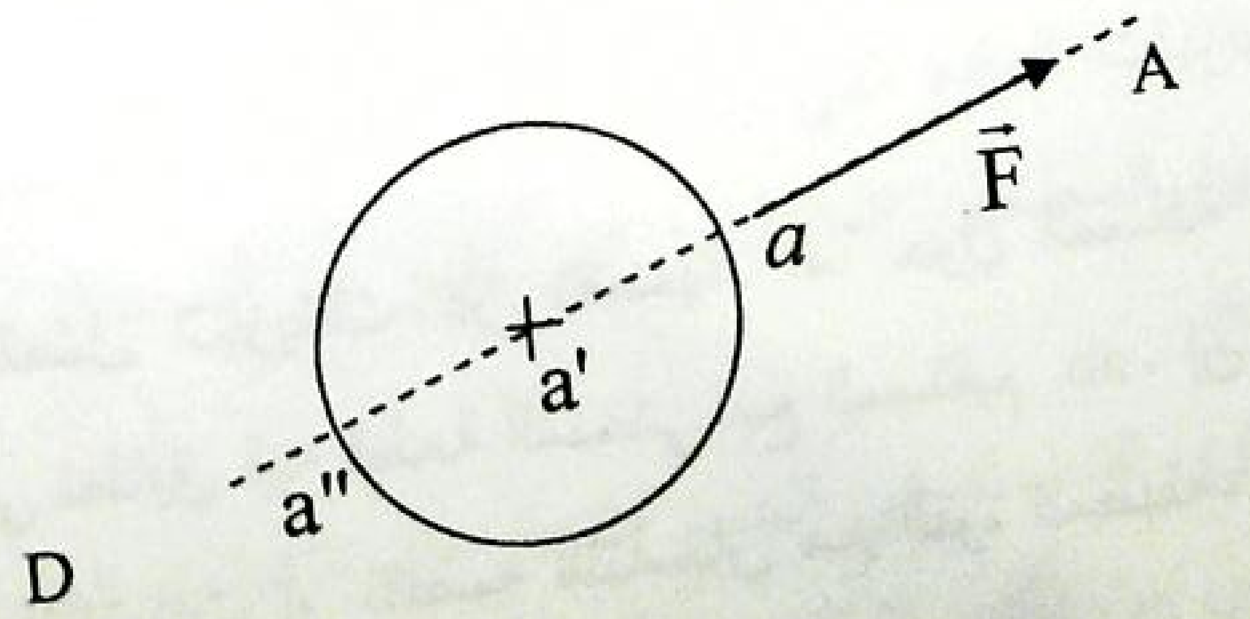
تتعدم قوى التجاذب من أجل م $r \cong 10^{-8}$ وتنفصل الجزيئات عن بعضها. أما حول المسافة d حيث القوة تساوي الصفر – فإن تغير القوة تغير خطي نطابق فيه قطعة المنحني مع المستقيم ab. إن استطالة الجسم وهي حصيلة الاستطالات الوسطية بين الجزيئات أو تقلصه متناسبان مع القوة المطبقة، الشد في الحالة الأولى والضغط في الحالة الثانية وهذا ما يعبر عنه قانون هوك Hooke التجريبي. إن مجال شدة القوى الذي يبقى فيه قانون Hooke صحيحاً يتوقف على نوع المادة المستعملة فهو صغير من أجل المعجون وكبير في حال الفولاذ. وهذا ما نعبر عنه بمرونة المادة.

5.1- الأجسام المثالية :

لابد من اللجوء، لتسهيل حل المسائل العملية في الميكانيك إلى تصورات، لا تتفق تماماً مع الواقع، ولكنها قادرة على وصف الظواهر الواقعية بتقريب لا بأس به. والتصور الأول هو قولنا عن جسم صلب إنه غير قابل للتشويه : إن القوى المؤثرة عليه عديمة المفعول على المسافات بين الجزيئات ولكن هذه الجزيئات تنقل مفعول القوة إلى الجزيئات المجاورة. ولما كانت القوة متجهة فإن تطبيقها في النقطة a من الجسم يعني تطبيقها في كل النقط 'a الواقعة على استقامة حامل القوة. فشدة القوة كافية لتحريك الجسم ولكنها غير كافية للتغلب على القوى الجاذبة التي تشد الجزيئات إلى بعضها. نسمي المستقيم D، الشكل.2، خط فعل القوة. وهكذا فإن جر الجسم بتطبيق القوة في النقطة a أو دفعه بتطبيقها في النقطة "a تعطيان نفس النتيجة الميكانيكية، وهو أمر مستحيل لو كان الجسم قابلاً للتشويه. والتصور الثاني هو الخيط ذو البعد الواحد، فهو إذاً خط هندسي غير قابل للمد من جهة، وعطوف من جهة ثانية، وكتلته تساوي الصفر. وهكذا نستطيع نقل طويلات القوى وتغيير اتجاهها بواسطة البكرات : يبقى طول القوس الذي ينطبق فيه الخيط على البكرة ثابتاً $|F_A| = |F_B|$ وهما في اتجاه المماسين في النقطتين A_0 و B_0 على الترتيب، الشكل.3، يمكن للخيوط طبعاً نقل القوى بدون تغيير في الاتجاه. يمكن مثلاً جر الجسم في الشكل.2 بتطبيق القوة في النقطة a أو تطبيقها في أي نقطة A في استقامة D بتصور خيط مثالي مبدؤه النقطة a وتطبيق القوة في النقطة A مثلاً.



الشكل.3

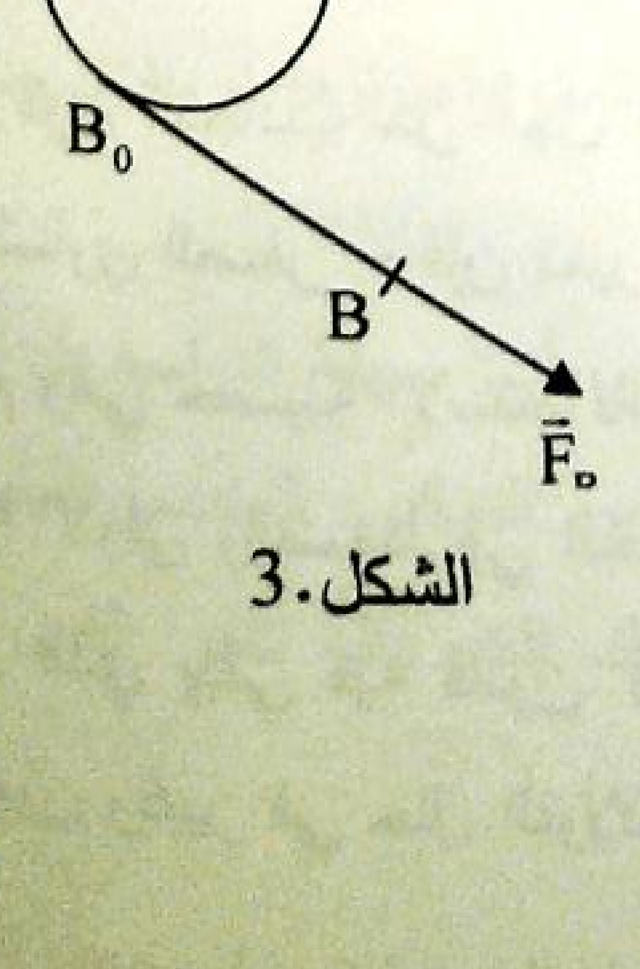


الشكل. 2

5.1– الأجسام المثالية :

لابد من اللجوء، لتسهيل حل المسائل العملية في الميكانيك إلى تصورات، لا تتفق تماماً مع الواقع، ولكنها قادرة على وصف الظواهر الواقعية بتقريب لا بأس به. والتصور الأول هو قولنا عن جسم صلب إنه غير قابل للتشويه : إن القوى المؤثرة عليه عديمة المفعول على المسافات بين الجزيئات ولكن هذه الجزيئات تنقل مفعول القوة إلى الجزيئات المجاورة. ولما كانت القوة متجهة فإن تطبيقها في النقطة a من الجسم يعني تطبيقها في كل النقط 'a الواقعة على استقامة حامل القوة. فشدة القوة كافية لتحريك الجسم ولكنها غير كافية للتغلب على القوى الجاذبة التي تشد الجزيئات إلى بعضها. نسمي المستقيم D، الشكل.2، خط فعل القوة. وهكذا فإن جر الجسم بتطبيق القوة في النقطة a أو دفعه بتطبيقها في النقطة "a تعطيان نفس النتيجة الميكانيكية، وهو أمر مستحيل لو كان الجسم قابلاً للتشويه. والتصور الثاني هو الخيط ذو البعد الواحد، فهو إذاً خط هندسي غير قابل للمد من جهة، وعطوف من جهة ثانية، وكتلته تساوي الصفر. وهكذا نستطيع نقل طويلات القوى وتغيير اتجاهها بواسطة البكرات : يبقى طول القوس الذي ينطبق فيه الخيط على البكرة ثابتاً $|F_A| = |F_B|$ وهما في اتجاه المماسين في النقطتين A_o و B_o على الترتيب، الشكل.3، يمكن للخيوط طبعاً نقل القوى بدون تغيير في الاتجاه. يمكن مثلاً جر الجسم في الشكل.2 بتطبيق القوة في النقطة a أو تطبيقها في أي نقطة A في استقامة D بتصور خيط مثالي مبدؤه النقطة a وتطبيق القوة في النقطة A مثلاً.

الشكل. 2



الشكل.3

6.1- عزم القوة :

سنحتاج في دراستنا للميكانيك إلى تعريف كائن رياضي جديد نسميه العزم وسنقصر الحديث هنا عن عزم القوة بالنسبة لنقطة وذلك كما يلي : ليكن لدينا القوة $\vec{F}$، ذات خط الفعل D ونقطة التطبيق A، نسمي عزم القوة $\vec{F}$ بالنسبة لنقطة ما O الجداء المتجه

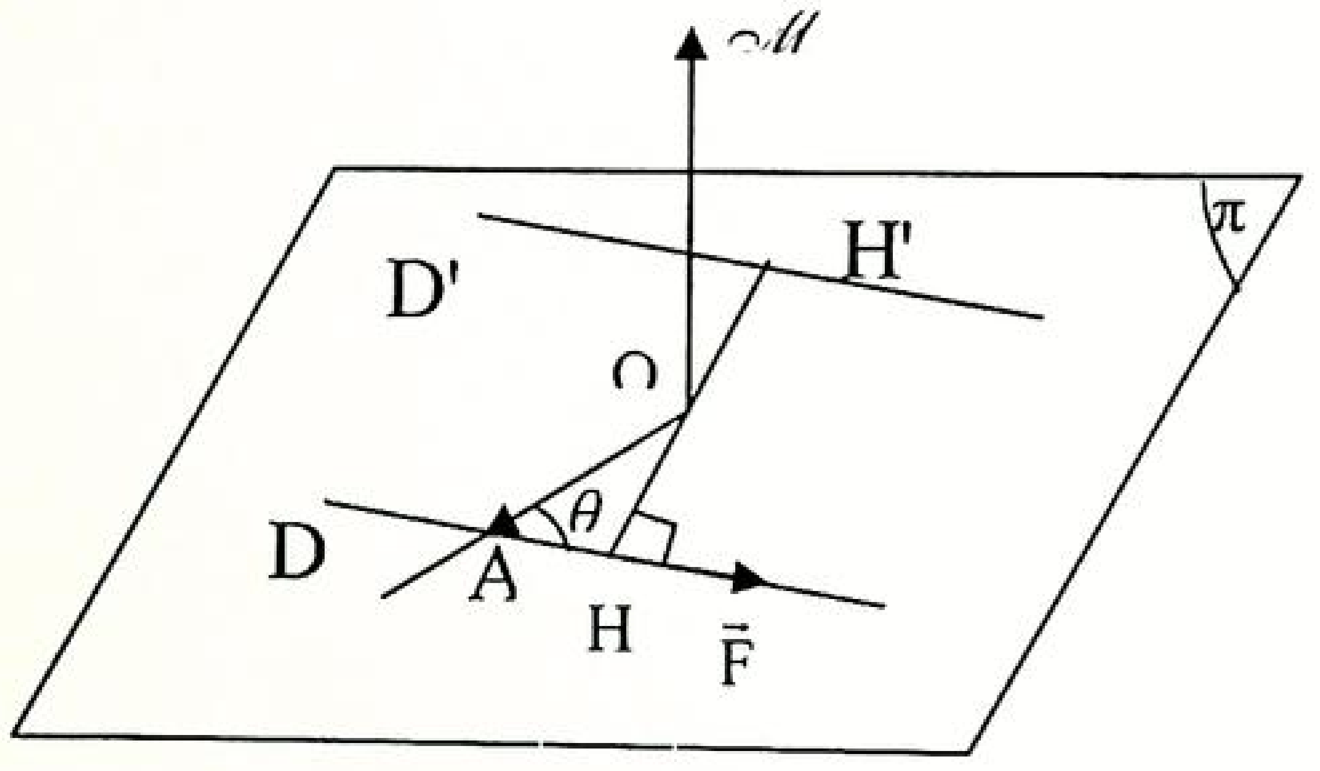
$$\vec{\mathcal{M}}_{O(F)} = \overline{OA} \times \vec{F} \qquad (1.9)$$

فعزم القوة هو إذاً متجهة مشتبهة طويلتها، حسب تعريف الجداء المتجه (2.14). 2)

$$\left|\vec{\mathcal{M}}_{O(F)}\right| = \left|\overline{OA}\right| \cdot |F| \sin\theta$$

وهي حسب الشكل.4

$$\left|\vec{\mathcal{M}}_{O(F)}\right| = |F| \cdot OH \qquad (1.9)'$$



الشكل.4

أي أن نقطة تطبيق القوة، وقد رأينا أنها لا تلعب أي دور في الأجسام المثالية، لا تدخل في تعريف العزم : إن أي نقطة من D وبشكل خاص النقطة H، مسقط O على D، تعرف تماماً $\vec{\mathcal{M}}_O$. إن أهمية النقطة H تكمن في أننا بمعرفة $\vec{\mathcal{M}}_O$ والمتجهة الطليقة $\vec{A}$ نستطيع تعيين خط الفعل D. يكفي لذلك أن ننشئ في المستوي Π، العمودي على $\vec{\mathcal{M}}_O$ في النقطة O، العمود على اتجاه $\vec{F}$ ذا الطول OH المحدد بـ '(1.9). لدينا نقطتان H أو 'H، الشكل.4، محددتان بالعلاقة المذكورة. نختار إحداها (وبالتالي خط الفعل D أو 'D) بحيث تكون الثلاثية $(\overline{OH}, \vec{F}, \vec{\mathcal{M}})$ ثلاثية مباشرة وهي النقطة H في الشكل.4. نستنتج بسهولة أن عزم القوة بالنسبة لنقطة تقع على خط فعلها D يساوي الصفر. نعمم هذا التعريف لعزم مجموعة من القوى $\vec{F}_1$، $\vec{F}_2$، ... $\vec{F}_i$ .. $\vec{F}_n$ مطبقة في النقاط A_1، A_2، ... A_i .. A_n ونسمي عزماً حاصلاً لهذه القوى في النقطة O المتجهة المشتبهة

$$\vec{\mathcal{M}}_o = \sum_{i=1}^{n} \overline{OA_i} \times \vec{F}_i \qquad (1.10)$$

وهو حسب تعريف عزم القوة (1.9)

$$\vec{\mathcal{M}}_o = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathcal{M}}_{o(F_i)} \qquad (1.10)'$$

نقول إن هذا العزم يساوي الصفر إذا كانت النقطة O نقطة تلاقي خطوط الفعل D_i، لأن كل حد من حدود المجموع '(1.10) يساوي الصفر. نقول عن مجموعة القوى $\vec{F}_1$، $\vec{F}_2$.....، $\vec{F}_n$ إنها مركزية إذا تلاقت خطوط أفعالها في نقطة واحدة. إن العزم الحاصل لهذه القوى المركزية يساوي الصفر في نقطة تلاقيها. إلا أنه يمكننا في هذه الحالة اعتبار هذه النقطة O نقطة تطبيق كلٍ من القوى $\vec{F}_i$ فهي نقطة تطبيق المجموع المسمى حصيلة القوى،

$$\vec{\mathcal{F}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

وحساب عزم هذا المجموع المطبق في O بالنسبة لنقطة 'O بأن نكتب

$$\vec{\mathcal{M}}_{o'} = \overline{O'O} \times \vec{\mathcal{F}}$$

ولما كان الجداء المتجه توزيعياً بالنسبة لعملية الجمع

$$= \sum_{i=1}^{n} (\overline{O'O} \times \vec{F}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathcal{M}}_{o'(F_i)}$$

ومنه

<u>مبرهنة 1</u> :

إن العزم الحاصل في نقطة ما لمجموعة من المتجهات المتلاقية يساوي لعزم حصيلة القوى في هذه النقطة.

إن حصيلة القوى هي متجهة طليقة مادامت نقاط تطبيق القوى $\vec{F}_i$ على خطوط فعلها اعتباطياً ولكن العزم الحاصل يختلف من نقطة إلى أخرى.

<u>مبرهنة 2</u> :

إن العزم الحاصل في نقطة 'O لمجموعة القوى $\vec{F}_i$ المطبقة في A_i يساوي لعزمها في O مضافاً إليه عزم حصيلة القوى $\mathcal{F}$ المطبقة في O بالنسبة لـ 'O :

$$\vec{\mathcal{M}}_{o'} = \vec{\mathcal{M}}_o + \overline{O'O} \times \vec{\mathcal{F}} \qquad (1.11)$$

لدينا تعريفاً

$$\vec{\mathcal{M}}_{o'} = \sum_{i=1}^{n} \overline{O'A_i} \times \vec{F}_i$$

ولكن $\overline{O'A_i} = \overline{O'O} + \overline{OA_i}$

$$\vec{\mathcal{M}}_{o'} = \sum_{i=1}^{n} (\overline{O'O} + \overline{OA_i}) \times \vec{F}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \overline{O'O} \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \overline{OA_i} \times \vec{F}_i$$

$$= \overline{O'O} \times \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \vec{\mathcal{M}}_o$$

$$= \overline{O'O} \times \vec{\mathcal{F}} + \vec{\mathcal{M}}_o$$

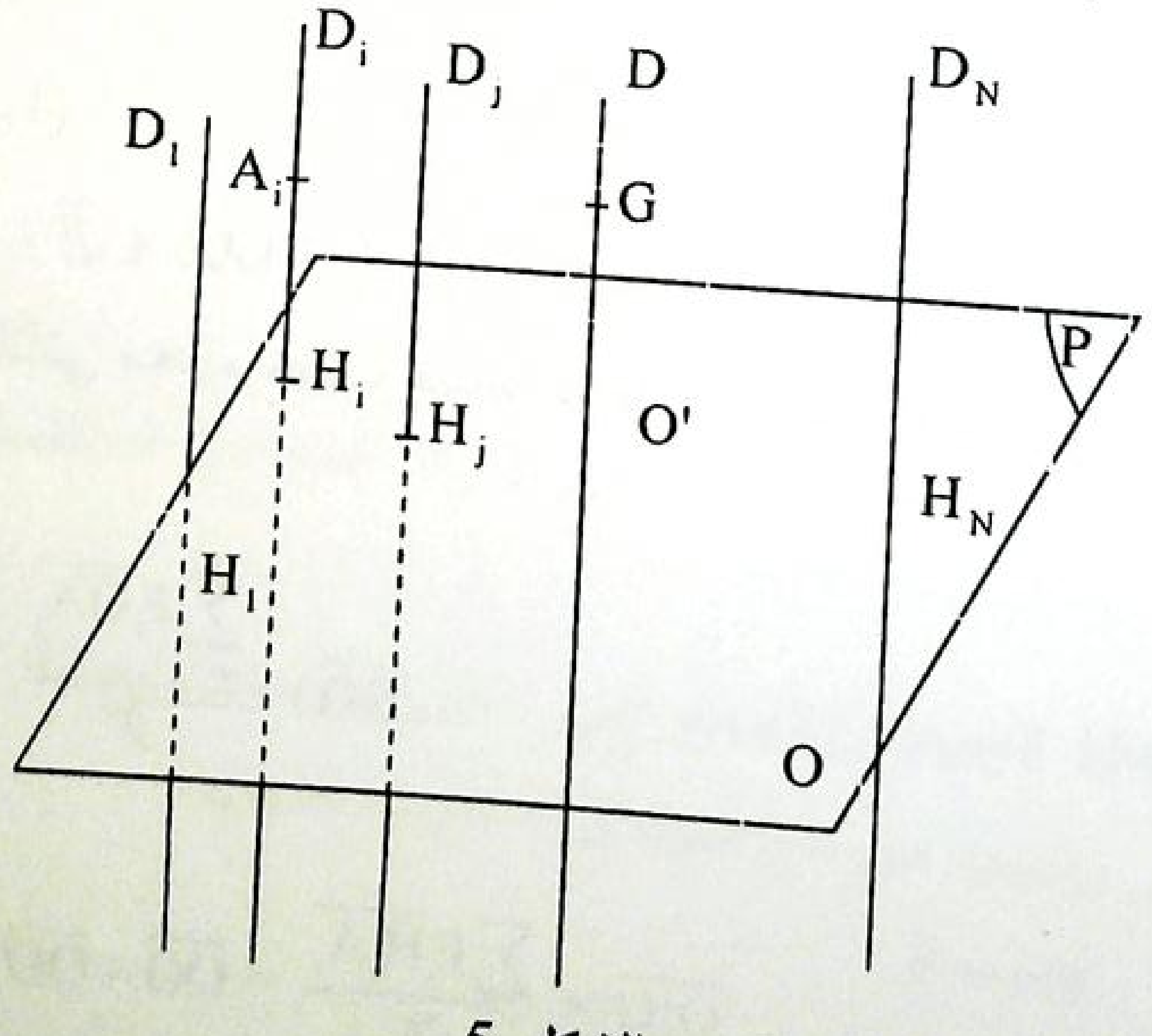
وهو المطلوب.

1- ينتج عن هذه المبرهنة أنه إذا تساوت حصيلتا القوى $\vec{\mathcal{F}}, \vec{\mathcal{F}'}$ وتساوى العزمان الحاصلان في نقطة O $\vec{\mathcal{M}}_o$ و $\vec{\mathcal{M}}_{o'}$ لجملتين من القوى $(A_i, \vec{F}_i)$ و $(A'_i, \vec{F}'_i)$ فقد تساوى عزمهما الحاصل في كل نقطة من نقاط الفضاء.

2- ينتج عن المبرهنة أيضاً أن الجداء $\vec{\mathcal{F}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_{o'} = \vec{\mathcal{F}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_o$ أي أنه لا يتوقف على النقطة O.

3- ينتج أخيراً عن العلاقة (1.11) أنه إذا كانت حصيلة القوى مساوية للصفر فإن العزم هو نفسه بالنسبة لكل نقاط الفضاء ونسمي مجموعة المتجهات في هذه الحالة مزدوجة.

لتكن خطوط فعل القوى $\vec{F}_1 \dots \vec{F}_n$ متوازية كلها؛ نريد استعمال العلاقة (1.11) لتحديد خط فعل حصيلة هذه القوى. لنأخذ المستوي P العمودي على اتجاه F_i المار من النقطة O، الشكل.5. يمكننا اعتبار نقاط تطبيق القوى F_i النقاط H_i التي تقطع فيها المستقيمات D_i المستوي P وذلك حسب '(1.9).



الشكل.5

إن النقطة 'O نقطة تطبيق الحصيلة $\overline{\mathcal{F}}$ هي تعريفاً النقطة التي ينعدم فيها العزم الحاصل $\vec{\mathcal{M}}_{O'} = 0$ ولنطبق (1.11) :

$$0 = \vec{\mathcal{M}}_O + \overline{O'O} \times \overline{\mathcal{F}} \qquad (1.12)$$

ولكن

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \sum_{i=1}^{n} \overline{OH_i} \times \overline{F_i} = \sum \overline{OA_i} \times \overline{F_i}$$

لنأخذ $\vec{e}$ المتجهة الواحدية على خطوط الفعل D_i

$$\overline{F_i} = F_i \vec{e}$$

$$\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \vec{e}$$

حيث F_i و $\mathcal{F}$ القيم الجبرية لـ $\overline{F_i}$ وللحصيلة $\overline{\mathcal{F}}$، ولنبدل في (1.12) فنجد

$$\mathcal{F}\overline{OO'} \times \vec{e} = \sum_{i=1}^{n} F_i \overline{OH_i} \times \vec{e}$$

$$(\mathcal{F}\overline{OO'} - \sum_{i=1}^{n} F_i \overline{OH_i}) \times \vec{e} = 0$$

رأينا أن الجداء المتجه يساوي الصفر إذا كانت إحدى المتجهتين تساوي الصفر أو كانتا متوازيتين. أما التوازي فمستحيل لأن المتجهة الأولى في طرف المعادلة، $\mathcal{F}\overline{OO'} - \sum_{i=1}^{n} F_i \overline{OH_i}$ ، واقعة في المستوي والأخرى عمودية عليها. يبقى إذاً انعدام هذه المتجهة وهكذا فإن

$$\overline{OO'} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \overline{OH_i}}{\mathcal{F}} \qquad (1.13)$$

وهذا طبعاً بفرض أن $\mathcal{F} \neq 0$؛ أما إذا كانت $\mathcal{F} = 0$ فقد رأينا أن العزم الحاصل هو نفسه بالنسبة لكل نقاط الفضاء؛ فإذا كان مساوياً للصفر في 'O فهو مساو للصفر في كل نقطة من الفضاء.

لنلاحظ الآن أن عزم القوى معدوم بالنسبة لأي نقطة من نقاط خط الفعل D. لنأخذ نقطة G على هذا الحامل لدينا حسب (1.11)

$$\vec{\mathcal{M}}_G = \vec{\mathcal{M}}_{O'} + \overline{GO'} \times \overline{\mathcal{F}}$$

فالحد الأول في الطرف الثاني معدوم حسب إنشائنا له والحد الثاني معدوم لتوازي حدي الجداء المتجه.

لنختر G بحيث يكون

$$\overline{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \overline{OA_i}}{\mathcal{F}} \qquad (1.13)'$$

أي بحيث يكون

$$\overline{O'G} = \frac{\sum F_i \overline{H_i A_i}}{\mathcal{F}} = \overline{OG} - \overline{OO'}$$

لأن جمع علاقة التعريف هذه مع (1.13) يعطينا '(1.13).

2. أسس الميكانيك النيوتوني

تقوم دراسة الميكانيك النيوتوني على ثلاثة مبادئ أي ثلاث موضوعات استوحاها نيوتن من الواقع التجريبي وإن كانت لا تنتج في أي حال من الأحوال من هذا الواقع مباشرة. وذلك على غرار الموضوعات الرياضية فموضوعات إقليدس في الهندسة، كالموضوعة الخامسة مثلاً التي تقول بعدم تلاقي الخطوط المتوازية مستوحاة أيضاً من الواقع ولكنها لا تنتج عنه لسببين أولهما أنه يستحيل البرهان عليها رياضياً – ولذا سميت موضوعة، مصادرة، بديهية – وثانيهما أنه يستحيل التحقق منها فعلاً إذ أن ذلك يقتضي في مثالنا تتبع الخطين المتوازيين إلى ما لا نهاية ! ومع ذلك فهي مقبولة لأن بنية الهندسة الإقليدية التي ترتكز على هذه الموضوعات متسقة منطقياً وغير متناقضة. وكذلك الأمر في الفيزياء فنحن لا نستطيع التحقق من صحة المبادئ ولا البرهان عليها ولكننا نبرهن رياضياً القوانين الفيزيائية الناتجة عنها ونتحقق يومياً بالتجربة أو بالرصد من صحة هذه القوانين ولا نتخلى عنها إلا إذا عارضها الواقع التجريبي ولو بتجربة واحدة. يمكن عندئذ، بعد التأكد من عدم تسرب أي خطأ إلى نتائج القياس ومن عدم إمكانية التوفيق بين المبادئ التي انطلقنا منها والتجربة الجديدة، اختراع مبادئ جديدة تسمح بتفسير كل النتائج التجريبية القديمة منها والجديدة والتنبؤ بحوادث لم تلاحظ بعد. يمكن إذاً وضع نظرية جديدة كتلك التي وضعها آنشتاين وآخرون في النسبية الخاصة والتي سندرسها في فصل قادم. وهكذا سيتضح لنا عبر هذا الكتاب أن كل معرفة للواقع تبدأ بالتجربة وتنتهي بها، فهي سيدة الفيزياء، محك الحقيقة ومعيارها الوحيد ولكن المبادئ هي من إبداع الإنسان وخلقه لا تستخلص مباشرة من التجربة.

لم تكن الرؤية في الفيزياء على هذا القدر من الوضوح ولذا كان يخلط بين الموضوعة والبديهية وبين البديهية والفرضية كما كان يخلط بين المبدأ والقانون الفيزيائي المبرهن؛ ولذا كان يسود الاعتقاد أيضاً أن المبادئ أزلية وهكذا سميت مبادئ نيوتن التي سنذكرها للتو قوانين نيوتن تجاوزاً.

1.2- موضوعات نيوتن :

م.1 يبقى الجسم المادي على حالته في الركود أو في الحركة المستقيمة المنتظمة ما لم تجبره قوة ما على تغيير حالته.

تحدد هذه الموضوعة الحالة الطبيعية للأجسام فهي حالة الركود (أو الحركة المستقيمة المنتظمة) ولذا تسمى حالة العطالة. نعبر رياضياً عن هذه الموضوعة بتعريفنا للمتجهة

$$\vec{P} = m\vec{V} \tag{2.1}$$

والتي نسميها الاندفاع[3]؛ وهي كما نرى جداء العدد الذي يميز الجسم – كتلته – والذي يعبر بالتالي عن عطالته بالمتجهة $\vec{V}$، متجهة سرعته. إن موضوعة نيوتن الأولى تقول بثبات الاندفاع في حالة انعدام القوى المؤثرة :

م.1

$$\bar{P} = \bar{C} \quad (2.2)$$

حيث $\bar{C}$ متجهة ثابتة قد تكون مساوية للصفر (حالة الركود).

نقول عن جسم لا تؤثر عليه أي قوة إنه معزول ونقول عن اندفاعه المعبر عنه بـ (2.2) إنه منحفظ. لقد سمى نيوتن المتجهة $\bar{P}$ كمية الحركة. إلا أن هذه التسمية لا تأخذ بعين الاعتبار الطبيعة المتجهة للمقدار المعرف وقد أصبح استعمالها نادراً. لقد استعمل نيوتن أيضاً كلمة الجسم ولكننا سنستعملها في الوقت الحاضر بمعنى الجسيم وسنعرف توازن الجسيم بقولنا إنه ساكن أو إنه يسير بحركة مستقيمة منتظمة. فالمعادلة (2.2) هي معادلة توازن. سنرى عند دراسة الأجسام الصلبة أنه يجب إضافة علاقة أخرى لتعريف توازن الجسم الصلب (عزمه الزاوي ثابت).

تسمى موضوعة نيوتن الأولى غالباً باسم قانون العطالة الغاليلية Galilée ذلك أن غاليله قد توصل إلى هذا المبدأ قبل نيوتن بزمن طويل كحد لتجاربه على انزلاق الأجسام على المستويات المائلة عندما ينتهي هذا الميل إلى الصفر.

م.2 وهو مبدأ الديناميك : يتناسب تغير الحركة مع القوة المؤثرة، يقع هذا التغيير في اتجاه خط فعل القوة. يقصد نيوتن بتغير الحركة تغير المقدار $\bar{P}$ مع الزمن. وهكذا نكتب مبدأ نيوتن الثاني على الشكل

$$\vec{F} = \frac{d\bar{P}}{dt} \quad (2.3)$$

حيث t هو الزمن، وهذا هو الشكل الذي أعطاه نيوتن لهذا المبدأ ولكنه يكتب أحياناً على الشكل

$$\vec{F} = m\frac{d\bar{v}}{dt} = m\bar{a} \quad (2.3)'$$

حيث $\bar{a}$ متجهة تسارع الجسيم.

ونحن نفضل الشكل الأول، تساوي القوة مع مشتق الاندفاع الخطي، على الشكل الثاني، تناسب القوة مع التسارع لأن هذا الشكل يبقى صحيحاً في نظرية النسبية الخاصة بينما لا تبقى العلاقة $\frac{d\bar{P}}{dt} = m\bar{a}$

---

[3] إنها بالإنكليزية Linear momentum وبالفرنسية والألمانية Impuls, impulsion والترجمة الحرفية لها، من الإنكليزية، العزم الخطي. وقد استعملنا هذا التعبير بالعربية لسنوات عديدة. لكن العزم، من وجهة النظر الرياضية هو من الشكل $\mathcal{M} = \int x^n f(x)dx$ ونسميه حسب قيم n العزم (أو اللحظة) الأول n=1، الثاني n=2، الخ. وهو يتفق مع تعريفنا لعزم القوة : $\bar{r} \times F(\bar{r})$ وللعزوم الأخرى التي سنعرفها ولكنه لا يتفق مع مفهوم $\bar{P}$. لذلك فضلنا تسميته بالاندفاع الخطي – محتفظين بـ Linear – لأن انحفاظه ناتج عن الانسحابات في الفضاء الإقليدي. لنشر أيضاً إلى أن ابن سينا استعمل مفهوماً قريباً من مفهوم $\bar{P}$ وسماه اندفاعاً. سنرى من جهة أخرى في الفصل السادس تعريفاً آخر للاندفاعات العامة، أو العزوم العامة ينطبق تارة على الاندفاع وتارة أخرى على العزم.

صحيحة. ومن جهة ثانية فإن ديناميك الجسم الصلب كما سنرى تحدده علاقة من الشكل (2.3) (يساوي مشتق العزم الزاوي بالنسبة للزمن عزم القوى).

إن أبعاد P تحددها علاقة التعريف (2.1) وأبعاد $\vec{F}$ العلاقة (2.3) أو '(2.3)

لدينا
$$[P] = [M][L][T]^{-1}$$
و
$$[F] = [M][L][T]^{-2} \qquad (2.3)_u$$

تسمى وحدة القوة في النظمة MKS ، حيث الوحدات الأساسية هي المتر والكيلوغرام والثانية، بالنيوتن وهي إذاً كليوغرام مضروباً بالمتر مقسوماً على مربع الثانية.

إن العلاقة (2.3) تكافئ ثلاث معادلات تفاضلية خطية من الدرجة الثانية عندما نختار نقطة مبدأ في الفضاء ونظمة محاور متعامدة. فإذا عينا إحداثيات الجسيم $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ فإن $\vec{P} = \begin{pmatrix} mx' \\ my' \\ mz' \end{pmatrix}$ ،

و $\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \begin{pmatrix} mx'' \\ my'' \\ mz'' \end{pmatrix}$ وسمينا $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_X \\ F_Y \\ F_Z \end{pmatrix}$ فإن المعادلة (2.3) هي

$$\begin{cases} F_X = m\dfrac{d^2x}{dt^2} = mx'' \\ F_Y = m\dfrac{d^2y}{dt^2} = my'' \\ F_Z = m\dfrac{d^2z}{dt^2} = mz'' \end{cases} \qquad (2.3)''$$

لنكامل هذه المعادلة بالنسبة للزمن، ولنعد إلى الشكل (2.3) اختصاراً فنجد
$$\int_{t_o}^{t} \vec{F}(t)dt = \int_{t_o}^{t} d\vec{P}$$

حيث t_0 و t لحظتان معينتان، الطرف الثاني هو
$$\vec{P}(t) - \vec{P}(t_o)$$

معين تماماً إذا عرفنا تابعاً أصلياً لـ $\vec{F}(t)$. ليكن $\overline{\mathcal{F}}(t)$ هذا التابع. لدينا إذاً
$$\overline{\mathcal{F}}(t) = \vec{P}(t) - \vec{P}(t_o) = m\vec{v}(t) - m\vec{v}_o$$

حيث $m\vec{v}_o$ هي متجهة السرعة في اللحظة t_0 : $\vec{v}(t_0)$ لنكامل من جديد
$$\int_{t_o}^{t} \overline{\mathcal{F}}(t)dt = m\int_{t_o}^{t} \frac{d\vec{r}}{dt}dt - m\int_{t_o}^{t} \vec{v}_o dt$$
$$\int_{t_o}^{t} \overline{\mathcal{F}}(t)\,dt = m(\vec{r} - \vec{r}_o) - m\vec{v}_o(t - t_o) \qquad (2.4)$$

حيث سمينا، كما في حالة السرعة، $\vec{r}_o = \vec{r}(t_o)$.

أي أن وضع الجسيم $\vec{r}$ في اللحظة t معرف تماماً إذا عرفنا وضعه في اللحظة t_o ، $\vec{r}_o$ ، وسرعته في نفس هذه اللحظة، $\vec{V}_o$. نسمي إعطاء هذين المقدارين معرفة الشروط البدائية. إن كل الميكانيك النيوتوني

للجسيمات هو مكاملة المعادلة (2.3) ووضعها على الشكل (2.4) أو مكاملة المعادلات "(2.3) ووضعها على شكل ثلاث معادلات هي إسقاط (2.4) على المحاور الثلاثة :

$$\begin{cases} \int_{t_o}^{t} \mathcal{F}_X(t)\,dt = m(x - x_o) - mx'_o(t - t_o) \\ \int_{t_o}^{t} \mathcal{F}_Y(t)\,dt = m(y - y_o) - my'_o(t - t_o) \\ \int_{t_o}^{t} \mathcal{F}_Z(t)\,dt = m(z - z_o) - mz'_o(t - t_o) \end{cases} \qquad (2.4)'$$

حيث $\mathcal{F}_X$ هو التابع الأصلي لـ F_X و $\mathcal{F}_Y$ التابع الأصلي F_Y و $\mathcal{F}_Z$ التابع الأصلي لـ F_Z.

إن إعطاء الثابتتين x'_o و x_o يحددان تماماً x وكذلك الأمر بالنسبة للمعادلتين التاليتين في "(2.3) لأن كل المعادلات التفاضلية كما ذكرنا تفاضلية من الدرجة الثانية.

أما لماذا تتناسب القوة مع المشتق الثاني وليس مع المشتق الأول (السرعة) أو مع المشتق الخامس مثلاً فهو لأن الطبيعة تسير على هذا النحو؛ لأن نيوتن "شعر" أنه يمكنه وصف ما يجري في الطبيعة على هذا الشكل ونجح في ذلك. لو كانت القوة متناسبة مع السرعة فإن انعدام هذه القوة سيؤدي إلى وقوف الجسم في لحظة انعدامها ولكن هل تقف السيارة فور الضغط على المكابح ؟!

م.3 مبدأ تساوي الفعل ورد الفعل أي أن القوة التي يمارسها الجسم A على الجسم B ولنسمها $\vec{F}_{AB}$ تساوي وتعاكس بالاتجاه القوة التي يمارسها B على A ولنسمها $\vec{F}_{BA}$

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

أي أن القوى لا تظهر إلا على شكل أزواج في الطبيعة، وهذا ما عبرنا عنه بالتفاعل، يضغط الجسم الموضوع على الطاولة عليها ولكن الطاولة تضغط على الجسم في اتجاه معاكس؛ تجذب الأرض الجسم A الموجود على مقربة منها كما يجذب الجسم الأرض، B، نحوه. أما لماذا يتحرك الجسم ويسقط نحو الأرض وليس العكس فإن المبدأ الثاني هو الذي يعطينا الجواب، إن كتلة الأرض M_B كبيرة جداً بحيث لن تستطيع الحركة :

$$\left|\vec{F}_{AB}\right| = \left|\vec{F}_{BA}\right| = m\left|\vec{a}_A\right| = M_B\left|\vec{a}_B\right|$$

$$\frac{\left|\vec{a}_B\right|}{\left|a_A\right|} = \frac{m_A}{M_B} \cong 0$$

ليس لمبدأ تساوي الفعل ورد الفعل معنى إلا إذا كانت القوتان مقيستين في نفس اللحظة وهذا ما يتناقض مع مفهوم الحقل الذي يقتضي انتشار تأثير الجسم الأول على الجسم الثاني وعدم وقوع المفعول آنياً ولكن لنبق مع السيارات : إن هذا المبدأ صحيح في اصطدام السيارات ولكنه يفقد معناه في اصطدام الجسيمات بل والذرات؛ إنه صحيح عندما تكون المسافات الفاصلة بين الأجسام المتفاعلة صغيرة بالنسبة لسرعة انتشار التأثير أو عندما تكون حالة الجسمين المتفاعلين مستقرة – غير متأثرة بالزمن كتفاعل الأجسام السماوية مثلاً.

2.2- المكان ونظم المقارنة الغاليلية :

سنقبل كما فعلنا بالنسبة للزمن المطلق (3.1 § 2) موضوعة نيوتن التالية في المكان المطلق :

م.4 يبقى الفضاء (المكان) المطلق، من حيث طبيعته وبدون اعتبار لأي شيء خارجي، مشابهاً لذاته وغير متحرك دوماً.

وهنا كما في الزمان المطلق نتساءل من أي أتى نيوتن بهذا الفضاء المطلق ؟ وكيف يمكننا تمييزه عن فضاء متحرك يتحرك حركة مستقيمة منتظمة بالنسبة إليه ؟ ثم إن هذا المفهوم مدعاة للاستغراب خاصة بعد أن وضع نيوتن في المبدأ الأول عدم الحركة والحركة المستقيمة المنتظمة في صف واحد.

يقول آنشتاين (1954) : لقد كان على نيوتن أن يخوض في نضال مرير للوصول إلى مفهوم الفضاء المستقل والمطلق الذي كان لا غنى عنه لتطوير نظريته.. لقد كان قرار نيوتن، نظراً لما كانت عليه حالة العلوم آنذاك، الوحيد الممكن وبشكل خاص الوحيد المثمر. ولكن التطورات اللاحقة للمشاكل المطروحة بطريقة غير مباشرة والتي لم يكن من الممكن لأي كان التنبؤ بها، أظهرت أن مقاومة لايبنيز Leibniz وهويغنز Huygens المبنية على الحدس كان لها ما يبررها في واقع الأمر رغم أنها اعتمدت على حجج غير مناسبة... وقد اقتضى الأمر من جديد نضالاً لا يقل مرارة عن النضال الأول للتغلب على هذا المفهوم (مفهوم الفضاء المطلق).

لنعد إلى الفضاء المطلق : رأينا أنه لابد لدراسة الحركة، المعبر عنها بالمعادلات "(2.3) من إيجاد نظمة محاور نسميها نظمة مقارنة – أو مقرن – ندرس حركة الجسم بالنسبة إليها شريطة ألا يغير وجودها هذه الحركة ولا يعقدها، أي لا يغير من تسارع الجسم موضع الدراسة بأن يضيف قوة جديدة إلى القوة $\vec{F}$ المسؤولة عن حركة الجسم. وهكذا وبدون إجراء أي حساب فإن دراسة حركتنا (أو عدم حركتنا) بالنسبة لطائرة مُقلعة (متسارعة) غير ملائمة لإن قوة إضافية تلزقنا بظهر مقعدنا ناتجة عن تسارع الطائرة قد غيرت من القوى التي كنا نتأثر بها قبل الإقلاع، وكذلك الأمر إذا أخذنا جسيماً قريباً من سطح الأرض فهو يخضع إلى ثقلة وسيتحرك نحو الأسفل بالنسبة لنظمة محاور مرتبطة بالأرض ولتكن، على سبيل المثال، خطوط تقاطع أرض المختبر مع جدارين فيه. ولكننا لو وضعنا هذا الجسيم في آلة الانتباذية ودرسنا وضعه بالنسبة لمحاور هذه الآلة فإن تسارعاً إضافياً يساوي $\omega^2 r$ ((3.17). 2) سيضاف وستتغير حركة الجسيم تغيراً جذرياً عن حركته الناتجة عن خضوعه إلى ثقله لذا فإن المقارن المتسارعة أو الدائرة غير ملائمة لدراسة الميكانيك بمعنى أن النتائج لن تكون بالبساطة المتوخاة.

لنأخذ حالة تسارع معينة للجسم المدروس مساوية للصفر : نطلق على مقرن ما اسم المقرن العطالي إذا تحقق قانون العطالة فيه بدقة من أجل الأجسام التي لا تخضع إلى أي قوة؛ أي إذا تحركت هذه الأجسام حركة مستقيمة منتظمة أو بقيت ساكنة. ولكن كيف نعرف أن جسماً ما غير خاضع لأي قوة ؟ الجواب

طبعاً هو إذا كان تسارعه يساوي الصفر حسب المبدأ الأول ولكن بالنسبة لأي مقرن نقيس هذا التسارع ؟ بالنسبة لمقرن عطالي وكيف عرفت أنه عطالي ؟ وهكذا ندور في حلقة مفرغة.

تعريف :

سنقبل إذاً وجود مقرن عطالي كل محور من محاوره هو صراط جسيم (بعيد عن الأجسام الأخرى) يتحرك بالعطالة وحدها ونسمي المقارن التي تتحرك حركة مستقيمة منتظمة بالنسبة لبعضها بعضاً مقارن غاليلية أو مقارن عطالية.

يمكن أخذ الأرض مثلاً في كثير من الأحيان كمقرن عطالي على الرغم من دورانها حول نفسها، فالسرعة الزاوية للأرض هي

$$\omega = \frac{2\pi}{86400} \approx 0{,}73.10^{-4} \text{ راديان/ثانية}$$

ولما كان نصف قطر الأرض هو $r \cong 6{,}4 \cdot 10^{6}$ متراً

فإن التسارع الناتج عن حركة الأرض حول نفسها هو

$$\omega^2 r = (0{,}73 \cdot 10^{-4})^2 \times 6{,}4 \cdot 10^{6} = 3{,}4.10^{-2} \text{ متراً/مربع الثانية} \qquad (2.5)$$

وهو مقدار صغير بالنسبة لتسارع الثقالة $g = 9{,}8$ متراً/مربع الثانية.

ومع ذلك فسندرس في فصل مقبل أثر حركة الأرض حول نفسها على سقوط الأجسام.

من المتعارف عليه أيضاً اعتبار النجوم الثابتة كمقرن غاليلي ولكن أجهزة القياس الحالية لا تسمح لنا بقياس تسارع بحدود تسارع الأرض حتى ولو قمنا بأرصاد دقيقة خلال مئة عام.

يمكن كذلك اتخاذ الأرض في حركتها حول الشمس كمقرن غاليلي إذ أن سرعتها الزاوية في هذه الحركة هي

$$\omega \approx \frac{2\pi}{3 \cdot 10^{7}} \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ راديان/ثانية}$$

حيث السنة $\simeq 3 \cdot 10^{7}$ ثانية ولما كان نصف قطر فلك الأرض التقريبي هو

$$r \cong 1{,}5.10^{11} \text{ متراً}$$

فإن

$$a = \omega^2 r \approx 4 \cdot 10^{-14} \times 1{,}5.10^{11} \approx 0{,}6.10^{-2} \text{ متراً/مربع الثانية} \qquad (2.6)$$

وهذا مقرن أفضل بكثير إذاً من الأرض في حركتها اليومية.

إن معرفة تسارع الشمس نحو مركز المجرة – درب التبانة – غير ممكنة تجريبياً ولكن سرعتها بالنسبة لمركز المجرة تقدر بـ $3 \cdot 10^{5}$ متر/ثانية و"نصف قطر" فلكها حول مركز المجرة هو $3 \cdot 10^{20}$ متراً وهكذا فتسارعها صغير جداً :

$$a = \omega^2 r = \frac{v^2}{r} \approx \frac{9 \cdot 10^{10}}{3 \cdot 10^{20}} \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ متراً/مربع الثانية} \qquad (2.7)$$

ومادمنا قد قبلنا بوجود مقرن عطالي فإننا سنصيغ هذا القبول وما يترتب عليه على شكل مبدأ يعرف باسم

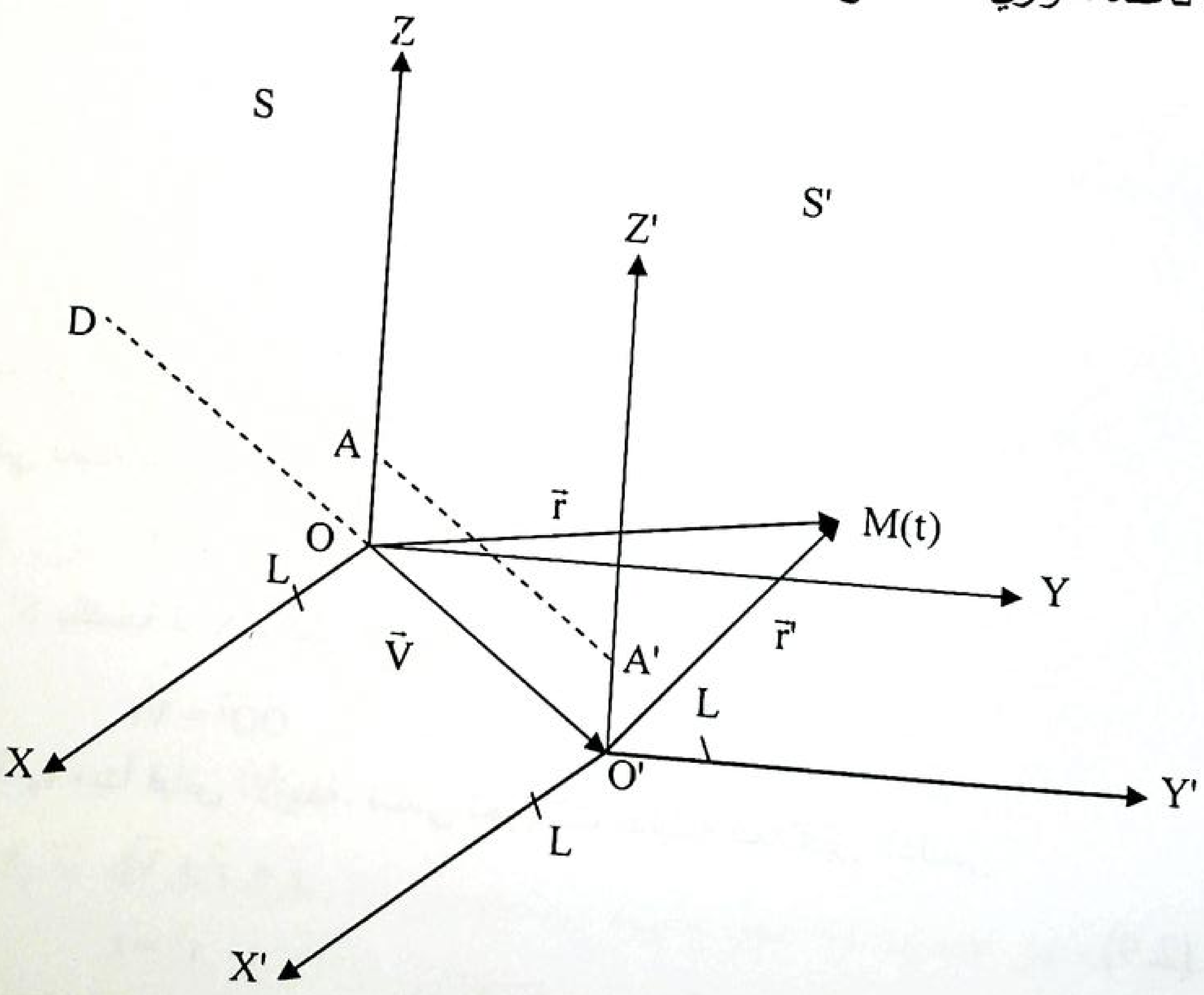
مبدأ النسبية الغاليلية :

إن قوانين الميكانيك هي نفسها بالنسبة لكل نظم المقارنة الغاليلية.

أو بمعنى آخر مادام التعبير الرياضي لقوانين الميكانيك هو نفسه بالنسبة لكل نظم المقارنة الغاليلية فإنه لا يمكن إجراء تجربة ميكانيكية تبين حركة مقرن غاليلي بالنسبة لمقرن غاليلي آخر وبالتالي ليس هناك أي وسيلة لمعرفة ما إذا كان أحد هذه المقارن ساكناً بالنسبة لكل المقارن الأخرى : ليس هناك أي معنى للحديث عن مقرن مطلق.

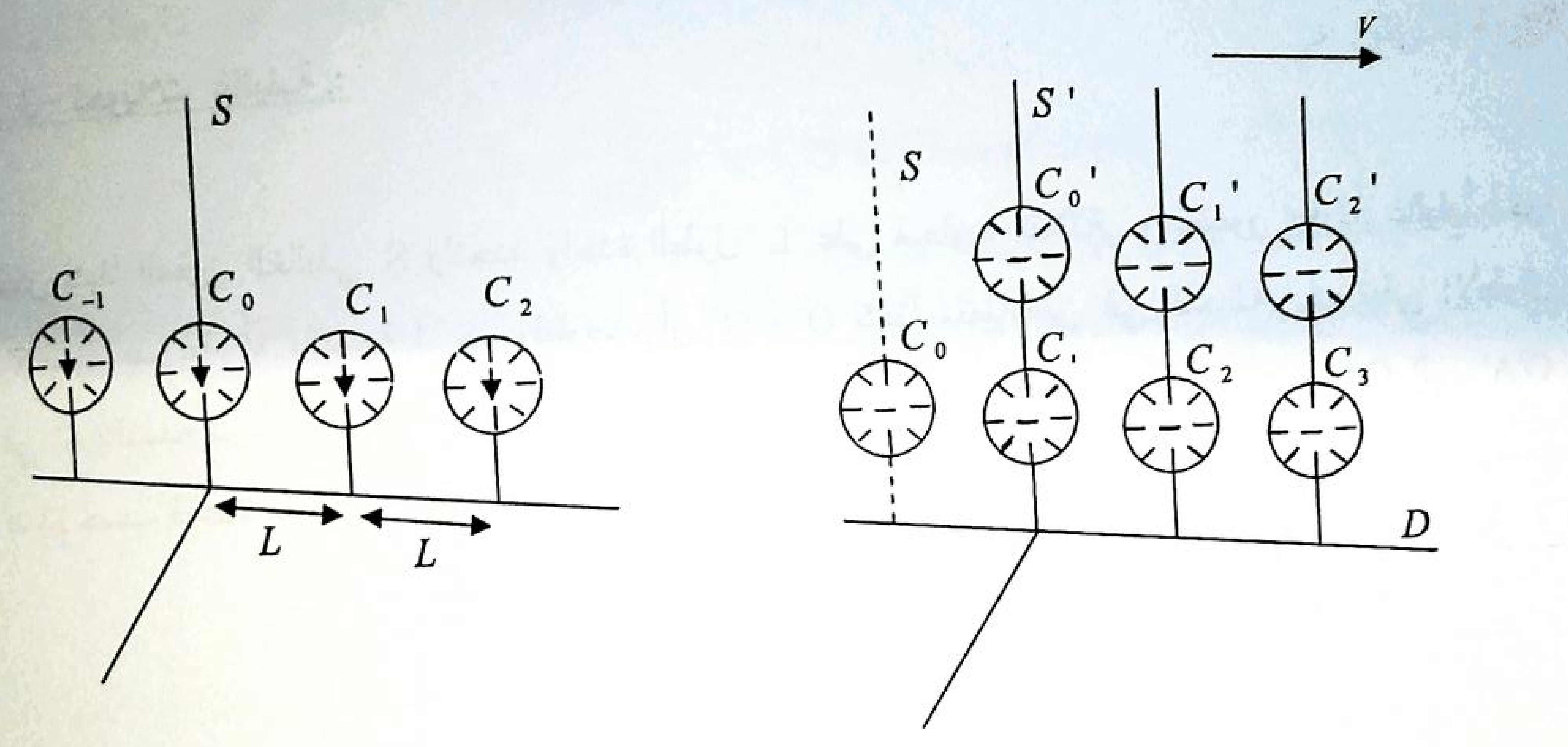
3.2- تحويلات غاليلية :

ليكن لدينا المقرن الغاليلي S ولنحدد واحدة الطول L على محاوره الثلاثة ولنتصور مقرناً غاليلياً آخر 'S يسير بسرعة $\vec{V}$ بالنسبة لـ S. ولنفرض أن O و'O كانتا متطابقتين في اللحظة t_0. تبقى الأطوال في 'S بالنسبة للراصد في S مساوية للأطوال في S لأن الفضاء إقليدي والانتقال من OA إلى O'A' قد تم حسب قاعدة متوازي الأضلاع، الشكل.6.



الشكل.6

لنفرض الآن أننا قد وضعنا في S في اتجاه حركة 'S ولنسمه D عدداً من الميقاتيات المتزامنة والثابتة بالنسبة لـ S، تفصل بين الواحدة والأخرى وحدة الطول L. لنسم هذه الميقاتيات ...C_{-1}, C_0, C_1, C_2. ولنفعل الشيء نفسه بالنسبة لـ 'S ولنسمها ...$C'_{-1}, C'_0, C'_1, C'_2$ ولنفرض هذه الميقاتيات المتزامنة فيما بينها متزامنة أيضاً مع الميقاتيات C، لنقل إن C_0 و C'_0 متزامنتان في اللحظة t_0. ستبدو هذه الميقاتيات للراصد في S متزامنة فيما بينها ومع ميقاتيات S، C'_0 مع C_1 في اللحظة t_1 ومع C_2 في اللحظة t_2، وهكذا، الشكل.7. إذ إن هذا ما يعنيه الزمن المطلق : الزمن الذي يمر متساوياً وبانتظام وبدون اعتبار لأي شيء خارجي. ونكتب إذاً $t - t_0 = t' - t'_0$.



الشكل.7

ليكن وضع الجسم في الفضاء في اللحظة t هو M ولنسم المتجهة التي تعين هذا الوضع بالنسبة لـ S $\vec{r}$ ونرمز لتلك التي تعينه بالنسبة لـ 'S بـ $\vec{r}'$. لدينا من الشكل (6)

$$\vec{r} = \vec{r}' + \overline{OO'} \qquad (2.8)$$

ولما كانت سرعة 'S بالنسبة لـ S منتظمة فإن

$$\overline{OO'} = \vec{V}t$$

حيث أخذنا اللحظة t_0 مبدأ قياس الأزمنة. نسمي تحويلات غاليلية العلاقتين التاليتين

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t \qquad (2.9)$$

$$t' = t \qquad (2.10)$$

اللتين تسمحان لنا بالانتقال من المقرن S إلى المقرن 'S.

إن العلاقة (2.9) هي علاقة تغيير المبدأ، أي علاقة الانسحابات. فالانتقال من مقرن غاليلي إلى مقرن غاليلي آخر يبقي إذاً على تجانس الفضاء. أما العلاقة (2.10) فهي تعبير عن تجانس الزمان : إنها لا

تتغير بإضافة ثابتة إلى طرفيها، أي باتخاذ مبدأ جديد لقياس الزمان. ولما كان اختيار اتجاه المحاور في المقارن الغاليلية اعتباطياً فهذا يعني أن الفضاء متناحي. والخلاصة تبقى المقارن الغاليلية على صفات الفضاء (التجانس والتناحي) خلافاً للمقرن الدوار، مقرن آلة الانتباذ مثلاً.

لنكتب قانون حركة النقطة M بالنسبة للمقرنين لدينا من (2.9) و (2.10) :

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t \qquad (2.9)'$$

$$\frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{V} \qquad (2.9)''$$

وبالاشتقاق مرة ثانية

$$\vec{a}' = \vec{a} \qquad (2.11)$$

لأن $\vec{V}$ ثابتة تعريفاً.

ولما كانت الكتلة خاصة بالجسم لا علاقة لها بنظمة المقارنة

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}' = \vec{F}' \qquad (2.12)$$

أي أن التعبير الرياضي – مبدأ نيوتن الثاني – يبقى على حاله في المقرنين ولم يتغير تعبير القوة. وإذا كانت الحركة مستقيمة منتظمة[4] في S $\vec{a} = 0$ فهي مستقيمة منتظمة في 'S أيضاً حسب (2.11) والقوة تساوي الصفر في S و 'S معاً. أما إذا كانت $\vec{V}$ غير ثابتة فإن $\vec{a}' \neq \vec{a}$، وتظهر عندئذ قوى إضافية. تظهر هذه القوى أيضاً حين يدور 'S بالنسبة لـ S حيث يظهر تسارع جديد ناتج عن الحركة الدورانية ((3.26)،2). وسنعود إلى هذا الموضوع عند دراستنا للمقارن غير الغاليلية.

والخلاصة يقوم الميكانيك النيوتوني على الأسس التالية :

1- قبول مفهوم الفضاء الإقليدي الذي تجمع فيه المتجهات حسب قاعدة متوازي الأضلاع،

2- مبدأ نيوتن الثاني

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

3- مبدأ النسبية الغاليلية الذي يقبل وجود مقرن غاليلي وإمكانية الانتقال من مقرن غاليلي إلى آخر حسب تحويلات غاليلية

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t$$

$$t' = t$$

4- ما ينتج عنه من عدم إمكانية الجزم بتجربة ميكانيكية أن 'S يتحرك بالسرعة $\vec{V}$ بالنسبة لـ S الساكن أو أن S هو الذي يتحرك بسرعة $-\vec{V}$ بالنسبة لـ 'S الساكن.

---

[4] نستعمل كلمة الحركة المستقيمة المنتظمة بمعناها الواسع حسب م.1 فهي بهذا المعنى وبمعنى السكون أيضاً : إذا كانت M تتحرك حركة مستقيمة منتظمة بالنسبة لـ S فمن الممكن إيجاد مقرن غاليلي تكون ساكنة بالنسبة له؛ يكفي أن نأخذ 'S مرتبطاً بـ M : مقرن مبدؤه M نفسها على سبيل المثال.

3. تطبيقات ابتدائية

1.3- الثقل والسقوط الحر :

سنرى عند دراستنا للتثاقل أن حقل التثاقل الذي تحدثه الأرض حولها يتجه، بفرض الأرض كروية الشكل نحو مركز الأرض : يمكن اعتبار هذه النقطة البعيدة جداً $6,4\cdot10^{6}$م في ما اللانهاية بالنسبة لنقاط قريبة من بعضها على سطح الأرض – بضعة أمتار – أي اعتبار الحقول المطبقة في مختلف هذه النقاط متوازية فيما بينها أو بتعبير آخر اعتبار سطح الأرض مستوياً من أجل هذه النقاط القريبة من بعضها والحقول عمودية عليه. إن تقارب هذه النقاط (صغر المسافات التي تفصل بينها على سطح الأرض بالنسبة لبعدها عن المركز) يجعلنا نفرض أيضاً أن هذا الحقل العمودي على سطح الأرض ثابت. لنرمز له بـ $\vec{g}$، نسمي القوى المتوازية المطبقة على النقاط A_i ذات الكتل m_i، ثقل هذه النقاط ونكتب كما في (1.5).

$$\vec{P_i} = m_i\vec{g} \qquad (3.1)$$

لنأخذ المقرن الغاليلي (التقريبي) المرتبط بسطح الأرض ولنأخذ Oz في اتجاه مركز الأرض – اتجاه الشاقول. لنعين النقطة G المعرفة بالعلاقة '(1.13)

$$\overline{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i g\overline{OA_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i g} \qquad (3.2)$$

حيث $m_i g$ هي القيمة الجبرية (الموجبة هنا) للقوة $\vec{P_i}$.

ولنخرج المضروب المشترك في مجموعي الصورة والمخرج g فنجد

$$\overline{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\overline{OA_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

أي أن النقطة G تنطبق على مركز الكتلة المعرف بالعلاقة ((1.25).2) فهي إذاً نقطة وحيدة نسميها أيضاً مركز ثقل الجسم.

لنفرض الآن أن الكتلة المعرفة بمبدأ نيوتن الثاني $\vec{F} = m\vec{a}$، ولنسمها الكتلة العطالية، والكتلة المعرفة في تفاعل التثاقل $\vec{P} = m\vec{g}$، ولنسمها كتلة التثاقل، متساويتان[5] :

$$m_{\text{عط}} = m_{\text{تث}} \qquad (3.3)$$

[5] تلعب هذه الفرضية والمحققة تجريبياً بدقة كبيرة دوراً هاماً جداً في النسبية العامة وتعرف باسم مبدأ التعادل.

لدينا إذاً من أجل النقاط القريبة من بعضها على سطح الأرض حسب (3.1) و'(2.3)

$$\vec{F} = m_{\text{ثق}}\,\vec{g} = m_{\text{عط}}\,\vec{a}$$

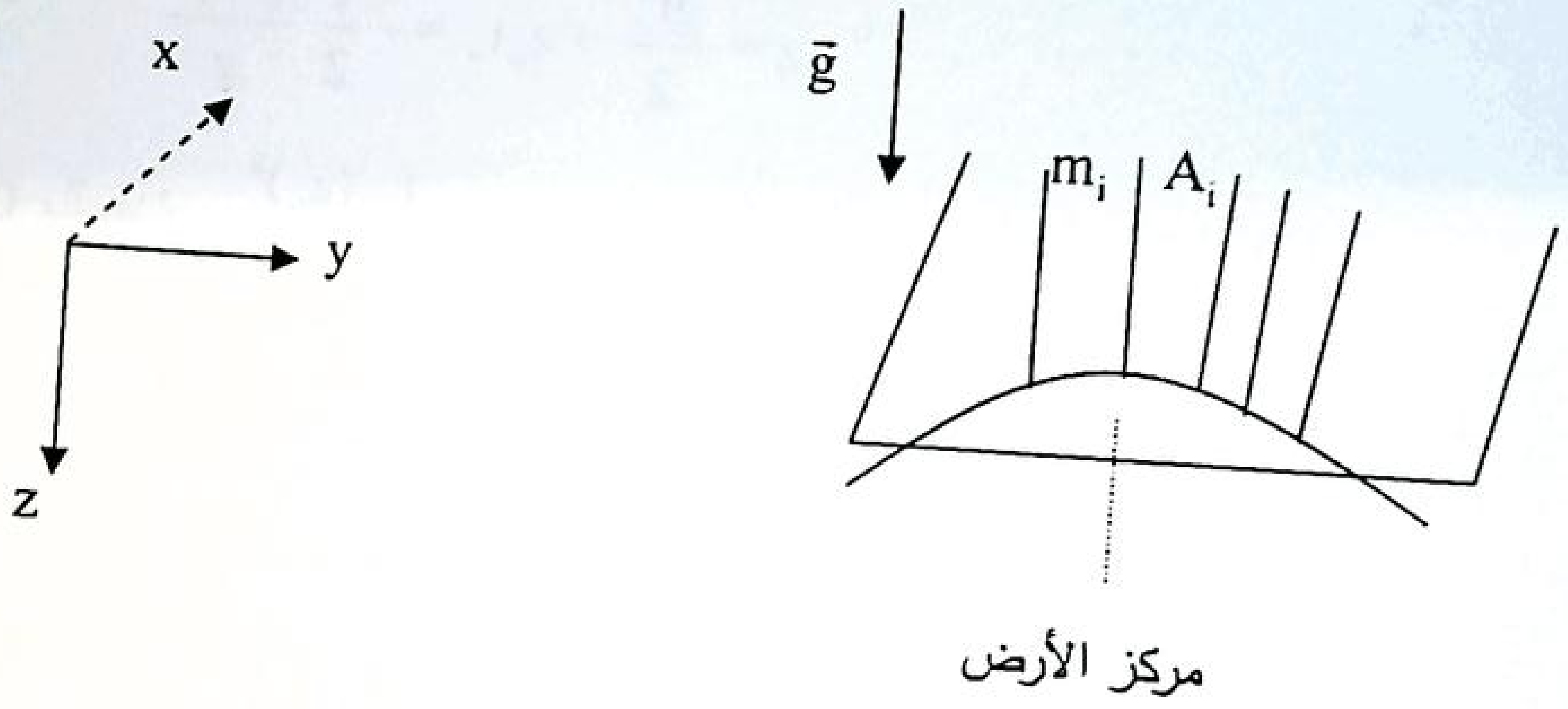
أي أن

$$\vec{g} = \vec{a} \qquad (3.4)$$

إن تسارع الأجسام على سطح الأرض مستقل عن كتلتها ويساوي حقل التثاقل، ولذا نسمي هذا الحقل بالتسارع الأرضي. تختلف قيمته من منطقة إلى أخرى بعيدة عنها على سطح الأرض لأن الأرض ليست كروية تماماً.

يكفي بشكل خاص لمعرفة حركة جسم ما تحت تأثير التثاقل معرفة حركة أي نقطة منه. سنختار مركز ثقله لأهميتها في دراسة الحركات الأخرى، وبشكل خاص لدراسة حركات الجسم الصلب. لنكتب المعادلات التفاضلية الثلاثة المكافئة لـ (3.4) بإسقاطها على المحاور الثلاثة، الشكل.8

$$\begin{cases} z'' = g \\ y'' = 0 \\ x'' = 0 \end{cases} \qquad (3.5)$$



الشكل.8

ولنكامل مرتين بالنسبة للزمن

$$\begin{cases} z' = gt + z'_o \\ y' = y'_o \\ x' = x'_o \end{cases} \qquad (3.6)_1$$

$$\begin{cases} z = \dfrac{gt^2}{2} + z'_o t + z_o \\ y = y'_o t + y_o \\ x = x'_o t + x_o \end{cases} \qquad (3.6)_2$$

لنفرض أولاً أن السرعة البدائية في المستوى Oxy تساوي الصفر $x'_o = y'_o = 0$. لنأخذ نقطة المبدأ O في الوضع البدائي $\vec{O} = (x_o, y_o, z_o)$. هذا يعني أن $0 = y$ و $x = 0$

ولنميز الحالات الثلاث التالية :

a) $z'_o = 0$: يسقط الجسم سقوطاً حراً وتتناسب المسافات المقطوعة مع مربع الأزمان اللازمة لقطعها حسب العلاقة $z = \frac{g}{2}t^2$. فالمسافة المقطوعة في الثانية الأولى هي $\frac{g}{2}$ والثانية الثانية $4 \times \frac{g}{2}$ وفي الثانية الثالثة $9 \times \frac{g}{2}$ الخ.

b) $z'_o < 0$: أي أننا قذفنا الجسم نحو الأعلى بسرعة قيمتها المطلقة z'_o. ستصبح سرعة الجسم مساوية للصفر في اللحظة t_o التي تحددها العلاقة

$$z' = 0 = gt_o + z'_o$$

$$t_o = -\frac{z'_o}{g}$$

ويعود الجسم ابتداء من هذه اللحظة ليسقط حراً ولكن من مسافة تبتعد على O بالمقدار

$$z = \frac{gt_o^2}{2} + z'_o t_o = -\frac{1}{2}\frac{(z'_o)^2}{g}$$

أي أنها تعلو عن O بالمقدار $\frac{1}{2}\frac{(z'_o)^2}{g}$.

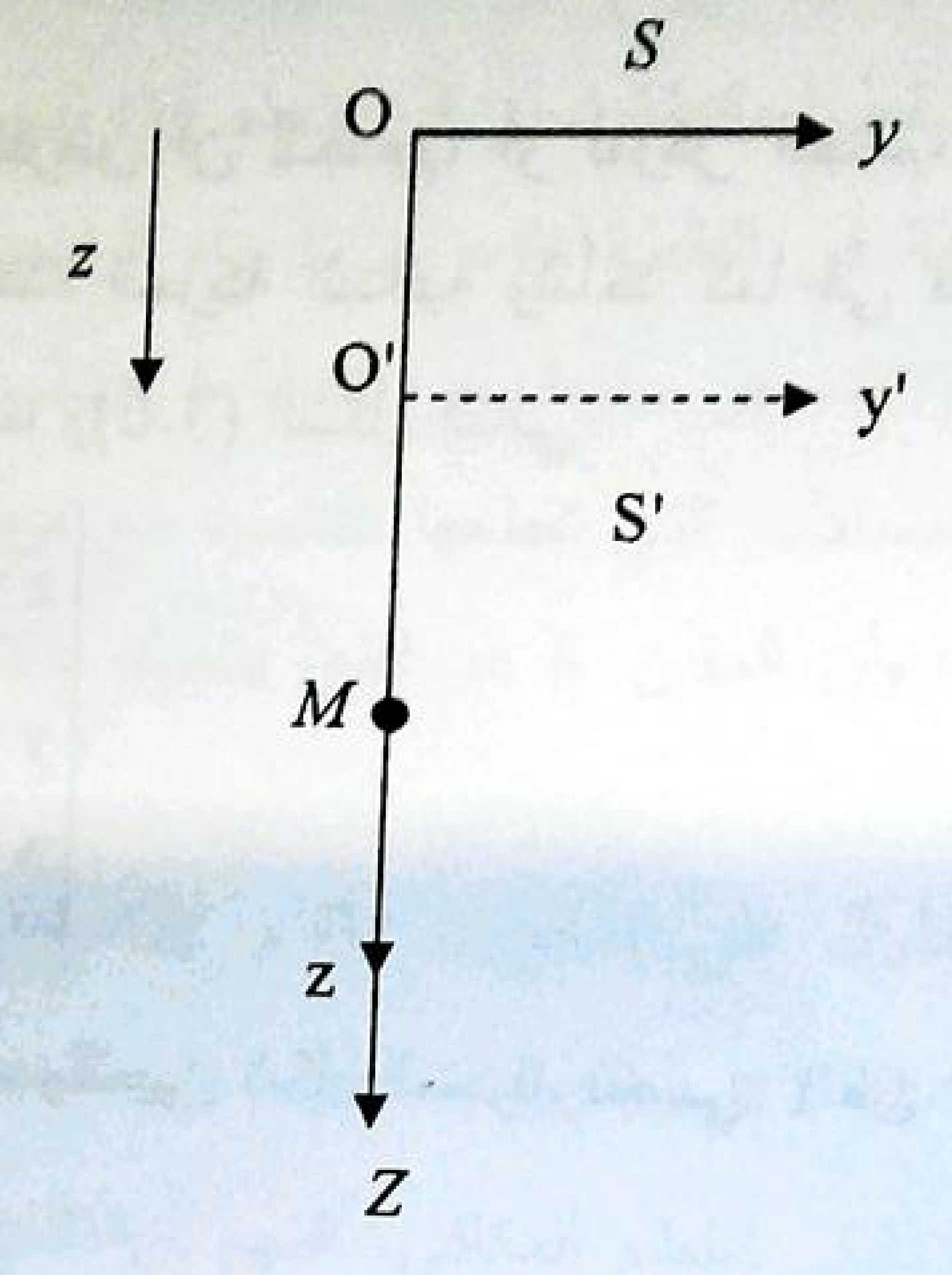
c) $z'_o > 0$: تتركب حركة الجسم من حركة متسارعة بانتظام (سقوط حر $\frac{gt^2}{2}$) ومن حركة مستقيمة منتظمة $(z'_o t)$:

$$z = \frac{gt^2}{2} + z'_o t \qquad (3.7)$$

يمكننا دراسة هذه الحركة بالنسبة للمقرن 'S المنطبق على الجسم في اللحظة البدائية بدلاً عن المقرن S الثابت. يتحرك 'S باتجاه Oz بسرعة ثابتة مساوية لـ z'_o. إن 'S غاليلي كالمقرن S نفسه. نفرض أن 'O تنطبق على O في اللحظة $t = 0$ ونسمي الإحداثيات بالنسبة لـ 'S : x, y, Z لدينا في كل لحظة t، الشكل.9،

في المقرن 'S

$$z = Z + OO' = Z + z'_o t$$
$$Z = z - OO' = z - z'_o t \qquad (3.8)$$



الشكل.9

مقارنة العلاقتين الأخيرتين (3.7) و(3.8)، تبين أن

$$Z = \frac{gt^2}{2}$$

أي أن الجسم يسقط سقوطاً حراً بالنسبة للمقرن S' (بالنسبة للراصد O' مثلاً). وهذا طبيعي لأن سرعته البدائية بالنسبة لهذا المقرن تساوي الصفر (الحالة a). سيؤكد الراصد المرتبط بـ S' في O' أنه غير متحرك لأن الجسم M يسقط سقوطاً حراً بالنسبة إليه وأن الجسم يتحرك بالنسبة لـ S بحركة متسارعة بانتظام وحركة مستقيمة منتظمة وأن وضع الجسم بالنسبة لـ O سيحدد بالعلاقة (3.8) (حيث المقرن الثابت هنا هو S' والمتحرك S)

$$z = Z - z'_o t$$

لأن سرعة المقرن S بالنسبة للمقرن "الثابت" S' هي $-z'_o$ (نحو الأعلى). وهذا أبسط مثال على مبدأ النسبية الغاليلية : لا نتوفر على أي تجربة ميكانيكية لمعرفة ما إذا كان S' يسير بالسرعة z'_o بالنسبة لـ S أو أن S هو الذي يسير بالسرعة $-z'_o$ بالنسبة لـ S'؛ قانون الحركة هو نفسه في الحالتين والتغير بالقياس هو أن نقرر لمن نضيف السرعة البدائية.

2.3– الحركة على شكل قطع مكافئ :

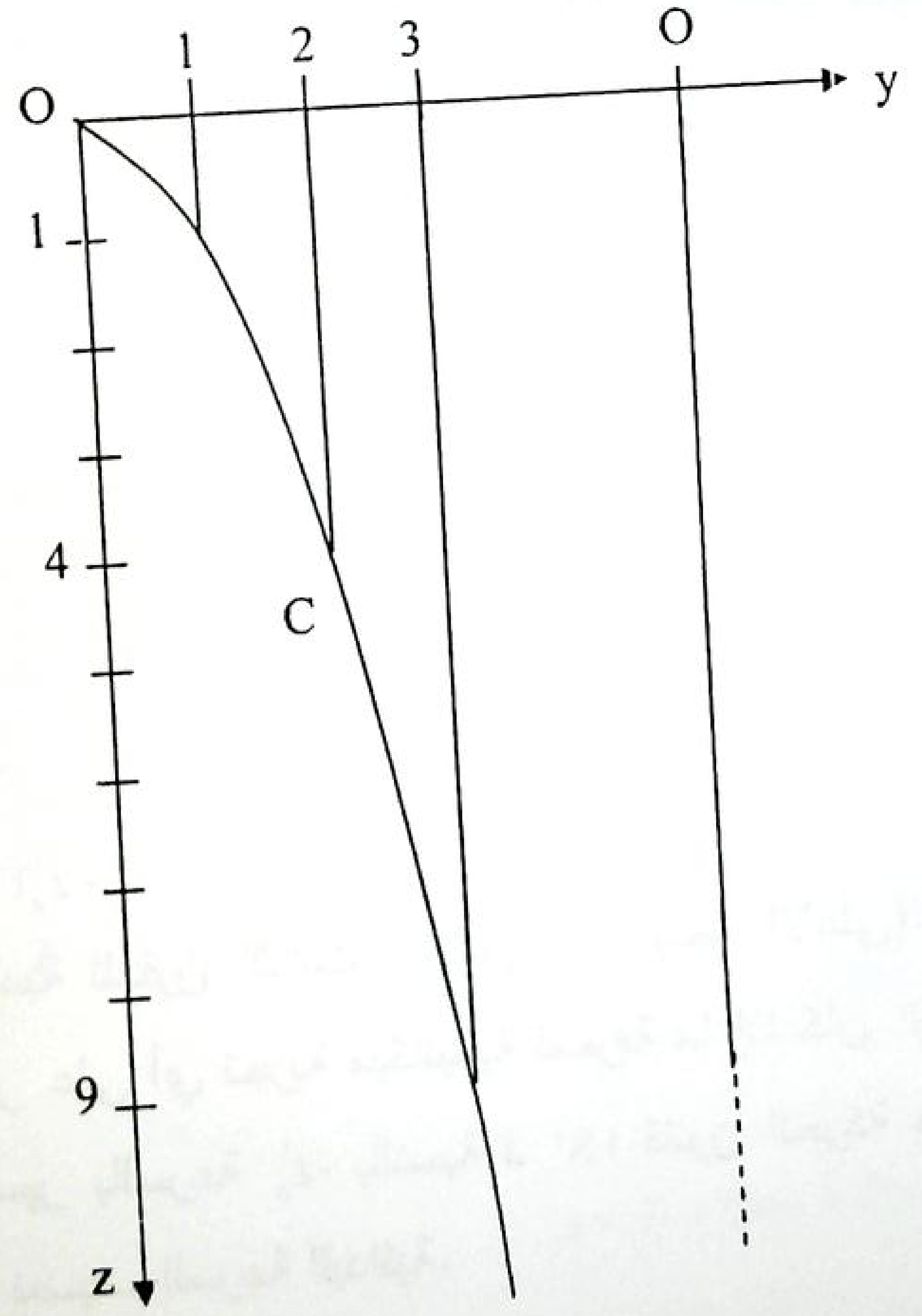
a) لنعد إلى العلاقة (3.6) ولنفرض أن للجسيم، أو لمركز الجسم، سرعة بدائية عمودية على Oz. لنختر[6] المحور Oy في اتجاه هذه الحركة البدائية ولنأخذ كما في فعلنا في الرقم السابق نقطة المبدأ $(x_o, y_o, z_o) = 0$. نأخذ العلاقات $(3.6)_2$ الشكل التالي

$$\begin{cases} z = \dfrac{gt^2}{2} \\ y = y'_o t \\ x = 0 \end{cases} \qquad (3.9)$$

تقع الحركة إذاً في المستوى Ozy، ولتعيين شكل المحرك نقصي t من العلاقتين (3.9) فنجد

$$z = \frac{g}{2y'^2_o} y^2 \qquad (3.10)$$

أي أن المحرك هو قطع مكافئ C مماس لـ Oy في النقطة O، الشكل.10.



الشكل.10

[6] يكتب في كثير من الأحيان "لتكن السرعة البدائية في اتجاه Oy". ولكننا نفضل القول لنختر حتى نبين أن اختيار المحاور عائد لنا وأن علينا أن نختارها بشكل يبسط المسألة.

2.3– الحركة على شكل قطع مكافئ :

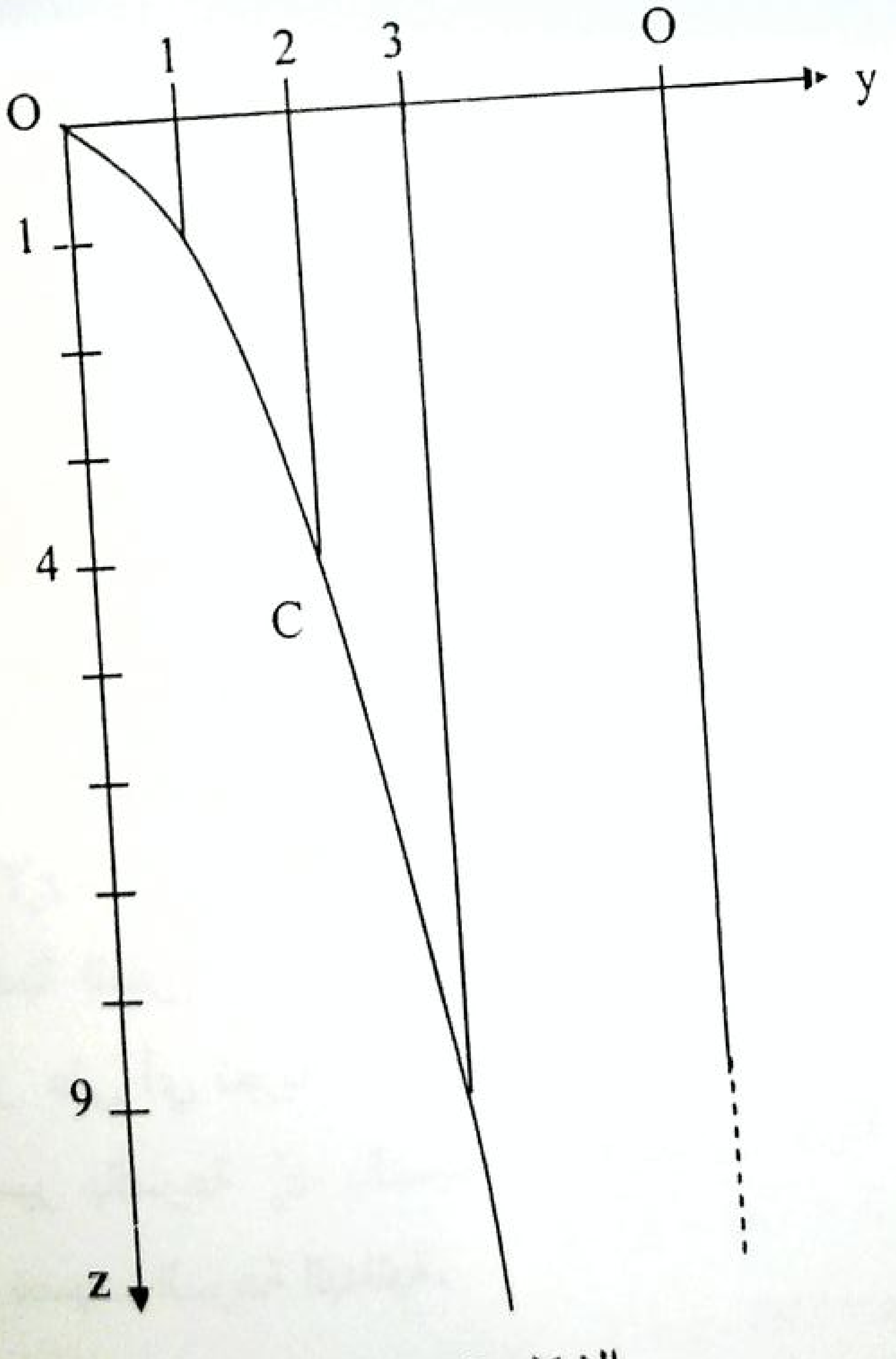
a) لنعد إلى العلاقة (3.6) ولنفرض أن للجسيم، أو لمركز الجسم، سرعة بدائية عمودية على Oz. لنختر[6] المحور Oy في اتجاه هذه الحركة البدائية ولنأخذ كما في فعلنا في الرقم السابق نقطة المبدأ $(x_o, y_o, z_o) = 0$. نأخذ العلاقات $(3.6)_2$ الشكل التالي

$$\begin{cases} z = \dfrac{gt^2}{2} \\ y = y'_o t \\ x = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

تقع الحركة إذاً في المستوى Ozy، ولتعيين شكل المحرك نقصي t من العلاقتين (3.9) فنجد

$$z = \frac{g}{2y_o'^2} y^2 \tag{3.10}$$

أي أن المحرك هو قطع مكافئ C مماس لـ Oy في النقطة O، الشكل.10.



الشكل.10

[6] يكتب في كثير من الأحيان "لتكن السرعة البدائية في اتجاه Oy". ولكننا نفضل القول لنختر حتى نبين أن اختيار المحاور عائد لنا وأن علينا أن نختارها بشكل يبسط المسألة.

إن هذه الحركة هي تركيب حركتين، حركة متسارعة بانتظام في اتجاه Oz وحركة مستقيمة منتظمة في اتجاه Oy. فالقطع المكافئ هو ما يسجله (يراه) الراصد المرتبط بالنظمة الغاليلية S المرتبطة بالأرض. لنتمثل الآن الحركة كحركة قنبلة تسقطها مقنبلة تسير في اتجاه Oy بسرعة ثابتة y'_o وأن القنبلة أسقطت في اللحظة 0 عندما كانت المقنبلة في النقطة O. إن ما يراه الراصد من الطائرة، وهو إحدى النقط الثابتة 'O فيها : المقرن 'S $(O'yz)$، هو سقوط حر للقنبلة : ستبقى القنبلة في كل لحظة في اتجاه الشاقول بالنسبة له، وسيرى أن المسافات التي تقطعها تتناسب مع مربع الزمن اللازم لقطعها وسيدعي بالتالي أن مقرنه 'S غير متحرك وأن المقرن S هو الذي يتحرك بالاتجاه السالب لـ Oy بسرعة ثابتة y'_o.

لم نأخذ نفس الوحدات لقياس الأطوال على المحورين Oy و Oz. فقد أخذنا وحدة الطول على المحور الأول سرعة الطائرة في الثانية $y'_o \cong 300m$ ووحدة الطول على المحور الثاني هي $\frac{g}{2} = 4,9m$، وهذا طبعاً لا يؤثر إلا على الشكل الحقيقي للقطع المكافئ. المهم أن الطيار الذي أسقط القنبلة في اللحظة صفر سيرى أنها قطعت في اللحظة الأولى واحدة الأطوال على Oz وفي اللحظة الثانية 4 أضعاف هذه الوحدة ثم تسعة أضعاف، الخ. إنها تسقط سقوطاً حراً بالنسبة له كما في الحالة a من الرقم السابق.

b) أما عندما لا تكون السرعة البدائية عمودية على z فسنختار اتجاه Oy بحيث تقع هذه السرعة في المستوي Oyz وسنختار Oz نحو الأعلى، لأن هذه الحركة هي بصورة عامة حركة القذائف. تصبح معادلة الحركة $F_Z = -mg = mz''$

ومنه كما في (3.6)

$$z' = -gt + z'_o \tag{3.11}$$

$$z = -\frac{gt^2}{2} + z'_o t \tag{3.12}$$

$$y = y'_o t \tag{3.13}$$

نقصي t من العلاقتين الأخيرتين فنجد

$$z = -\frac{g}{2y'^2_o} y^2 + \frac{z'_o}{y'_o} y \tag{3.12)'}$$

لتكن θ الزاوية التي يحدثها، اتجاه المدفع، اتجاه السرعة البدائية $\vec{V}_o$ مع المحور الأفقي.

لدينا $z'_o = V_o \sin\theta$ و $y'_o = V_o \cos\theta$ $\qquad \frac{z'_o}{y'_o} = tg\theta$

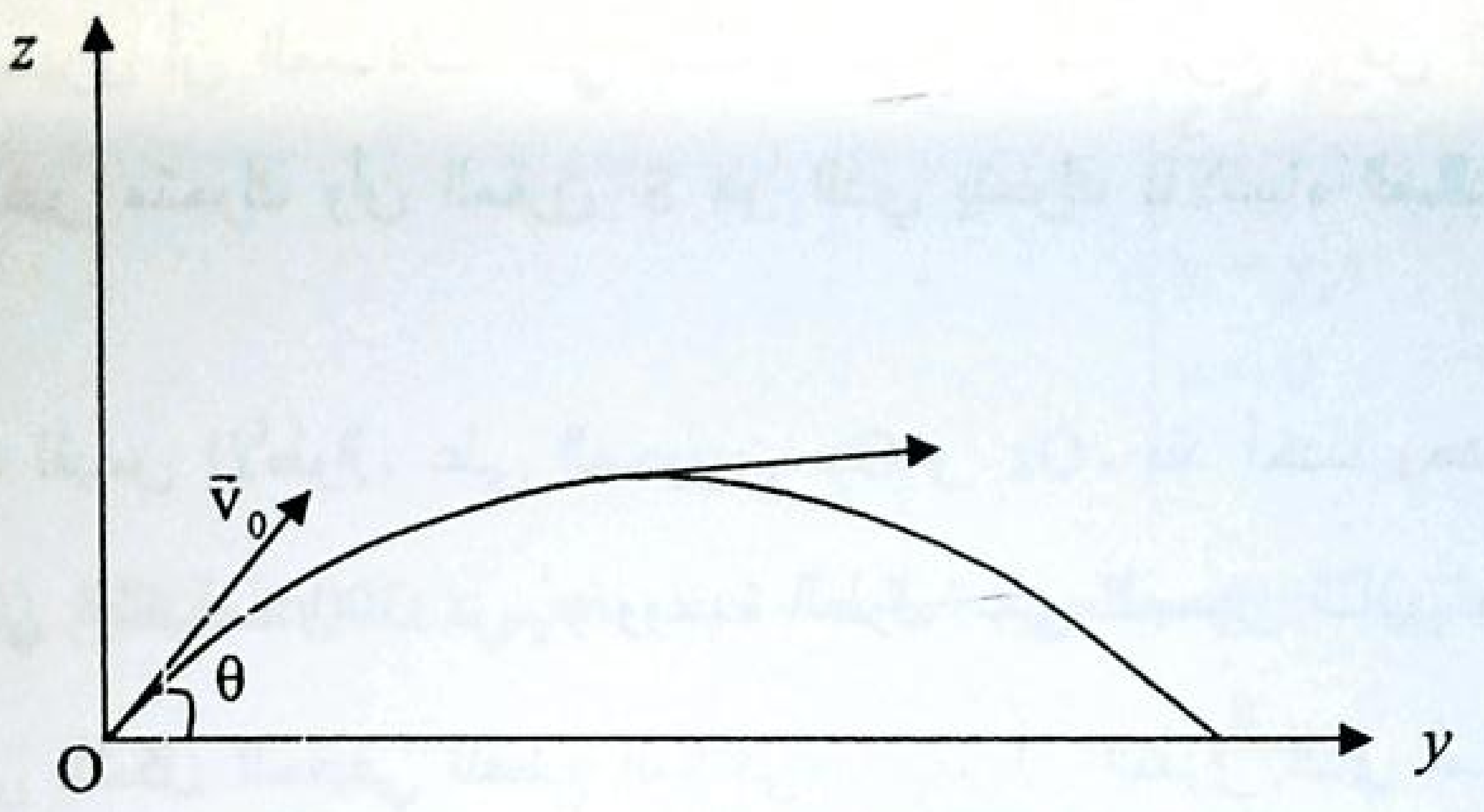
لا تدخل طويلة $\vec{V}_o$ إلا في الحد الأول من '(3.12) المتناسب مع y^2_o ونكتب معادلة القطع المكافئ الذي يوازي محوره Oz على الشكل :

$$z = \frac{-g}{2(V_o\cos\theta)^2} y^2 + tg\theta\, y \tag{3.14}$$

أما (3.11) و $y' = y'_o$ فتعطيانا طويلة السرعة في كل لحظة

$$\left|\vec{V}\right|^2 = V_o^2 + g^2t^2 - 2gtV_o\sin\theta$$

إن وضع $z = 0$ في (3.12) يعطينا مدى القذيفة؛ ووضع $z' = 0$ في (3.11) يعطينا لحظة وصول القذيفة إلى قمة القطع وبالتالي إحداثيات القمة وذلك بوضع القيمة التي حصلنا عليها في (3.12) و(3.13)، الشكل.11.



الشكل.11

3.3– الحركة في حقل كهربائي ثابت :

يمكن تعميم العلاقات (3.6) إلى كل الحالات التي تكون فيها القوة ثابتة – لا يتغير اتجاهها، ولا تتغير مع الزمن، ومتجانسة، لا تتغير من نقطة إلى أخرى–، كما هو عليه الأمر في حقل التثاقل، أو في الحقل الكهربائي الراكد الذي ننتجه مثلاً بين لبوسي مكثفة. نكتب عندما تكون لدينا شحنة q في هذا الحقل.

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

ونكتب قانون حركة هذه الشحنة على الشكل

$$m\vec{a} = q\vec{E}$$

ونكامل مرتين[7] فنجد

$$\vec{r}' = \frac{q}{m}\vec{E}t + \vec{V}_o \qquad (3.15)_1$$

$$\vec{r} = \frac{q}{m}\vec{E}\frac{t^2}{2} + \vec{V}_o t + \vec{r}_o \qquad (3.15)_2$$

---

[7] مكاملة هذه العلاقة المتجهة مرتين يعني أننا كتبنا – إذا أردنا إسقاطها على ثلاثة محاور – كما فعلنا في (3.5) و(3.6)–،

$$x'' = \frac{q}{m}E_x$$

ثم

$$x' = \frac{q}{m}E_x t + x'_o$$

وأخيراً $x = \frac{q}{m}E_x\frac{t^2}{2} + x'_o t + x_o$ وكذلك علاقتين مماثلتين لـ y و z وهذا ما كتبناه على الشكل $(3.15)_2$.

لنفرض في البدء أننا نريد تسريع الشحنة q وأننا أدخلناها في النقطة O في حقل كهربائي ثابت، حقل مكثفة اتجاهه Oy. ولنفرض أنه لم تكن للشحنة أي سرعة بدائية. تصبح $(3.15)_1$ على الشكل

$$y' = \frac{q}{m}E_y t \qquad (3.16)$$

وهي سرعة متزايدة بانتظام. نترك الشحنة في هذا الحقل الزمن t_o حتى تصبح سرعتها y'_o. نوقف الآن مفعول E_y وندخل الشحنة في مكثفة ثانية يتجه الحقل الثابت فيها باتجاه Oz. ستتحرك الشحنة راسمة الآن قطعاً مكافئاً كما رأينا في الرقم السابق. وهذا ما نراه من جديد بكتابة $(3.15)_1$ على الشكل

$$\begin{cases} x' = x'_o = 0 \\ y' = y'_o \\ z' = \dfrac{q}{m}E_z t \end{cases} \qquad (3.15)'_1$$

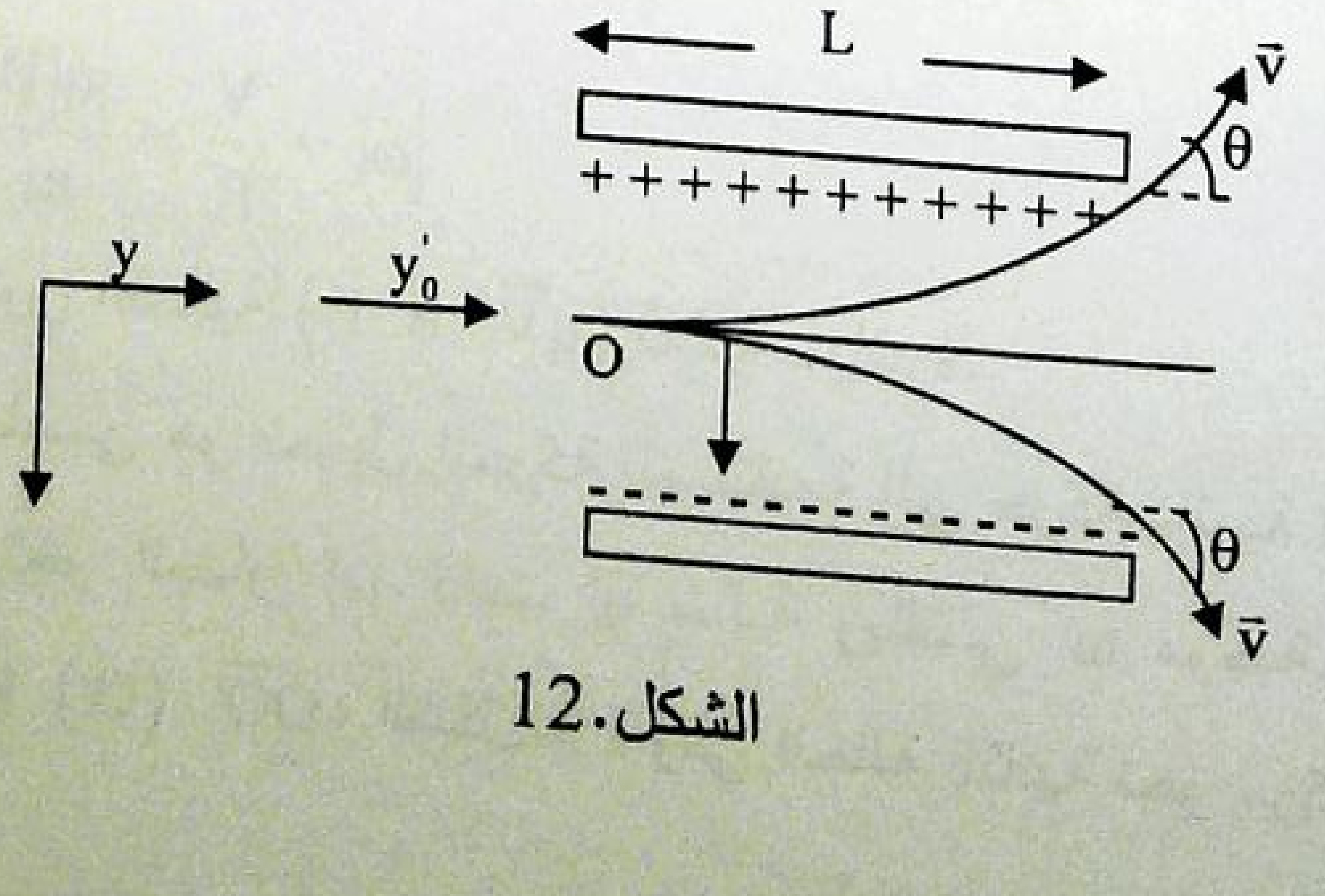
وبالتكامل وبأخذ نقطة المبدأ الجديدة نقطة دخول الشحنة إلى المكثفة الثانية

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = y'_o t \\ z = \dfrac{q}{2m}E_z t^2 \end{cases} \qquad (3.15)'_2$$

وهي علاقات لا تختلف عن (3.9) إلا بالثابتة $\frac{q}{m}$ التي ضرب بها الحقل الكهربائي (هذه الثابتة هي 1 طبعاً من أجل حقل التثاقل مادمنا قبلنا مبدأ تكافؤ الكتلة العطالية والكتلة التثاقلية).

ستتجه الشحنة نحو الأسفل (في اتجاه الحقل، الشكل.12) إذا كانت شحنتها موجبة، لأن اتجاه القوة نحو الأسفل كما في التثاقل، أو نحو الأعلى إذا كانت شحنتها سالبة. يكفي لمعرفة انحراف متجهة السرعة عن الاتجاه البدائي Oy عند مغادرتها المكثفة، معرفة طول المكثفة، وليكن L. تبقى الشحنة في المكثفة الزمن

$$t = \frac{L}{y'_o}$$



الشكل.12

حسب العلاقة الثانية من $(3.15)'_2$. أما سرعتها العمودية في هذه اللحظة فتعطيها العلاقة الثالثة من $(3.15)'_1$

$$z' = \frac{q}{m} E_z \frac{L}{y'_o}$$

و

$$tg\theta = \frac{z'}{y'} = \frac{z'}{y'_o} = \frac{qLE_z}{my'^2_o} \qquad (3.17)$$

4.3- الحركة في حقل مغنطيسي ثابت :

لم يعد من الممكن هنا الحديث عن العلاقات (3.6) رغم ثبات الحقل لأن القوة ليست في اتجاه الحقل. قلنا إن الشحنة q المتحركة بسرعة $\vec{V}$ في حقل مغنطيسي (راكد) تتأثر بقوة $\vec{F}$

$$\vec{F} = q\vec{V} \times \vec{B} = m\vec{a} \qquad (3.18)$$

فالتسارع هنا عمودي على الحقل $\vec{B}$ وليس في اتجاهه كما هو عليه الحال في حقل التثاقل والحقل الكهربائي الراكد. لنفرض أننا أعطينا سرعة معينة $\vec{V}_o$ للشحنة باستعمال الحقول الكهربائية الراكدة للمكثفات كما في المثال السابق ولنفرض في البدء أن الحقل المغنطيسي عمودي على اتجاه $\vec{V}_o$. فالقوة – والتسارع – عموديان على السرعة. لدينا إذاً حسب ((3.19).2)

$$a_{\parallel} = \frac{dV}{dt} = 0 \qquad (3.19)$$

والقيمة الجبرية للسرعة ثابتة. ومن جهة أخرى لدينا حسب ('(3.20).2) وحسب (3.18)

$$a_{\shortparallel} = \frac{V^2}{R} = \frac{qVB}{m}$$

ومنه

$$R = \frac{Vm}{qB} \qquad (3.20)$$

أي أن نصف قطر الانحناء ثابت لأن V وكل المقادير الأخرى في الطرف الثاني من العلاقة السابقة ثابتة ولما كان التسارع عمودياً دوماً على الاتجاه (الثابت) للحقل $\vec{B}$ فالحركة إذاً حركة مستوية دائرية سرعتها الزاوية

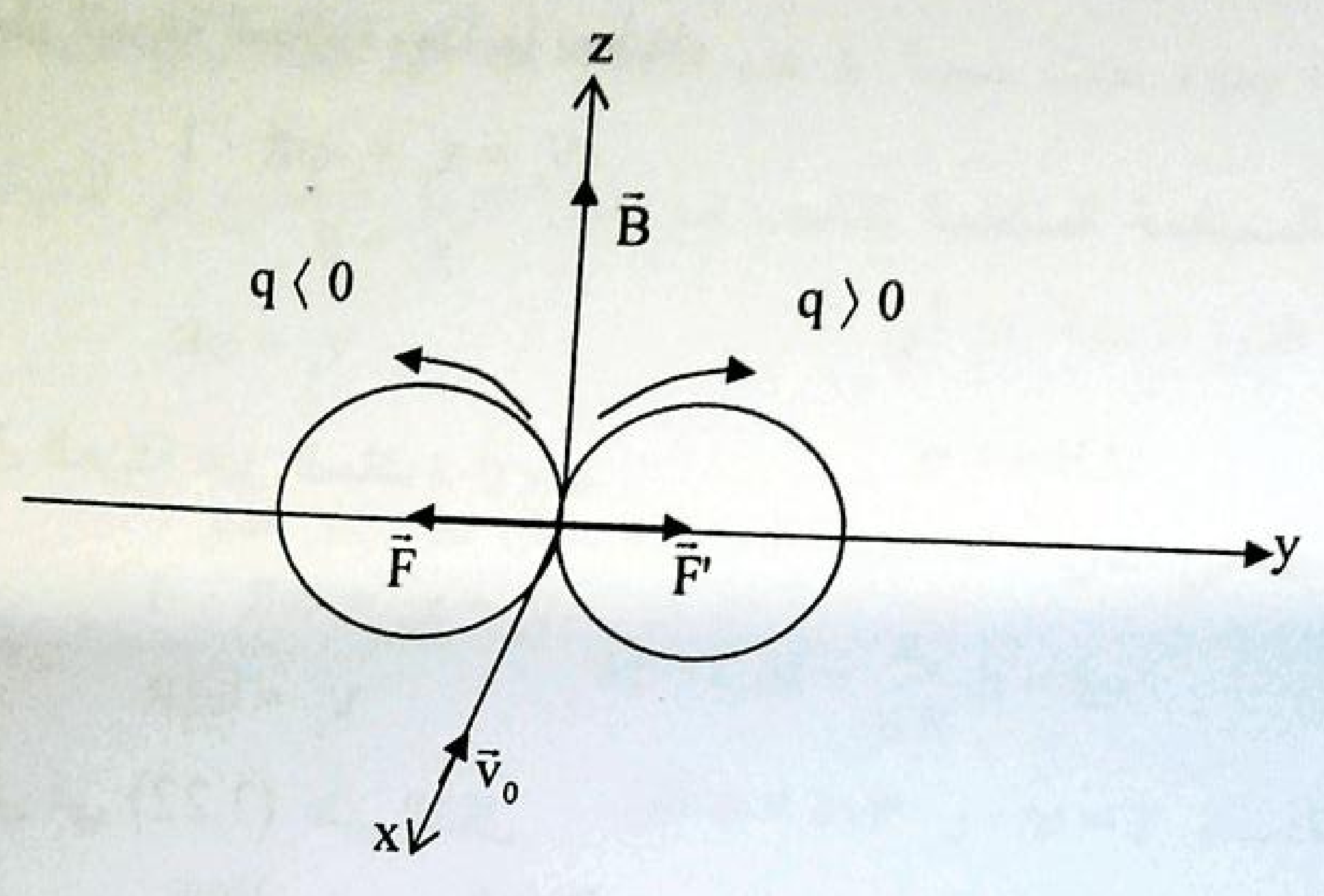
$$|\omega| = \frac{V}{R} = \frac{|q|B}{m} \qquad (3.21)$$

واتجاه الحركة هي بحيث تكون الثلاثية $(q\vec{V}, \vec{B}, \vec{F})$ ثلاثية مباشرة.

إن كل ما فعله الحقل المغنطيسي هو تحويل الحركة المستقيمة إلى حركة دائرية نحو اليمين إذا كانت q موجبة وبالتالي ω سالبة ونحو اليسار إذا كانت q سالبة وبالتالي ω موجبة. تتجه القوة في الحالة الأولى في اتجاه مركز الدائرة (O') $\overline{OO'}$، الشكل.13 وفي الحالة الثانية نحو مركز الدائرة (O'') $\overline{OO''}$. أي أن

$$\omega = \frac{-qB}{m} \qquad (3.21)'$$

في كل الحالتين.



الشكل.13

لنلاحظ أننا لم نحتج في هذه الدراسة إلى إسقاط العلاقة (3.18) على المحاور الثلاثة مكتفين باستغلال إمكانات الحساب المتجه.

يعطينا الإسقاط، إذا سمينا Oz اتجاه الحقل الثابت $\vec{B}$ و Ox منحى السرعة (اتجاه السرعة عمودي على الورقة، معاكس لـ Ox) :

$$\vec{r_o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{r'_o} = \begin{pmatrix} -V_o \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x'' = \frac{q}{m} y'B \\ y'' = -\frac{q}{m} x'B \\ z'' = 0 \end{cases} \qquad (3.22)$$

ومنه $z' = z'_o t = 0$ ، $z = z_o = 0$ والحركة مستوية في المستوي $(O\,x\,y)$.

إن مكاملة جملة المعادلتين الأوليين في (3.22) ليست عملية سهلة بصورة عامة لوجود المجهول y' في المعادلة الأولى والمجهول x' في المعادلة الثانية أي أننا لا نستطيع مكاملة إحداهما دون الأخرى. إلا أنه يكفينا أن نلاحظ أن متجهة التسارع $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ متناسبة مع $\begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix}$ فهي إذاً عمودية دوماً على متجهة السرعة $(x''x' + y''y' = 0)$ والحركة دائرية منتظمة حسب ((3.16).2). سنأخذ إذاً $x = R\cos\theta$ و $y = R\sin\theta$ و $\omega = \frac{d\theta}{dt}$.

لدينا طبعاً

$$x' = -\omega R \sin\theta$$

$$y' = \omega R \cos\theta$$

و $\theta_o = \frac{\pi}{2}$ من أجل الحركة المباشرة وهذا ما يعطينا

$$-V_o = x'_o = -\omega R \cdot 1$$

$$y'_o = 0$$

ومنه

$$V_o = \omega R$$

و $\theta_o = -\frac{\pi}{2}$ من أجل الحركة غير المباشرة $\omega < 0$

$$-V_o = x'_o = -\omega R \cdot -1$$

$$V_o = |\omega| R$$

لنكتب المعادلة الأولى في (3.22) على الشكل

$$x'' = \frac{Bq\omega R}{m}\cos\theta = \frac{Bq\omega}{m}x$$

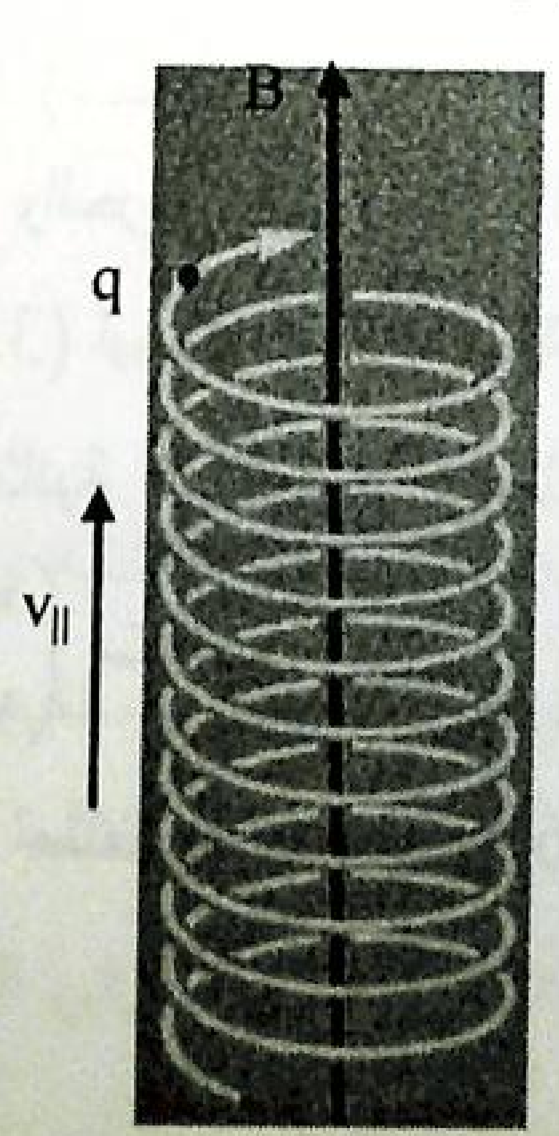
إن معامل x'' هو $-\omega^2$ حسب ((2.(3.16)) ومنه

$$\omega = -\frac{Bq}{m} \qquad (3.21)''$$

وهي موجبة والحركة مباشرة إذا كانت q سالبة، وسالبة والحركة غير مباشرة إذا كانت q موجبة كما رأينا في '(3.21).

الحركة اللولبية :

لنفرض في النهاية أن $\vec{V}_o$ ليست عمودية على Oz وإنما مائلة بالنسبة إليه. لنكتبها على الشكل $V_{o\parallel}$ (الموازية لـ Oz) و $V_{o\perp}$ العمودية عليه. تبقى $V_{o\parallel}$ ثابتة لانعدام القوى في اتجاه Oz والحركة مستقيمة منتظمة في هذا الاتجاه. أما الحركة في المستوى Oxy فهي دائرية كما رأينا. وتركيب هاتين الحركتين هو الحركة اللولبية (الحلزية)، الشكل.14.



الشكل.14

لنلاحظ أن الزاوية التي يحدثها المماس على المنحني مع المحور Oz ثابتة، لتكن φ هذه الزاوية. إن $tg\varphi = \frac{V_{o\parallel}}{V_{o\perp}} = \frac{z'_o}{\omega R} = k$، حيث سمينا k هذه الثابتة. هذا من جهة، ومن جهة ثانية فإن المسافات المقطوعة بالحركة المستقيمة المنتظمة تتناسب مع طول القوس المقطوع في الحركة الدائرية. ليكن σ القوس المقطوع في الفترة الزمنية Δt أي

$$\sigma = \omega R \Delta t$$

أما المسافة المقطوعة في الحركة المستقيمة المنتظمة خلال هذه الفترة فهي

$$\Delta z = z'_o \Delta t = \frac{z'_o}{\omega R}\sigma = k\sigma$$

وإذا كانت الدورة كاملة، $\Delta t = T$، و $\sigma = 2\pi R$ فإن

$$\Delta z = \frac{z'_o}{\omega R} 2\pi R = 2\pi R k$$

وتسمى هذه المسافة خطوة اللولب.

إن اللولب هو أول محرك مائل (Skew, gauche) نصادفه. يمكننا حساب نصف قطر تحدبه، ρ، في نقطة منه، انطلاقاً من متجهة السرعة $(-\omega R\sin\theta$ ،$\omega R\cos\theta$ ،$z'_o)$ ومن مشتقها، بتطبيق ((3.22)،2) لنجد

$$\rho^2 = \frac{\left(\omega^2 R^2 + z_o'^2\right)^3}{\omega^4 R^2 \left(\omega^2 R^2 + z_o'^2\right)} = R^2\left(1 + k^2\right)^2$$

التحدب ثابت ولكنه مختلف عن R.

لنلاحظ أخيراً أن المسافة بين نقطتين متجاورتين في المنحني هي

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$
$$= \left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)dt^2$$
$$= \left(\omega^2 R^2 + z_o'^2\right)dt^2$$

التي نكتبها بدليل $d\sigma = \omega R dt$

$$= \left(1 + k^2\right)d\sigma^2$$

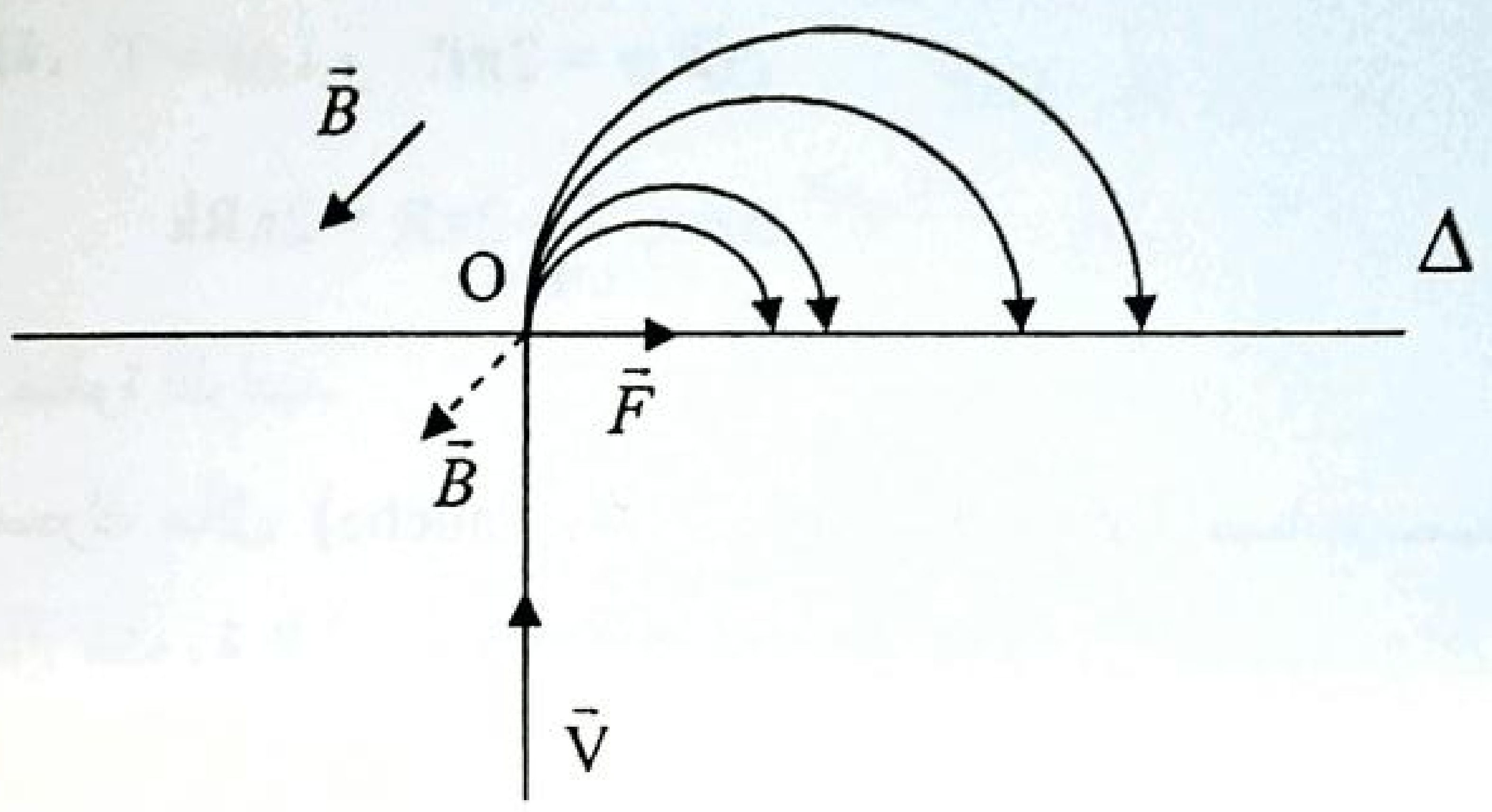
والمسافة بين نقطتين لا على التعيين هي

$$S = \left(1 + k^2\right)^{1/2}\sigma$$

يمكن البرهان على أن هذه المسافة هي أقصر مسافة بين نقطتين من نقاط الأسطوانة : إن اللولب هو الخط الجيوديزي – هو المستقيم تعريفاً – على الأسطوانة.

راسم الطيف :

يمكن استعمال الانعطاف الناتج عن تطبيق حقل مغنطيسي لقياس كتل الأيونات، أو على الأقل اندفاعاتها الخطية، حسب العلاقة (3.20). لنفرض أن لكل الأيونات نفس الشحنة الموجبة ونفس السرعة، ندخلها في حقل مغنطيسي عمودي على اتجاه حركتها فيعطف الحقل هذا الاتجاه وترسم الأيونات دوائر تتناسب أقطارها مع كتلها، الشكل.15 : يساوي الحقل صفراً تحت الخط Δ ويساوي لـ $\vec{B}$ فوقه وهو عمودي عليه. تنحرف الشحنات نحو اليمين ونصف القطر هو : $R = \frac{Vm}{qB}$ حسب (3.21). وهذا هو مبدأ راسم الطيف الذي يسمح بفصل الأيونات حسب كتلها (أو حسب اندفاعاتها) إذا كانت السرعة البدائية مختلفة.



الشكل.15

يمكن استعمال نفس المبدأ لإحكام حزمة من الجسيمات بعطفها مقدار $180°$. يسمى هذا الإحكام بالتجميع البؤري المغنطيسي. لنفرض أن اندفاع الجسيم الأول هو $\vec{P}_1$ عمودي على Δ واندفاع الجسيم الثاني $\vec{P}_2$، المساوي للأول في الطويلة، ينحرف عنه زاوية θ. يرسم الجسيم الأول قطر الدائرة $2R$، ذات المركز O_1. سيرسم الجسيم الثاني دائرة لها نفس القطر ولكن مركزها O_2، وهو الذي نحصل عليه بإقامة العمود على $\vec{V}_2$ في O. وهكذا يقع الجسيم الثاني في النقطة C_2 على Δ بدلاً عن النقطة C_1، الشكل.16. نرى بسهولة أن الطول

$$C_1C_2 = 2R - 2R\cos\theta \tag{3.23}$$

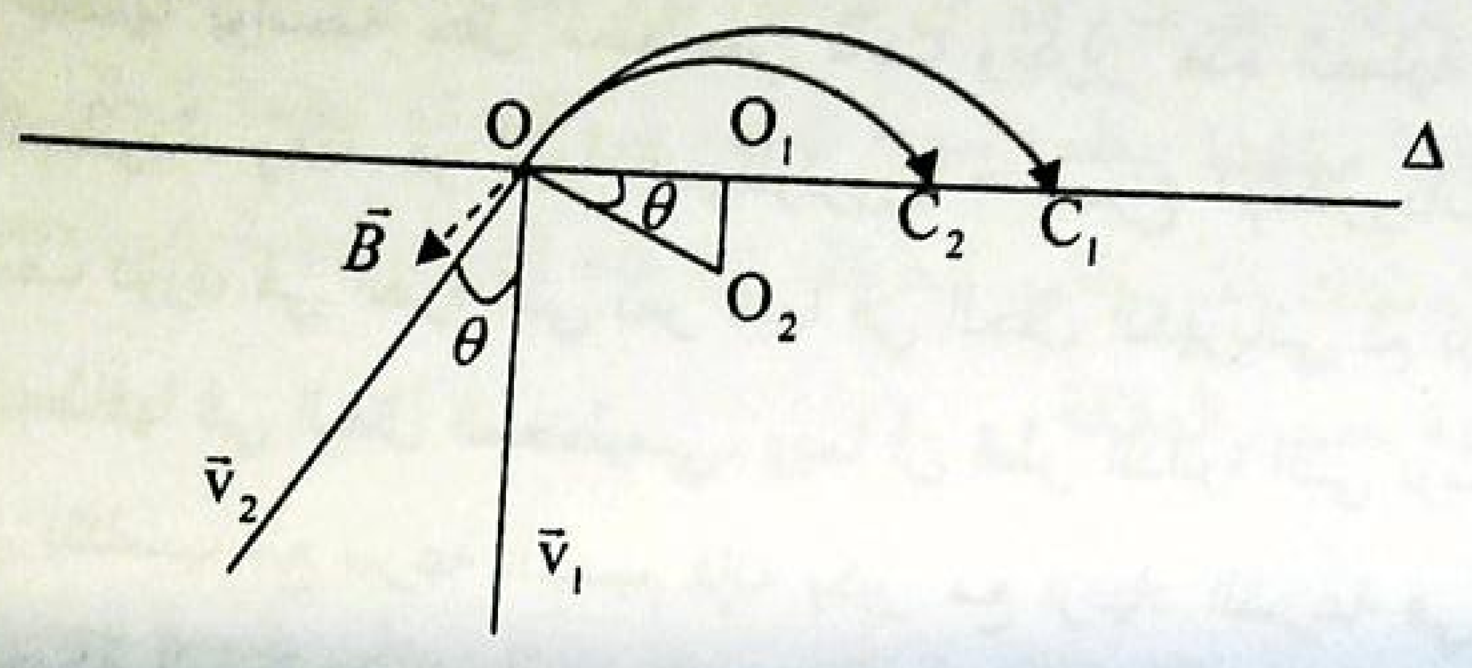
حيث $2R\cos\theta$ هو طول الوتر OC_2 على الدائرة التي مركزها O_2

ومن أجل θ صغيرة فإن هذا يساوي

$$= 2R(1 - \cos\theta) \cong R\theta^2 \qquad (3.23)'$$

حيث نشرنا $\cos\theta$ في جوار الواحد من أجل θ صغيرة ... $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - $.

وهكذا فإن المسافة C_1C_2 مقدار من الدرجة الثانية بالمتناهي في الصغر θ. إن المسافة C_1C_2 هي $\frac{1}{100}$ من نصف القطر R على سبيل المثال إذا كانت $\theta = 0,1$



الشكل.16

5.3- الحركة في حقل كهربائي متناوب :

لنفرض أن الشحنة q خاضعة إلى حقل كهربائي يتغير بشكل دوري مع الزمن $\vec{E} = \vec{E}_o \sin\omega t$. لنأخذ المحور Ox في اتجاه هذا الحقل. تصبح معادلة الحركة على الشكل

$$m\,x'' = qE_o \sin\omega t \tag{3.24}$$

لنفتش عن حل دوري لهذه المعادلة من الشكل

$$x = X \sin\omega t + x'_o t + x_o \tag{3.25}$$

حيث x'_o و x_o ثابتتان تعينهما الشروط البدائية.

ولنفرض أن دور الحقل الكهربائي، أن تواتره الزاوي ثابت $= \omega$؛ تصبح المعادلة (3.24) على الشكل

$$-m\,\omega^2 X = qE_o$$

وهذا ما يحدد لنا الاستطالة

$$X = -\frac{qE_o}{m\omega^2} \tag{3.26}$$

يعطينا اشتقاق (3.25) السرعة، بعد تبديل X بقيمتها

$$V_x(t) = -\frac{qE_o}{m\omega}\cos\omega t + x'_o$$

تسمح لنا هذه العلاقة بتعين قيمة السرعة البدائية، وبالتالي الثابتة x'_o. فإذا أردنا أن تكون هذه السرعة مساوية للصفر مثلاً

$$V_x(0) = 0 = -\frac{qE_o}{m\omega} + x'_o$$

فإن

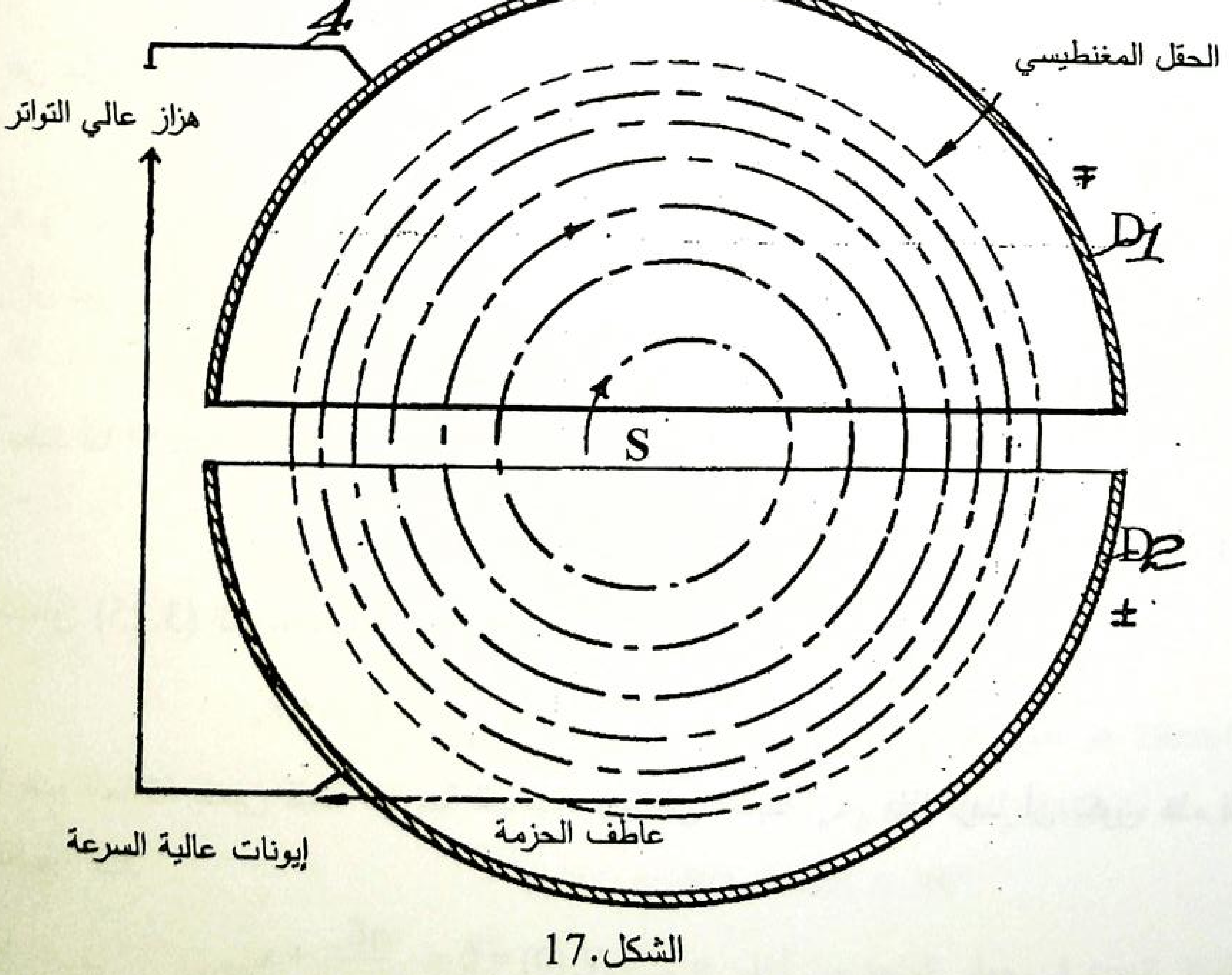
$$x'_o = \frac{qE_o}{m\omega}$$

وقانون الحركة هو إذاً

$$x = -\frac{qE_o}{m\omega^2}\sin\omega t + \frac{qE_o}{m\omega}t + x_o \quad (3.27)$$

وهكذا فإن الحركة توضيع لحركة متناوبة بانتظام وحركة مستقيمة منتظمة. يمكن إذاً بواسطة هذا الحقل تسريع الجسيمات ثم عطفها بواسطة حقل مغنطيسي ثابت وتكرار هذه العملية عدة مرات حتى يصل الجسيم إلى السرعة المطلوبة. وهذا هو مبدأ السيكلوترون – مسرع الإلكترونات الدائري – : تتسارع الجسيمات بعد كل نصف دورة، في الفترة التي تمر فيها في الحقل الكهربائي ثم تبقى بطبيعة الحال على نفس السرعة في فترة انعطافها في الحقل المغنطيسي. وبما أن قطر الدائرة التي يرسمها الجسيم في حركته حول الحقل المغنطيسي يتناسب مع سرعة الجسيم فإنه يكبر مع ازدياد السرعة في كل نصف دورة وهذا ما يتفق مع توضيع الحركة المستقيمة للجسيم. إن ما يتطلبه الأمر هو أن يكون التواتر الزاوي للحقل الكهربائي ω مساوياً للتواتر الزاوي في الحركة الدائرية للجسيم الذي عينته العلاقة (3.21).

يتألف السيكلوترون من إلكترودين أجوفين على شكل نصف قرص D_1 ، D_2 ومن عاطف. يوضع الجهاز في حقل مغنطيسي ثابت ومتجانس، متجه نحو الأمام في الشكل.17. تتحرك الإيونات الخارجة من المنبع S على شكل حلزوني وتتسرع الإيونات في الفراغ بين D_1 و D_2.



الشكل.17

6.3- الحركة تحت تأثير قوى التماس :

a) قوى الاحتكاك : لنضع جسماً ما على قاعدة أفقية، يخضع هذا الجسم إلى قوة ضغط عمودية على القاعدة مساوية لوزنه $\vec{N} = \vec{P}$. يفترض إذاً أن تطبيق قوة أفقية عليه ستسرعه فوراً ولكن هذا لا يحدث عادة. لنطبق قوة جر أفقية متزايدة ببطء؛ سيبدأ الجسم في الحركة عندما تتجاوز طويلة قوة الجر قيمة حدية هي قيمة قوى الاحتكاك التي تقاوم الحركة، إن هذه القيمة الحدية هي حسب كولون Coulomb متناسبة مع القوة الناظمية حسب العلاقة

$$F_{max} = \mu_0 N \quad (3.28)$$

يسمى مثل التناسب μ_0 بمعامل الاحتكاك السكوني وهو يتوقف على طبيعة المادة وعلى حالة السطحين المتماسين وهو كبير عندما يكون الجسمان المتماسان من جنس واحد (حديد-حديد، خشب-خشب الخ)

يمكن كتابة معامل الاحتكاك على الشكل $\mu_0 = tg\varphi$

يمكننا تصور φ كزاوية رأس المخروط : لا تبدأ الحركة إلا إذا وقعت حصيلة القوتين $\vec{N}$ و $\vec{F}$ على سطح المخروط، الشكل.18a. يمكن توضيح معنى هذه الزاوية φ بالعودة إلى التجارب التي قام بها غاليله نفسه على المستويات المائلة، الشكل.18b:

لدينا $N = P\cos\alpha$ وقوة الجر $P\sin\alpha$ معاكسة لقوة الاحتكاك

$$\vec{P}\sin\alpha = -\vec{F}$$

لا يتحرك الجسم ما دامت $F < F_{max} = Ntg\varphi$

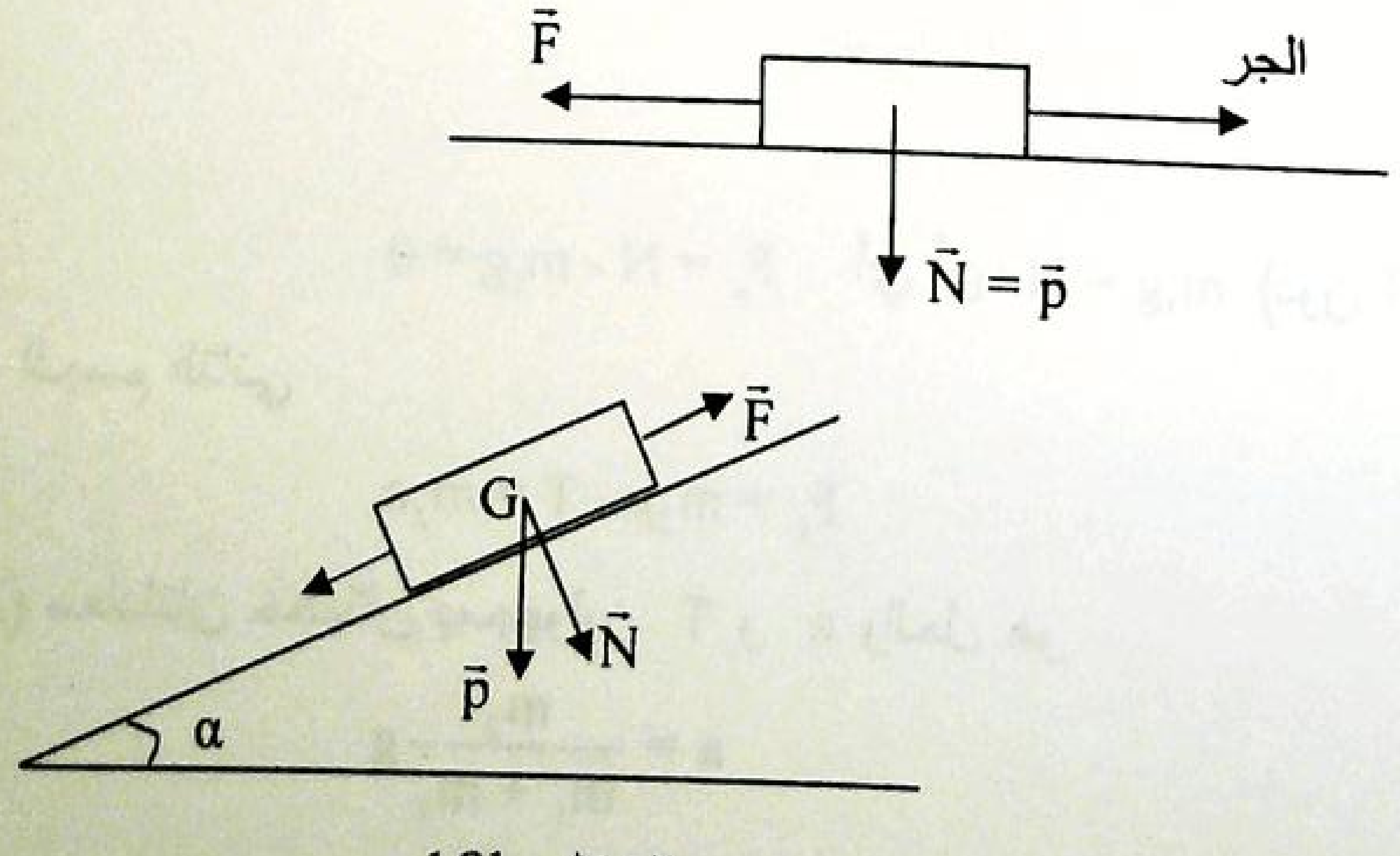
وهكذا فإن شرط عدم الحركة هو

$$P\sin\alpha < Ntg\varphi = P\cos\alpha \, tg\varphi$$

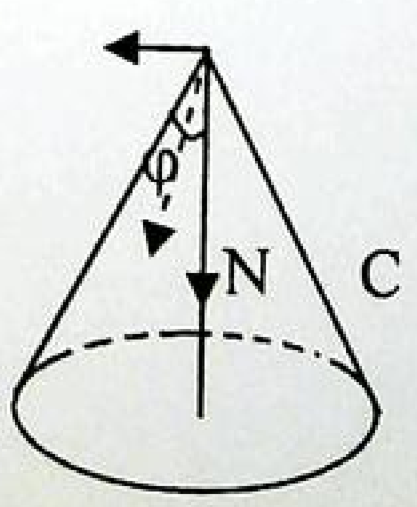
أو

$$tg\alpha < tg\varphi$$

$$\alpha < \varphi$$



الشكل.18b



الشكل.18a

وهكذا نرى أن الجسم يبقى ساكناً مادامت زاوية ميل المستوى α أصغر من زاوية الاحتكاك φ. يبدأ الجسم بالانزلاق عندما يتجاوز ميل المستوي الزاوية φ. نقيس على هذا الشكل $\mu_0 = tg\varphi$.

يظن كثيرون أن معامل الاحتكاك أثناء الحركة أصغر من معامل الاحتكاك الساكن ويكتبون

$$\mu < \mu_0$$

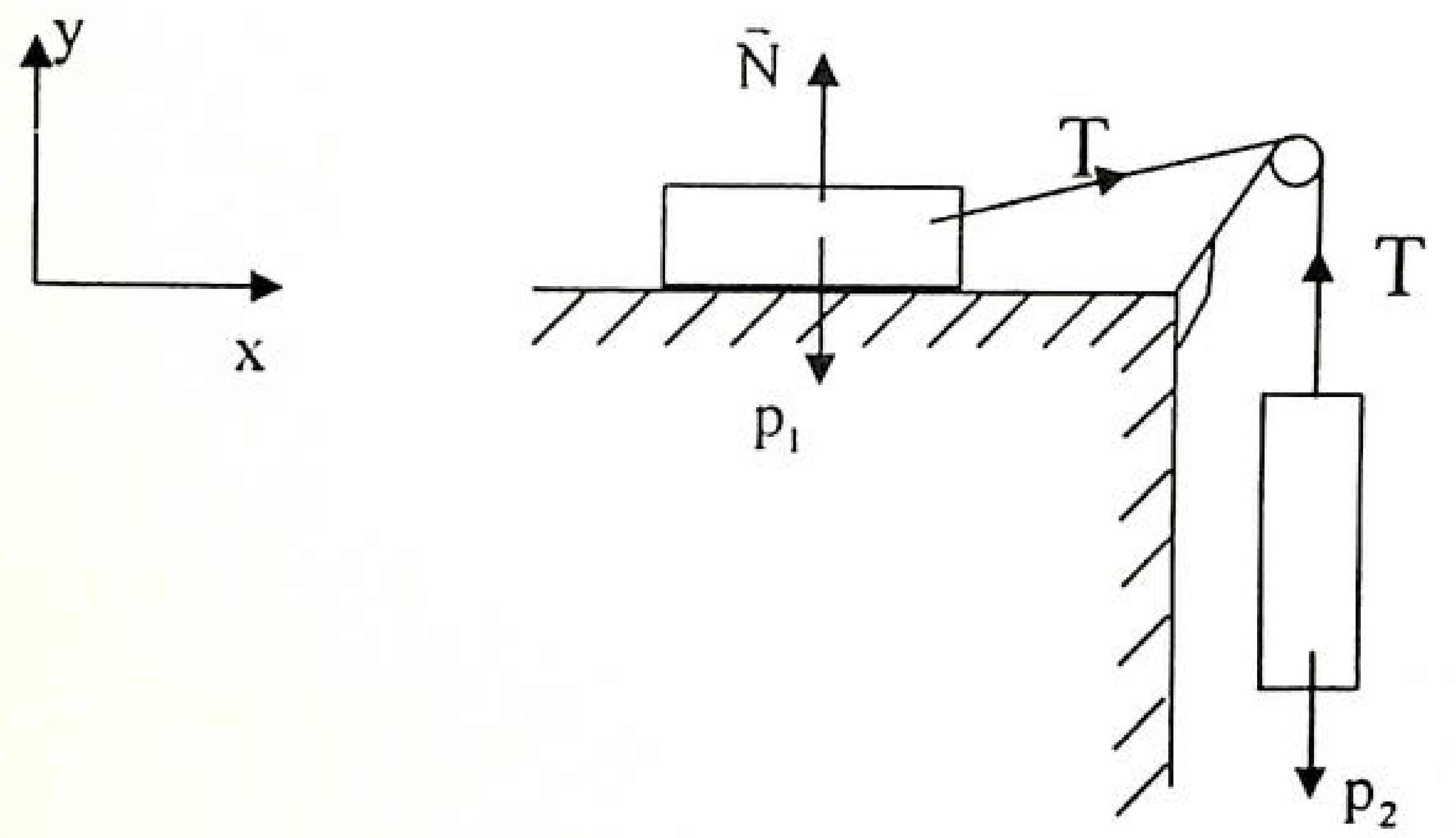
ولكن إثبات هذه القاعدة صعب جداً. لعل هذا الظن ناتج عن وقوع الحركة بين سطحي جسمين يفصل بينهما قليل من الزيت، أو أي مادة أخرى تحد من الاحتكاك.

b) الخيوط : انزلاق جسم S_1 (m_1) دون احتكاك على مستو أفقي تحت تأثير قوة جر الجسم S_2 (m_2) المعلق بصورة حرة بواسطة خيط لا كتلة له مار على بكرة O

لدينا من أجل الجسم الأول

$$F_x = m_1 a = T \qquad (1)$$

حيث رمزنا لـ T لتوتر الخيط. لدينا من الشكل.19



الشكل.19

$F_y = N - m_1 g = 0$ أي أن $m_1 g = N$ (دون الاحتكاك)

ومن أجل الجسم الثاني

$$F_y = m_2 g - T = m_2 a \qquad (2)$$

(1) و (2) معادلتان خطيتان بمجهولين T و a والحل هو

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

لقد هدفت الأمثلة السابقة، فيما هدفت إلى تبيان قدرة مبادئ نيوتن وحدها على حل عدد لا يستهان به من مسائل الميكانيك ولكن الفهم العميق من جهة وحل المسائل يقتضيان إدخال مفاهيم جديدة هامة سنراها في الفصل القادم.

الفصل الرابع

العمل والطاقة وقوانين الانحفاظ

1. العمل والطاقة 115

2. الحركات الدورية 128

3. انحفاظ الاندفاع (العزم) الخطي واصطدام الجسيمات 148

4. حقل التثاقل، القوة المركزية 164

الفصل الرابع: العمل والطاقة وقوانين الانحفاظ

1. العمل والطاقة

1.1- العمل والطاقة الحركية:

ربطنا في مطلع الفصل السابق مفهوم القوة بمنشئها الفيزيولوجي، بالجهد العضلي الواجب بذله لتغيير هيئة الجسم أو تحريكه. ولكن هذا الجهد يتوقف أيضاً على شروط تطبيق القوة، فالتعب يزداد بازدياد المسافة Δr التي ينتقل بها الجسم بصورة عامة – التي تنتقل بها نقطة تطبيق القوة $\vec{F}$ –، ويرتبط باتجاه الانتقال فدفع جسم على مستوى أفقي يتطلب جهداً صغيراً، وصغيراً جداً إذا كانت الحركة على المستوي دون احتكاك. والتعب أكبر في حالة الصعود منه في حالة الهبوط : نعمل في حالة الصعود ضد قوى التثاقل بينما تعمل هذه القوى في الحالة الثانية، وقد تجرنا إذا كان حملنا ثقيلاً نحو الأسفل بأسرع مما نريد. من الطبيعي إذاً أن نقيس التعب بمعرفة القوة ومعرفة الانتقال واتجاهه، تاركين في الوقت الحاضر جانباً زمن بذل الجهد (وإن لم تكن هناك حركة) وأن نعرف العمل البدائي على أنه الجداء السلمي لمتجهة القوة المطبقة بمتجهة الانتقال الابتدائي ونكتب تعريفاً :

$$dw = \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (1.1)$$

حيث $d\vec{r}$ وهي ما يتناهى إليه الوتر Δr بين نقطتين P_1 و P_2 على المحرك، إنها المتجهة "تفاضل" $\vec{r}$ وتتجه باتجاه المماس على المحرك

$$d\vec{r} = \vec{V} \cdot dt \qquad (1.2)$$

فعمل القوى يساوي الصفر إذا كان الانتقال الابتدائي عمودياً على اتجاه القوة وهو موجب إذا كانت الزاوية $\theta = (\vec{F}, d\vec{r})$ أصغر من $\frac{\pi}{2}$ وسالب إذا كانت أكبر من $\frac{\pi}{2}$. وهكذا فإن عمل القوى المطبقة ضد التثاقل (وزن الجسم) يساوي الصفر إذا كان الجسم ينزلق على مستو أفقي وموجب في حالة الصعود (التعب الكبير) وسالب في حالة الهبوط : قوة التثاقل هي التي تعمل وقد تجرنا إذا كان الحمل ثقيلاً.

نسمي تكامل المقدار dw – أي مجموع الأعمال الابتدائية من أجل انتقال منته بين وضعين P_1 و P_2 لنقطة تطبيق القوى العمل الكلي ونكتب

$$[W]_1^2 = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (1.3)$$

إن وحدة العمل هي وحدة القوة مضروبة بالطول، فهي إذاً حسب (3.(2.3)4)

$$[W] = [F][L] = [M][L]^2[T]^{-2} \qquad (1.4)$$

تسمى وحدة العمل في النظمة MKS الجول وهي : النيوتن × المتر.

لنأخذ كمثل عمل القوى المؤثرة على جسم صلب متوازن ولنبين أنه مساو للصفر : توازن الجسم يعني $\sum_{i=1}^{N}\overline{F}_i = 0$ حيث $P_1 \dots P_i \dots P_n$ هي نقاط تطبيق القوى على الجسم الصلب. يجب لكي ينتج عمل أن يكون هناك على الأقل قوتان مؤثرتان (متعاكستان حتى تكون الحصيلة مساوية للصفر) وأن يحصل انتقال نقط تطبيق القوى بسرعة ثابتة لحفظ التوازن. ولما كان الجسم صلباً فإن النقاط P_i تنتقل بنفس المقدار $d\vec{r}_i$ في كل انتقال ابتدائي وإلا لتشوه الجسم وفقد صفة الصلابة. لدينا إذاً إذا سمينا هذا المقدار المشترك $d\vec{r}$ واستعملنا توزيعية الجداء السلمي

$$dw = \sum_i \overline{F}_i \cdot d\vec{r}_i = d\vec{r} \cdot (\sum_i \overline{F}_i) = 0$$

لنعد الآن إلى (1.1) ولنبدل $\vec{F}$ بقيمتها المعطاة بقانون نيوتن ('(2.3).2) فيصبح العمل الابتدائي على الشكل

$$dw = m\frac{d\bar{v}}{dt} \cdot d\bar{r}$$
$$= m\frac{d\bar{v}}{dt} \cdot \bar{v}dt$$
$$= m\, d\bar{v} \cdot \bar{v}$$

ولكن $\bar{v} \cdot d\bar{v}$ ليس سوى تفاضل المقدار $\frac{\bar{v}^2}{2} = \frac{|\vec{v}|^2}{2} \equiv \frac{v^2}{2}$ ويأخذ العمل الابتدائي الشكل

$$dw = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \qquad (1.5)$$

حيث أدخلنا m بعد رمز التفاضل لأنها ثابتة وهكذا فإن العمل الابتدائي – تفاضل العمل – هو تفاضل مقدار جديد $\frac{mv^2}{2}$ نسميه الطاقة الحركية للجسم ونرمز له بـ T. أبعاد هذه المقدار الجديد هي أبعاد العمل حسب (1.5) وتقاس الطاقة الحركية بالجول. إن للمقدارين w و T نفس الأبعاد رغم أن المفهومين مختلفان. فالعمل هو انتقال بينما الطاقة الحركية خاصة من خواص الجسم، تعبير عن حالته.

لنلاحظ أن الطاقة الحركية تكتب انطلاقاً من تعريف العزم الخطي ((2.1).2) على الشكل

$$T = \frac{1}{2}m\,v^2 = \frac{p^2}{2m} \qquad (1.6)$$

تعطينا مكاملة العلاقة (1.5) بين الوضعين P_1 و P_2 حيث طويلة السرعة v_1 و v_2 بالترتيب

$$[w]_1^2 = \int_1^2 dw = \int_1^2 d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \qquad (1.7)$$

ومنه

إن وحدة العمل هي وحدة القوة مضروبة بالطول، فهي إذاً حسب (4(2.3.)3)

$$[W] = [F][L] = [M][L]^2[T]^{-2} \qquad (1.4)$$

تسمى وحدة العمل في النظمة MKS الجول وهي : النيوتن × المتر.

لنأخذ كمثل عمل القوى المؤثرة على جسم صلب متوازن ولنبين أنه مساو للصفر : توازن الجسم يعني $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0$ حيث $P_n ... P_i ... P_1$ هي نقاط تطبيق القوى على الجسم الصلب. يجب لكي ينتج عمل أن يكون هناك على الأقل قوتان مؤثرتان (متعاكستان حتى تكون الحصيلة مساوية للصفر) وأن يحصل انتقال نقط تطبيق القوى بسرعة ثابتة لحفظ التوازن. ولما كان الجسم صلباً فإن النقاط P_i تنتقل بنفس المقدار $d\vec{r}_i$ في كل انتقال ابتدائي وإلا لتشوه الجسم وفقد صفة الصلابة. لدينا إذاً إذا سمينا هذا المقدار المشترك $d\vec{r}$ واستعملنا توزيعية الجداء السلمي

$$dw = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = d\vec{r} \cdot (\sum_i \vec{F}_i) = 0$$

لنعد الآن إلى (1.1) ولنبدل $\vec{F}$ بقيمتها المعطاة بقانون نيوتن ('(2.3).2) فيصبح العمل الابتدائي على الشكل

$$dw = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r}$$
$$= m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}dt$$
$$= m\, d\vec{v} \cdot \vec{v}$$

ولكن $\vec{v} \cdot d\vec{v}$ ليس سوى تفاضل المقدار $\frac{\vec{v}^2}{2} = \frac{|\vec{v}|^2}{2} \equiv \frac{v^2}{2}$ ويأخذ العمل الابتدائي الشكل

$$dw = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \qquad (1.5)$$

حيث أدخلنا m بعد رمز التفاضل لأنها ثابتة وهكذا فإن العمل الابتدائي – تفاضل العمل – هو تفاضل مقدار جديد $\frac{mv^2}{2}$ نسميه الطاقة الحركية للجسم ونرمز له ب T. أبعاد هذه المقدار الجديد هي أبعاد العمل حسب (1.5) وتقاس الطاقة الحركية بالجول. إن للمقدارين w و T نفس الأبعاد رغم أن المفهومين مختلفان. فالعمل هو انتقال بينما الطاقة الحركية خاصة من خواص الجسم، تعبير عن حالته.

لنلاحظ أن الطاقة الحركية تكتب انطلاقاً من تعريف العزم الخطي ((2.1).2) على الشكل

$$T = \frac{1}{2}m\,v^2 = \frac{p^2}{2m} \qquad (1.6)$$

تعطينا مكاملة العلاقة (1.5) بين الوضعين P_1 و P_2 حيث طويلة السرعة v_1 و v_2 بالترتيب

$$[w]_1^2 = \int_1^2 dw = \int_1^2 d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \qquad (1.7)$$

ومنه

مبرهنة 1 :

إن عمل القوى المطبقة بين وضعين ما للجسم يساوي الفرق بين طاقته الحركية في الوضع الأخير وطاقته الحركية في الوضع البدائي.

$$[w]_1^2 = T_2 - T_1 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{P_2^2}{2m} - \frac{P_1^2}{2m} \qquad (1.7)'$$

لنشر هنا إلى أن تحديد العمل بالفرق بين قيمتين للمقدار الفيزيائي – الطاقة الحركية – يعني أن تغيير تعريف هذا المقدار T بإضافة ثابتة اعتباطية له T_o لا يغير من النتيجة شيئاً. يبدو لنا أن اختيار هذه الثابتة $T_o = 0$ هو أبسط اختيار ممكن بحيث نعبر عن الطاقة الحركية

$$T + T_o = \frac{1}{2}mv^2 + T_o = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (1.8)$$

وهكذا فالطاقة الحركية لجسم ساكن

$$T = T_o = 0$$

سنرى في دراسة النسبية الخاصة أن الثابتة T_o لن تكون اعتباطية ولن تكون لنا حرية الاختيار وأنها ستكتب على شكل علاقة آنشتاين الشهيرة

$$T_o = E = mc^2$$

حيث c هي سرعة الضوء في الخلاء.

2.1– الطاقة الكامنة :

نكتب العلاقة (1.3) بعد اختيارنا لنظمة محاور وبالتالي تعييننا لمركبات القوة عليها $\vec{F} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ وتفاضل المتجهة $\vec{r}$: $d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$، على الشكل

$$[w]_1^2 = \int_1^2 Xdx + Ydy + Zdz \qquad (1.9)$$

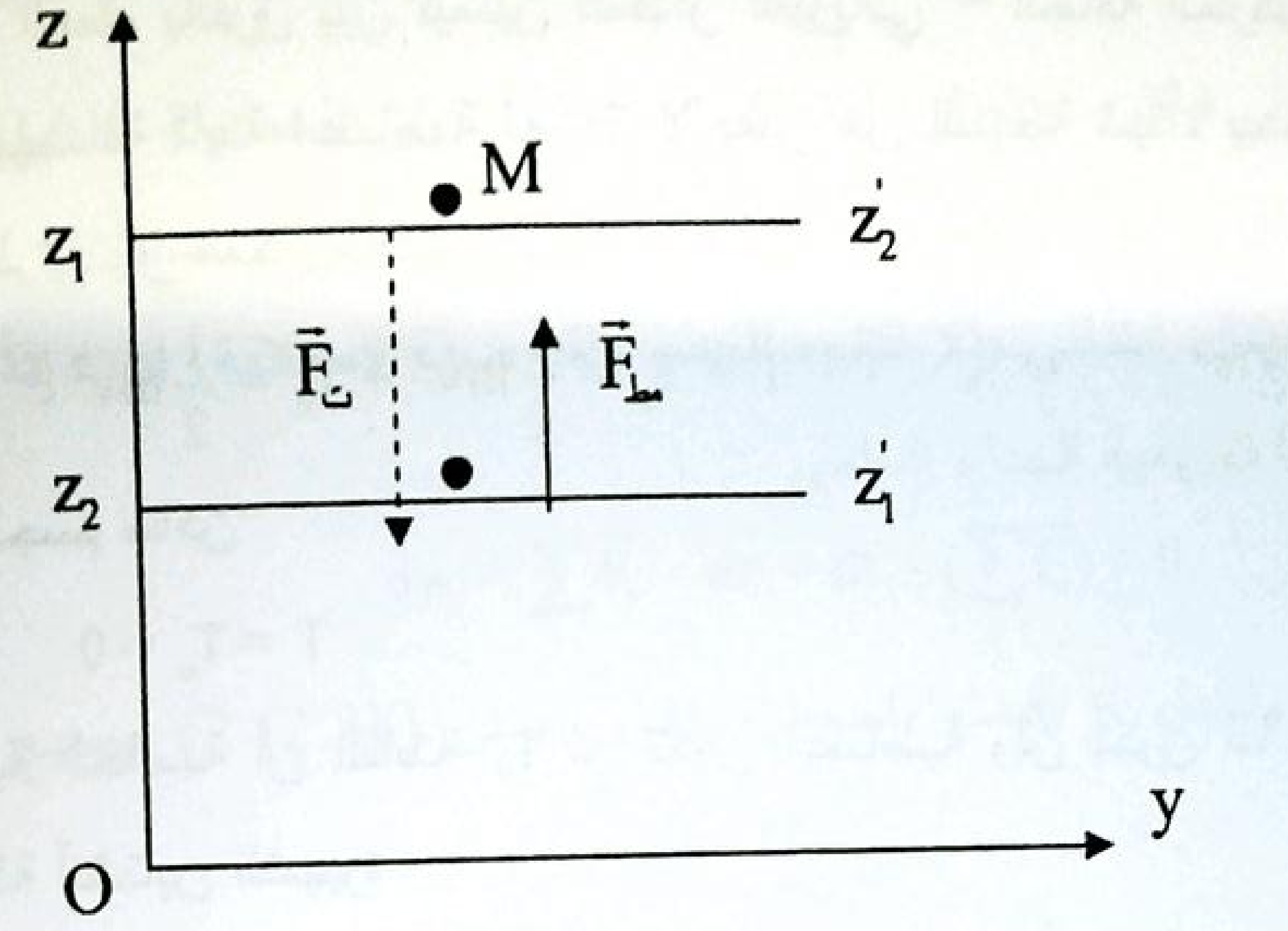
ومهمتنا الآن هي أن نتعلم كيفية المكاملة. ولنبدأ بأبسط الحالات، حالة القوة الثابتة والمتجانسة كقوة التثاقل مثلاً، ولنأخذ Oz في اتجاه معاكس للشاقول نحو الأعلى ونقطة المبدأ O على سطح الأرض؛ Oyz هو مستوى الحركة $\vec{F}_{ثقل} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$. يصبح التكامل (1.9) على الشكل

$$[w]_1^2 = \int_1^2 -mg\,dz = -mg(z_2 - z_1) \qquad (1.10)$$

$$= mg(z_1 - z_2)$$

حيث z_1 و z_2 هما وضعا الجسم، وضعا مركز ثقله، في الحالة البدائية وفي الحالة النهائية. لنفرض أن الجسم يسقط سقوطاً حراً من النقطة z_1 $(v_1 = 0)$ تعطينا العلاقتان (1.10) و(1.7) عندئذ

$$mg(z_1 - z_2) = \frac{mv_2^2}{2} \qquad (1.11)$$



الشكل.1

لنسم المقدار الموجب، الشكل.1، $\Delta z = z_1 - z_2$. تعين لنا العلاقة السابقة سرعة الجسم تماماً بمعرفة الارتفاع Δz الذي سقط منه :

$$v = \sqrt{2g\Delta z} \qquad (1.11)'$$

لنأخذ الآن بدلاً عن قوة التثاقل قوى مطبقة ضد قوى التثاقل، الشكل.1، مهمتها رفع الجسم بسرعة ثابتة $(\sum F_i = 0)$. لدينا $\vec{F}_{مطبقة} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix}$ ولنحسب عمل هذه القوى w' بين الوضعين z'_1 و z'_2 للجسم

$$[w']_{1'}^{2'} = \int_{1'}^{2'} mgdz = mg(z'_2 - z'_1) \qquad (1.12)$$

وهو يعمل يساوي بالقيمة المطلقة لعمل قوى التثاقل إذا انطبقت z'_1 على z_1 و z'_2 على z_2.

لنفرض إذاً أن $z'_1 = z_2$ و $z'_2 = z_1$ أي أن الوضع البدائي في رفع الجسم هو الوضع النهائي الذي سقط إليه الجسم والعكس بالعكس. يصبح عمل القوى المضادة لقوى التثاقل :

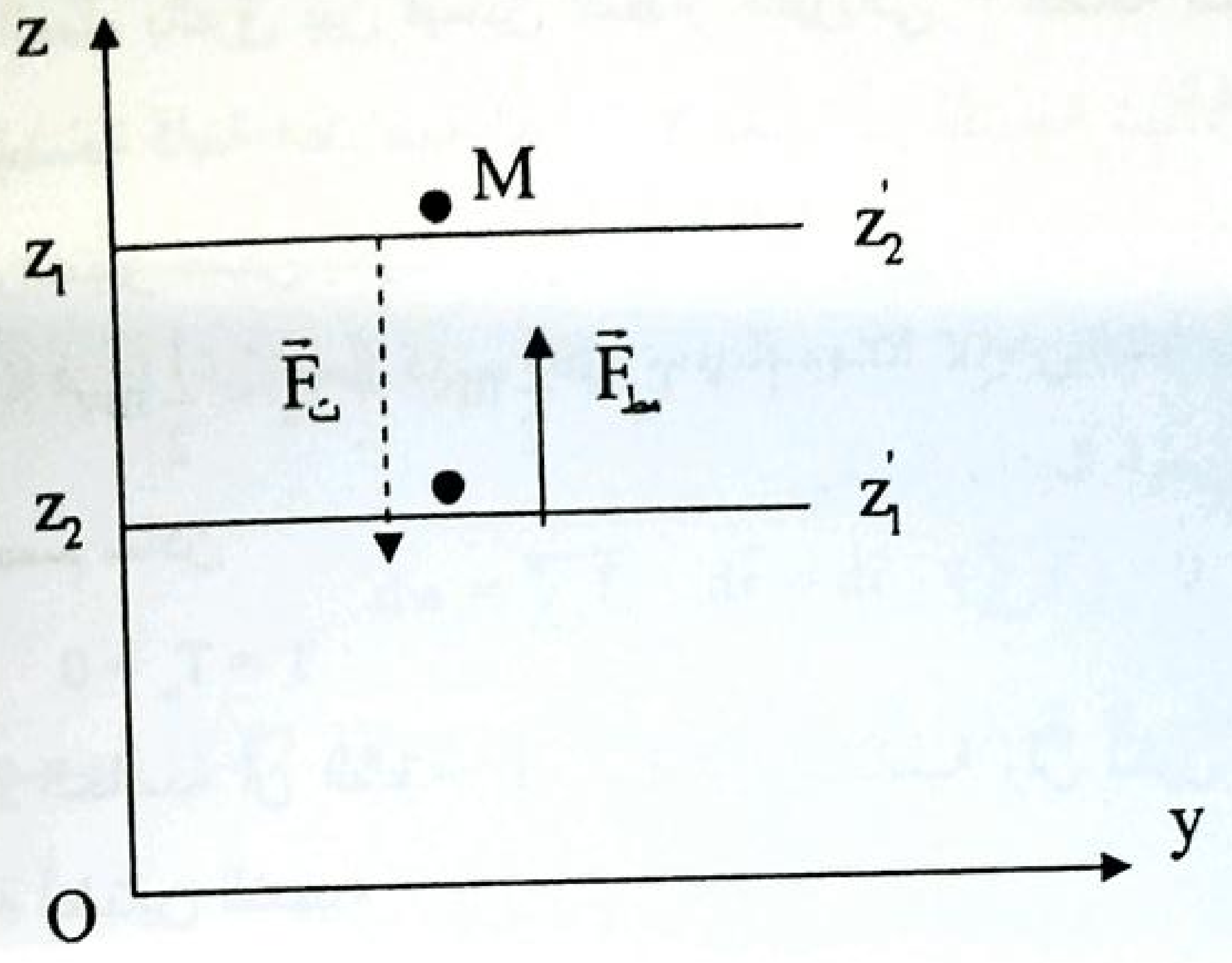
$$[w']_{1'}^{2'} = mg(z_1 - z_2)$$

وهو نفس المقدار (1.10) أي أن عمل قوى الثقالة للهبوط بالجسم من الوضع 1 إلى الوضع 2 يساوي لعمل القوى المضادة لرفع الجسم من الوضع 2 إلى الوضع 1. إن كل ما فعلناه في الواقع هو أخذ $\Delta z = \Delta z'$ – مادامت $\vec{F}_{مط} = \vec{F}_{تث}$ –. ولكن ما هو المحتوى الفيزيائي لهذه العملية البسيطة ؟ إن تعبنا

$$= mg(z_1 - z_2)$$

حيث z_1 و z_2 هما وضعا الجسم، وضعا مركز ثقله، في الحالة البدائية وفي الحالة النهائية. لنفرض أن الجسم يسقط سقوطاً حراً من النقطة z_1 ($v_1 = 0$) تعطينا العلاقتان (1.10) و(1.7) عندئذ

$$mg(z_1 - z_2) = \frac{mv_2^2}{2} \qquad (1.11)$$



الشكل.1

لنسم المقدار الموجب، الشكل.1، $\Delta z = z_1 - z_2$. تعين لنا العلاقة السابقة سرعة الجسم تماماً بمعرفة الارتفاع Δz الذي سقط منه :

$$v = \sqrt{2g\Delta z} \qquad (1.11)'$$

لنأخذ الآن بدلاً عن قوة التثاقل قوى مطبقة ضد قوى التثاقل، الشكل.1، مهمتها رفع الجسم بسرعة ثابتة ($\sum F_i = 0$). لدينا $\vec{F}_{مطبقة} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix}$ ولنحسب عمل هذه القوى w' بين الوضعين z'_1 و z'_2 للجسم

$$[w']_{1'}^{2'} = \int_{1'}^{2'} mgdz = mg(z'_2 - z'_1) \qquad (1.12)$$

وهو يعمل يساوي بالقيمة المطلقة لعمل قوى التثاقل إذا انطبقت z'_1 على z_1 و z'_2 على z_2.

لنفرض إذاً أن $z'_1 = z_2$ و $z'_2 = z_1$ أي أن الوضع البدائي في رفع الجسم هو الوضع النهائي الذي سقط إليه الجسم والعكس بالعكس. يصبح عمل القوى المضادة لقوى التثاقل :

$$[w']_{1'}^{2'} = mg(z_1 - z_2)$$

وهو نفس المقدار (1.10) أي أن عمل قوى الثقالة للهبوط بالجسم من الوضع 1 إلى الوضع 2 يساوي لعمل القوى المضادة لرفع الجسم من الوضع 2 إلى الوضع 1. إن كل ما فعلناه في الواقع هو أخذ $\Delta z = \Delta z'$ – مادامت $\vec{F}_{ط} = \vec{F}_{ث}$ –. ولكن ما هو المحتوى الفيزيائي لهذه العملية البسيطة ؟ إن تعبنا

العضلي، إن ما بذلناه من جهد لرفع الجسم M من z_2 إلى z_1، إن عمل القوى المطبقة لن يذهب سدى إذ يمكننا عندما نشاء أن نترك الجسم يسقط سقوطاً حراً من z_1 ونسترد جهودنا على شكل طاقة حركية، على شكل سرعة تحددهما العلاقتان (1.11) و'(1.11). فكأننا والحالة هذه قد خزنا الطاقة، قد جعلناها تكمن على الارتفاع z_1 لاستعمالها حين نشاء. نسمي عمل القوى المطبقة بين الوضعين '1 و'2 بازدياد الطاقة الكامنة. نرمز لهذه الطاقة بـ U ونكتب (1.12) على الشكل

$$[w']_{1'}^{2'} = mgz'_2 - mgz'_1 = U_{2'} - U_{1'} \quad (1.13)$$

يمكننا الآن حذف الفتحات وكتابة $U_1 = mgz_1$ ، $U_2 = mgz_2$ وحتى حذف الأرقام وكتابة

$$U = mgz \quad (1.13)'$$

3.1– الطاقة الكلية وانحفاظها :

نرى بالعودة إلى (1.10) أن عمل قوى التثاقل، وهو يساوي كما رأينا لـ $[W']_1^2$ – :

$$[w]_1^2 = U_1 - U_2 \quad (1.14)$$[1]

هو انخفاض الطاقة الكامنة من mgz_1 إلى mgz_2 وهو من جهة أخرى حسب (1.7)

$$[w]_1^2 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = T_2 - T_1$$

مقارنة هاتين العلاقتين يعطينا $T_2 + U_2 = T_1 + U_1$.

أي أن مجموع الطاقة الحركية والطاقة الكامنة في النقطة z_1 يساوي لهذا المجموع في النقطة z_2 وهذا من أجل أي نقطتين z_1 و z_2 أي أن المجموع

$$T + U = C \quad (1.15)$$

حيث C ثابتة. نسمي مجموع الطاقتين الحركية والكامنة بالطاقة الميكانيكية الكلية. تعبر العلاقة (1.15) عن انحفاظ الطاقة الميكانيكية، على ثباتها بالنسبة للزمن وتلخص كل ما يجري في هبوط الأجسام ورفعها : نرفع الجسم من z إلى $z + \Delta z$ فنزيد طاقته الكامنة بالمقدار $mg\Delta z$؛ نتركه يسقط سقوطاً حراً فتتحول هذه الطاقة إلى طاقة حركية وتتعين سرعة الجسم في النقطة z بالعلاقة '(1.11). نرى من جهة أخرى بالعودة إلى العمل الابتدائي في (1.14) أن العمل الابتدائي

$$[w]_1^2 = \int_1^2 dw = \int_1^2 Zdz = U_1 - U_2$$

هو

$$dw = -dU$$

---

[1] إن تغيير تعريف الطاقة الكامنة بإضافة ثابتة اعتباطية له لا يغير، كما هو عليه الأمر في الطاقة الحركية، من النتيجة شيئاً. نختار $U_o = 0$ في العلاقة '(1.13) أي أن مبدأ الطاقة الكامنة في حالة الثقل هو سطح الأرض. وسنختار في مناسبات أخرى $U_\infty = 0$ أي أن مبدأ الطاقة الكامنة هو اللانهاية حيث لا يتفاعل الجسم مع أي جسم آخر.

وأن مسقط القوة على Oz :

$$F_z = Z = -\frac{dU}{dz} \qquad (1.16)$$

لذا نقول عن قوى التثاقل إنها مشتقة من كمون.

مثال : لنفرض أن جسماً كتلته m يسقط سقوطاً حراً من ارتفاع z_o. إن طاقته الكلية ثابتة وهي لذلك تساوي في كل لحظة طاقته لحظة بدء السقوط $t_o = 0$. وهي $U_o = mgz_o$. لنرسم منحني تغيرات الطاقة الكامنة مع الزمن. إنه المنحني الميقاتي لـ z وقد رأينا في الفصل السابق ((3.7).3) أنه من الشكل

$$z = -\frac{gt^2}{2} + z_o$$

حيث اتجاه المحور oz نحو الأعلى هنا

$$z_o - z = \frac{gt^2}{2}$$

وهو قطع مكافئ. تصبح الطاقة الكامنة مساوية للصفر في اللحظة t_1 المعينة بالعلاقة

$$z_o - 0 = \frac{gt_1^2}{2}$$

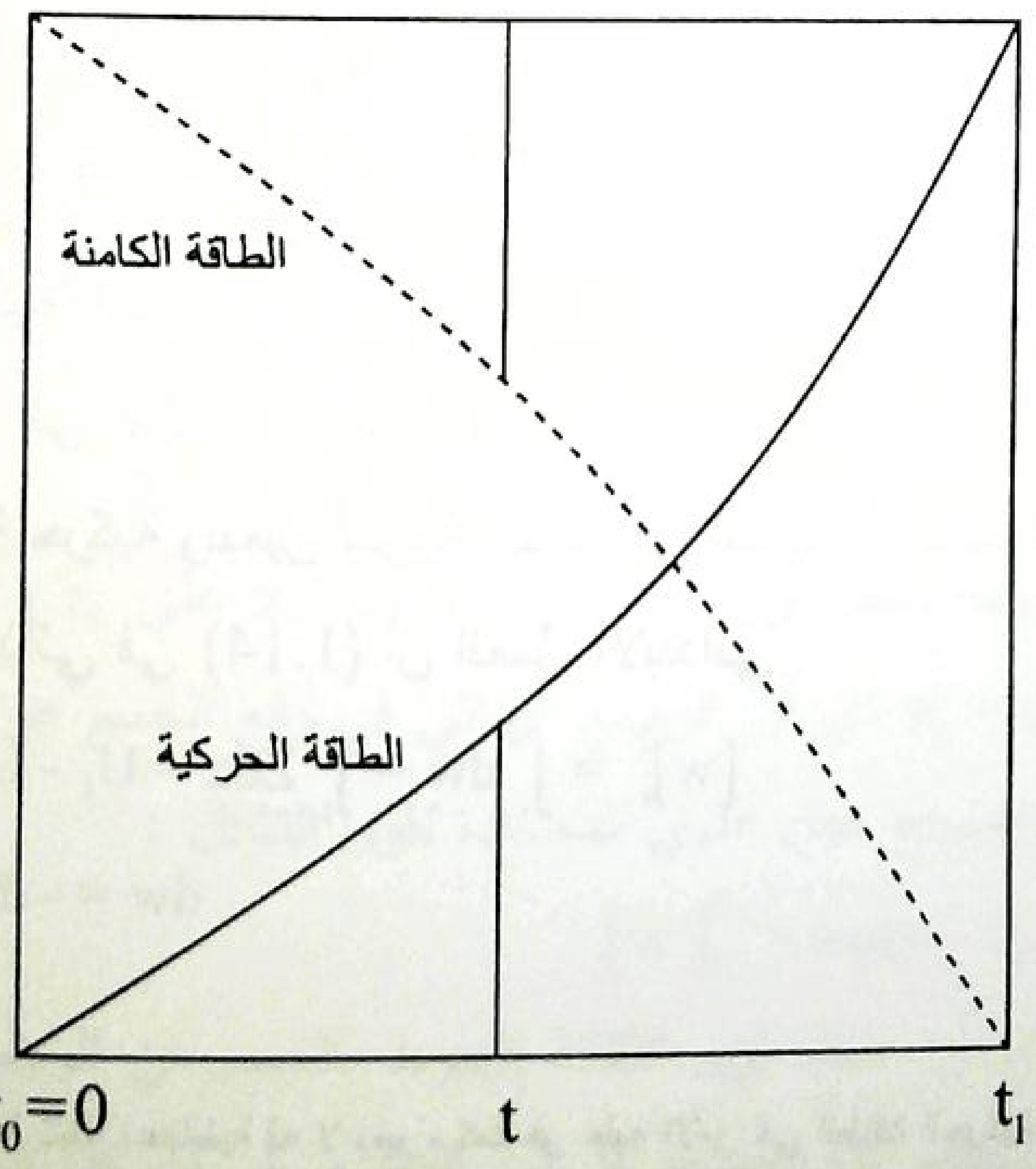
أما الطاقة الحركية فهي صفر في البدء $T_o = 0$ وتتغير مع الزمن حسب العلاقة

$$\frac{mv^2}{2} + mgz = C = mgz_o$$

ومنه

$$T = \frac{mv^2}{2} = mg(z_o - z) = \frac{mg^2}{2}t^2$$

ومنحناها الميقاتي هو أيضاً قطع مكافئ ولدينا في كل لحظة t : المساواة بين انخفاض الطاقة الكامنة وارتفاع الطاقة الحركية، الشكل.2.



الشكل.2

وأن مسقط القوة على Oz :

$$F_z = Z = -\frac{dU}{dz} \qquad (1.16)$$

لذا نقول عن قوى التثاقل إنها مشتقة من كمون.

مثال : لنفرض أن جسماً كتلته m يسقط سقوطاً حراً من ارتفاع z_o. إن طاقته الكلية ثابتة وهي لذلك تساوي في كل لحظة طاقته لحظة بدء السقوط $t_o = 0$. وهي $U_o = mgz_o$. لنرسم منحني تغيرات الطاقة الكامنة مع الزمن. إنه المنحني الميقاتي لـ z وقد رأينا في الفصل السابق ((3.7).3) أنه من الشكل

$$z = -\frac{gt^2}{2} + z_o$$

حيث اتجاه المحور oz نحو الأعلى هنا

$$z_o - z = \frac{gt^2}{2}$$

وهو قطع مكافئ. تصبح الطاقة الكامنة مساوية للصفر في اللحظة t_1 المعينة بالعلاقة

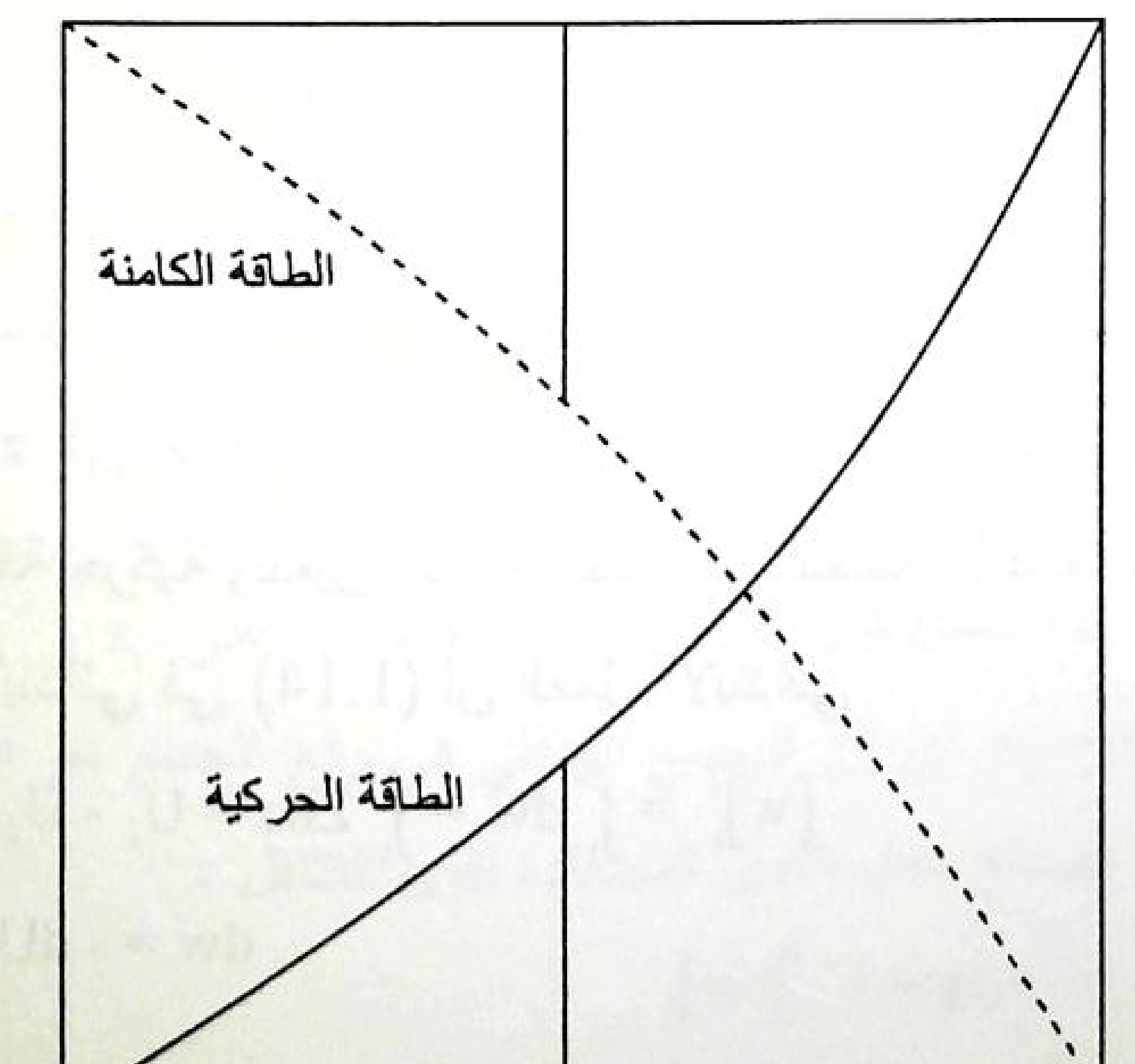
$$z_o - 0 = \frac{gt_1^2}{2}$$

أما الطاقة الحركية فهي صفر في البدء $T_o = 0$ وتتغير مع الزمن حسب العلاقة

$$\frac{mv^2}{2} + mgz = C = mgz_o \qquad \text{ومنه}$$

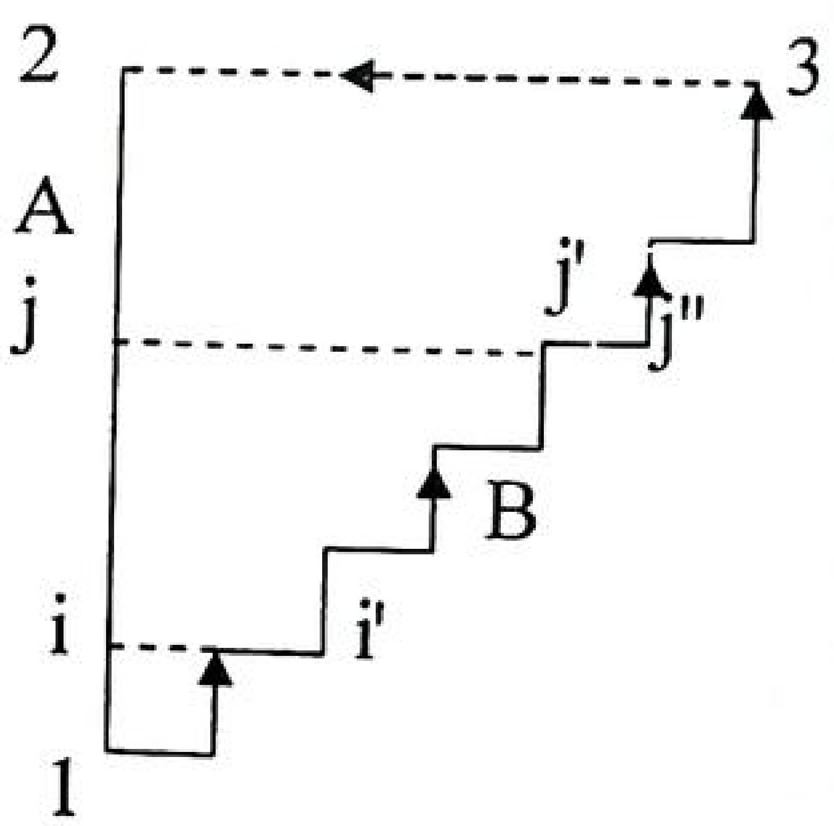
$$T = \frac{mv^2}{2} = mg(z_o - z) = \frac{mg^2}{2}t^2$$

ومنحناها الميقاتي هو أيضاً قطع مكافئ ولدينا في كل لحظة t : المساواة بين انخفاض الطاقة الكامنة وارتفاع الطاقة الحركية، الشكل.2.

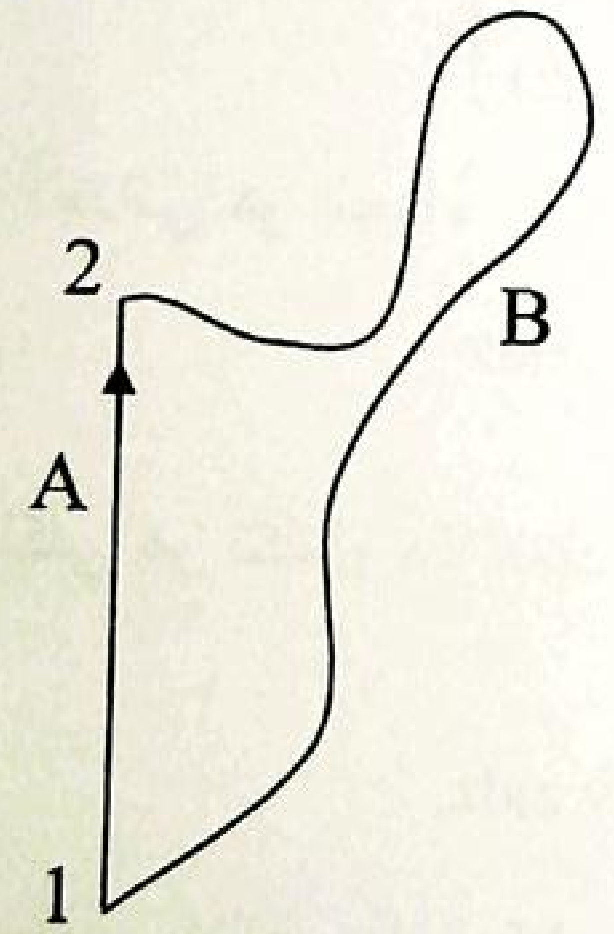


الشكل.2

لنلاحظ أخيراً، نظراً لانعدام العمل الابتدائي عندما تكون القوة عمودية على الانتقال، أن الانتقال من الوضع 1 إلى الوضع 2 على الشاقول يمكن أن يتم مباشرة، الطريق A ، الشكل.3، أو أن يتم استعمال التدرج السلّمي 1 ← 3 ← 2، الطريق B . فالانتقال بين i و "j على السلم يساوي الانتقال الموازي ij على الشاقول وبالتالي فالعمل نفسه. أما الانتقال على الدرجات، "jj مثلاً، فلا يعطي أي عمل لتعامده مع القوة، وكذلك الأمر في الانتقال من 3 إلى 2. وهكذا فإن العمل $[w]_1^2$ حسب A يساوي للعمل $[w]_1^2$ حسب B أي أن العمل بين النقطتين 1 و 2 لا يتوقف على الطريق التي اتبعت للوصول من 1 إلى 2. يمكننا أن نعقد الطريق B كما نريد بأن نقصر من خطوات السلم ومن سعة درجاته محولين 1 ← 3 إلى منحني، أن نعرج هذا المنحني ونصعد فوق المستوى 3 – 2 ولنهبط من جديد (عمل موجب وعمل سالب) الشكل.4 ومع ذلك يمكننا، دون النظر في كل مرة إلى تفاصيل تكافؤ الأعمال الموجبة الإضافية مع الأعمال السالبة الإضافية وحذف الأعمال المساوية للصفر، التأكيد أن $[w]_1^2$ حسب الطريق A مساو لـ $[w]_1^2$ حسب الطريق B مادام هذا العمل لا يتوقف إلا على الطاقة الكامنة في 1 والطاقة الكامنة في 2 حسب العلاقة (1.14).



الشكل.3



الشكل.4

4.1– القوى المحافظة – المشتقة من كمون :

يتبين لنا مما سبق أن انحفاظ الطاقة ناتج عن إمكانية كتابة العمل بين الوضعين 1 و 2 على شكلين

$$[w]_1^2 = \Delta T = T_2 - T_1 \qquad (1.7)$$

من جهة وهذا ممكن دوماً لأننا استنتجنا هذه العلاقة من مبدأ نيوتن الثاني وكتابته على الشكل

$$[w]_1^2 = -\Delta U = U_1 - U_2 \qquad (1.14)$$

من جهة ثانية، وهذا لم يكن ممكناً إلا لأن للقوة موضع البحث، قوة التثاقل، خاصة معينة هي كونها مساوية لمشتق $-U_{(z)}$ بالنسبة لـ z وقد أطلقنا على هذه الخاصة اسم الاشتقاقية من كمون. والسؤال الآن هل يصح قانون انحفاظ الطاقة الكلية على كل التفاعلات المعروفة في الطبيعة، سواء الأساسية منها - التفاعلات الأربعة التي تحدثنا عنها في الفصل الأول - أو التفاعلات المعقدة، كقوى التماسك والاحتكاك، الخ. التي هي تعبير عن تفاعلات كهرطيسية وتثاقلية عديدة ؟ أو بشكل آخر هل تشتق كل القوى من كمون ؟ وما هو المحتوى الرياضي لمفهوم الاشتقاق من كمون ؟

إن العمل الابتدائي هو تعريفاً الجداء السلمي لمتجهتين فهو إذاً مقدار سلمي تابع للنقطة $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ التي نجري فيها الحساب لأن كل مركبة من مركبات القوة تابعة بشكل أو بآخر لـ $\vec{r}$؛ رأينا أن القوى تتناسب مع $\frac{1}{r^2}$ في حالة قوى التثاقل والكهربائية الراكدة ومع $\frac{1}{r^7}$ في حالة القوى الجاذبة بين الذرات ومع r حسب قانون هوك، الخ. لدينا إذاً

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(x,y,z) \\ Y(x,y,z) \\ Z(x,y,z) \end{pmatrix}$$

والعمل الابتدائي هو الجداء

$$X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz$$

والعمل الكلي هو تكامل هذا المقدار بين الوضعين $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ و $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ ونكتب

$$\int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(1)}^{(2)} X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz \qquad (1.17)$$

وحتى نستطيع كتابة هذا المقدار على الشكل (1.14)، يجب أن يكون العمل البدائي مساوياً لتفاضل المقدار U $dw = -dU$ ، حيث dU تابع كما هو عليه الأمر في dw للنقطة (x,y,z)، لثلاثة متغيرات. وهكذا

$$\int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(1)}^{(2)} X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz = -\int_{(1)}^{(2)} dU \qquad (1.17)'$$

ولكن التفاضل الكلي لدالة بعدة متغيرات $U(x,y,z)$ هو تعريفاً

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

حيث $\frac{\partial U}{\partial x}$ هو المشتق الجزئي لـ $U(x,y,z)$ بالنسبة لـ x الذي نحصل عليه بتغيير x وحدها والإبقاء على y و z ثابتتين : $\frac{\partial U}{\partial x} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{yz} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x+\Delta x, y, z) - U(x,y,z)}{\Delta x}$ وكذلك بالنسبة للمتغيرين

من جهة ثانية، وهذا لم يكن ممكناً إلا لأن للقوة موضع البحث، قوة التثاقل، خاصة معينة هي كونها مساوية لمشتق $-U_{(z)}$ بالنسبة لـ z وقد أطلقنا على هذه الخاصة اسم الاشتقاقية من كمون. والسؤال الآن هل يصح قانون انحفاظ الطاقة الكلية على كل التفاعلات المعروفة في الطبيعة، سواء الأساسية منها – التفاعلات الأربعة التي تحدثنا عنها في الفصل الأول – أو التفاعلات المعقدة، كقوى التماسك والاحتكاك، الخ. التي هي تعبير عن تفاعلات كهرطيسية وتثاقلية عديدة ؟ أو بشكل آخر هل تشتق كل القوى من كمون ؟ وما هو المحتوى الرياضي لمفهوم الاشتقاق من كمون ؟

إن العمل الابتدائي هو تعريفاً الجداء السلمي لمتجهتين فهو إذاً مقدار سلمي تابع للنقطة $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ التي نجري فيها الحساب لأن كل مركبة من مركبات القوة تابعة بشكل أو بآخر لـ $\vec{r}$؛ رأينا أن القوى تتناسب مع $\frac{1}{r^2}$ في حالة قوى التثاقل والكهربائية الراكدة ومع $\frac{1}{r^7}$ في حالة القوى الجاذبة بين الذرات ومع r حسب قانون هوك، الخ. لدينا إذاً

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(x,y,z) \\ Y(x,y,z) \\ Z(x,y,z) \end{pmatrix}$$

والعمل الابتدائي هو الجداء

$$X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz$$

والعمل الكلي هو تكامل هذا المقدار بين الوضعين $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ و $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ ونكتب

$$\int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(1)}^{(2)} X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz \qquad (1.17)$$

وحتى نستطيع كتابة هذا المقدار على الشكل (1.14)، يجب أن يكون العمل البدائي مساوياً لتفاضل المقدار U $dw = -dU$ ، حيث dU تابع كما هو عليه الأمر في dw للنقطة (x,y,z) ، لثلاثة متغيرات. وهكذا

$$\int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(1)}^{(2)} X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz = -\int_{(1)}^{(2)} dU \qquad (1.17)'$$

ولكن التفاضل الكلي لدالة بعدة متغيرات $U(x,y,z)$ هو تعريفاً

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

حيث $\frac{\partial U}{\partial x}$ هو المشتق الجزئي لـ $U(x,y,z)$ بالنسبة لـ x الذي نحصل عليه بتغيير x وحدها والإبقاء على y و z ثابتتين : $\frac{\partial U}{\partial x} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{yz} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x+\Delta x,y,z) - U(x,y,z)}{\Delta x}$ وكذلك بالنسبة للمتغيرين

الآخرين. سنكتب تفاضل U على شكل جداء سلمي لمتجهتين حتى نستطيع بسهولة مقارنته مع الطرف الأيسر من (1.17) وذلك بأن نعرف المتجهة $\vec{\nabla}U = \begin{pmatrix} \partial U/\partial x \\ \partial U/\partial y \\ \partial U/\partial z \end{pmatrix}$ ونسميها $\overline{\text{grad}}\,U =$ تـدرج U

بحيث يصبح التفاضل هو الجداء السلمي لـ $\vec{\nabla}U$ بـ $d\vec{r}$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = \vec{\nabla}U \cdot d\vec{r} \qquad (1.18)$$

وهكذا يصبح الشرط اللازم لكي تكون قوة ما مشتقة من كمون هو

$$\int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{(1)}^{(2)} \vec{\nabla}U \cdot d\vec{r} \qquad (1.17)''$$

أو

$$\int_{(1)}^{(2)} (\vec{F} + \vec{\nabla}U) \cdot d\vec{r} = 0$$

أي أن التابع الأصلي للمقدار المكامل ثابت ومشتقه، المقدار المكامل نفسه، يساوي الصفر

$$\vec{F} = - \vec{\nabla}U \qquad (1.19)$$

وبالعودة إلى المركبات حسب (1.17) و (1.18)

$$\begin{cases} X = -\dfrac{\partial U}{\partial x} \\ Y = -\dfrac{\partial U}{\partial y} \\ Z = -\dfrac{\partial U}{\partial z} \end{cases} \qquad (1.19)'$$

لنلاحظ أن $Z = -\frac{\partial U}{\partial z}$ هو تعميم العلاقة (1.16) التي لم يكن يتوقف الكمون فيها إلا على مركبة واحدة، z : $U(x,y,z) = U(z)$.

لنلاحظ أيضاً أن كل القوى المتناسبة مع r مرفوعة إلى قوة ما، r^n، حيث n عدد موجب أو سالب ماعدا $n = -1$ هي قوى مشتقة من كمون. نكتب $\vec{F}$ على الشكل $r^{n-1}\vec{r}$ و"(1.17) على الشكل

$$\int_{r_1}^{r_2} r^{n-1} \cdot \vec{r} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} r^n dr = \frac{1}{n+1}\left(r_2^{n+1} - r_1^{n+1}\right)$$

والكمون متناسب مع $-r^{n+1}$: $U \sim -r^{n+1}$

لدينا إذاً

__مبرهنة 2__ :

إن الشرط اللازم لانحفاظ الطاقة الكلية هو أن تكون القوة مشتقة من كمون أي أن توجد دالة سلمية $U(x,y,z)$ تحقق العلاقة

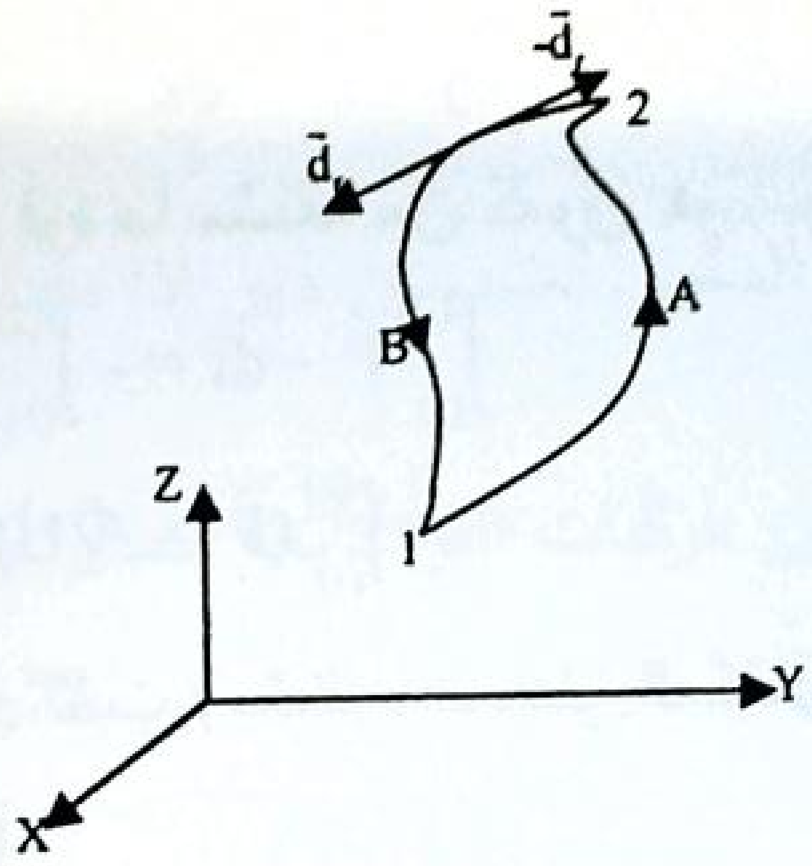
$$\vec{F} = - \vec{\nabla}U$$

لنبرهن أيضاً :

ميرهنة 3 :

إن عمل القوة المشتقة من كمون على طريق مغلق يساوي الصفر :

لدينا حسب '(1.17) العمل بين النقطة 1، نقطة البداية والنقطة 2 نقطة النهاية، الشكل.5



الشكل.5

$$[w]_1^2 (A) = \int_{(1)}^{(2)} F \cdot dr = -\int_{(1)}^{(2)} dU = -\left[U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1)\right]$$

$$= -\left[U_2 - U_1\right]$$

حيث رمزنا اختصاراً $U(x_2, y_2, z_2) = U_2$ وكذلك بالنسبة لـ U_1 ووضعنا (A) لنشير إلى الطريق المتبع A.

ومن جهة أخرى حسب نفس العلاقة

$$[w]_2^1 (B) = \int_{(2)}^{(1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\left[U_1 - U_2\right]$$

وبجمع هاتين العلاقتين سنجد العمل الذي تنتجه القوى في انتقالها بشكل متصل من النقطة (1) والعودة إليها وهذا ما نرمز لتكامله بالرمز المغلق : $\oint$ حيث عينا الطريق من 1 إلى 2 : A ثم من 2 إلى 1 : B

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = [w]_1^2 (A) + [w]_2^1 (B) = -\left[U_2 - U_1\right] - \left[U_1 - U_2\right] = 0 \qquad (1.20)$$

وهو المطلوب برهانه.

لنلاحظ أن تغيير اتجاه السهم في العمل على الطريق B من 2 إلى 1 يعني أننا استبدلنا $d\vec{r}$ (بين 1 و2) بـ $-d\vec{r}$ على المماس أي أننا وضعنا إشارة ناقص أمام العمل الكلي $[w]_2^1 (B)$ ومنه

$$[w]_1^2 (B) = -[w]_2^1 (B)$$

تتحول العلاقة (1.20) إلى الشكل

$$[w]_1^2 (A) - [w]_1^2 (B) = 0$$

$$[w]_1^2(A) = [w]_1^2(B) \qquad (1.21)$$

ومنه

مبرهنة 4 :

إن عمل القوى المشتقة من كمون بين نقطتين معينتين (1) و (2) لا يتوقف على الطريق المتبع للانتقال من (1) إلى (2).

إنه مستقل تماماً عن الطريق ولا يتوقف إلا على النقطتين (1) و(2) وحدهما.

نتحدث في غالب الأحيان عن الحقول المشتقة من كمون بدلاً عن القوى المشتقة من كمون : فمادمنا قد كتبنا فيما يتعلق بحقلي التثاقل والحقل الكهربائي الراكد القوى على الشكل

$$\vec{F} = m\vec{C}$$

$$\vec{F} = q\,\vec{E}$$

فإننا نقول إن حقل التثاقل والحقل الكهربائي وهذا ما سنبرهنه مشتقان من كمون ونكتب

$$\vec{C} = -\frac{\vec{\nabla}U}{m}$$

$$\vec{E} = -\frac{\vec{\nabla}U}{q} = -\vec{\nabla}V$$

أي أن الكمون الذي يشتق منه الحقل هو الطاقة الكامنة من أجل واحدة الكتل أو الطاقة الكامنة من أجل واحدة الشحن الكهربائية ويسمى في هذه الحالة الأخيرة الكمون الكهربائي وأبعاده هي إذاً أبعاد الطاقة مقسومة على أبعاد الشحنة ووحدته هي الفولت (Volt) : $[V] = [M][L^2][T^{-2}][Q^{-1}]$، حيث Q رمز الشحنة.

5.1- مبدأ انحفاظ الطاقة :

يتضح مما تقدم أن الطاقة الكلية منحفظة في التفاعلات التثاقلية والتفاعلات الكهربائية الراكدة وسنقبل منذ الآن كمبدأ أن الطاقة الكلية لجملة مادية معزولة، أياً كانت، منحفظة. إن هذا المبدأ هو أهم مبادئ الفيزياء وأعمقها إطلاقاً : سنرى في الفصل السادس أنه مرتبط بالتناظر الانسحابي للزمان. بتجانس الزمان الذي يجعل من اختيار نقطة البداية الزمنية لتجربة فيزيائية أمراً غير ذي أهمية، أمراً اعتباطياً مادامت نتائج التجربة لا تتعلق بهذا الاختيار؛ وحرية الاختيار هذه هي التي تعطي لمفهوم القانون معناه الحقيقي. إن الزمن، وإن لم يعد مطلقاً عندما ننتقل من الميكانيك النيوتوني إلى الميكانيك النسبوي، سيبقى مع ذلك متجانساً في هذا الميكانيك وفي كل النظريات الفيزيائية وسيبقى بالتالي انحفاظ الطاقة شاملاً في كل هذه النظريات. وهكذا فالطاقة الكلية في التفاعلات النووية، القوية منها أو الضعيفة، منحفظة أيضاً

وإن كنا لا نعلم عما إذا كانت القوى في هذه التفاعلات مشتقة من كمون أم لا. ثم إن مفهوم القوة، كما كنا قد أشرنا في مطلع الفصل السابق، يفقد معناه عندما تصبح المسافات بين الجسيمات المتفاعلة في حدود 10^{-15}م ولذا فإن مفهوم الطاقة يحتل مكان الصدارة بدلاً عن مفهوم القوة في دراسة تفاعلاتها، بل ويحل محل هذا الأخير في التفاعلات الكهرطيسية أيضاً عندما تحصل هذه التفاعلات في المجال المجهري– الجزيئات والذرات – مادام إطار دراستها عندئذ هو ميكانيك الكم ومادام لا محل لمفهوم القوة في هذا الميكانيك : يرجع تحليل الحدث الكمومي إلى التفتيش عن القيم التي يمكن للطاقة (ومقادير فيزيائية أخرى أقل أهمية منها) أن تأخذها كما سنرى.

فانحفاظ الطاقة صحيح في التفاعلات الواقعة على أصغر مجال مجهري يمكن تصوره وصحيح في المجالات الجهرية وفي أوسعها، على نطاق الكون كله. فالكون تعريفاً جملة معزولة ولذلك فالطاقة الكلية للكون منذ نشأته ثابتة وكل ما يقع في الكون من حادثات فيزيائية وكيميائية وحيوية ليس سوى انتقال الطاقة من شكل إلى آخر. رأينا كمثل على هذا الانتقال تحول الطاقة الكامنة إلى طاقة حركية لدى سقوط الأجسام وسنرى في دراسة الحركات الدورية في الفقرة القادمة، كحركة النواس، أن ما يجري هو انتقال الطاقة الكامنة إلى حركية وهذه إلى كامنة بشكل مستمر. ولكننا نلح منذ الآن على ضرورة النظر إلى كل التفاعلات انطلاقاً من مبدأ انحفاظ الطاقة وتفسير الحادثات على أنها انتقال الطاقة من شكل إلى آخر. لننظر إلى الشمس والأرض كجملة معزولة تقريباً؛ تقع في الشمس انشطارات نووية هائلة تفقد النويات فيها جزءاً من كتلتها مولدة طاقة (الكتلة طاقة أيضاً حسب العلاقة $E = mc^2$) كافية للسماح بالانصهارات النووية أي استحالة ذرات الهدروجين إلى ذرات الهليوم. هذه الطاقة النووية هي مصدر حرارة سطح الشمس الذي يتجاوز 10^5 درجة، ولكن ما هي الحرارة ؟ إنها طاقة حركية واهتزازية لذرات الغازات وطاقة إشعاع، طاقة فوتونات[2] تصدرها الجسيمات المثارة. إن الأشعة، الفوتونات الآتية من الشمس هي مصدر الطاقة الأساسي (والوحيد قبل استعمال الطاقة النووية 1945) على الأرض. فالأرض، خلافاً للشمس، كوكب بارد، لا طاقة ذاتية له، لا انشطارات أو انصهارات نووية. لا تحدث التفاعلات فيه إلا بفضل الطاقة الإشعاعية – الحرارية – الآتية من الشمس (8,36 جول يتلقاها السم^2 الواحد في الدقيقة). إن منشأ كل ما يجري على سطح الأرض من تفاعلات هو هاتان الحريرتان اللتان تتلقاهما واحدة السطوح، مربع السنتمتر، في الدقيقة. فهي التي سمحت بظهور الحياة على الأرض، وهي التي أتاحت لنا أن نستخدم حتى اليوم، ولزمن طويل آخر حتماً، الأحفورات العضوية (النباتية والحيوانية)، المتحجرة كالفحم أو السائلة كالبترول، كمصدر أساسي من مصادر الطاقة الحرارية وتحويلها إلى ميكانكية وكهربائية... وهي التي تجعل الماء يتبخر بالتسخين بإبعادها جزئيات الماء عن بعضها بعضاً – فهي

---

[2] وهي طاقة "حركية" إذا شئنا إعطاءها هذا الاسم مادام للفوتون اندفاع خطي P وطاقة تتناسب معه تكتب على الشكل $E = cP$ حيث c هي سرعة الضوء بدلاً عن الشكل $\frac{P^2}{2m}$ الذي رأيناه.

طاقة مبذولة ضد قوى التماسك في السائل – وتسمح بصعود جزيئات الماء إلى الجو وإعطاءها طاقة كامنة – ضد قوى التثاقل. يعود بخار الماء فيتكثف في الجو ويسقط بفعل ثقله على سطح الأرض. فإذا سقط على أماكن أعلى من تلك التي تبخر منها – سطح البحر –، أمكن استعمال ما تبقى لديه من طاقة كامنة عند سقوطه – بفعل الطبيعة أو بفعل الإنسان، الشلالات والسدود – وتحويل هذه الطاقة إلى طاقة ميكانيكية حركية واستعمالها مباشرة أو تحويلها في المنوبات إلى طاقة كهربائية وهكذا. أما تحويل الطاقة من شكلها الكتلوي إلى أشكال أخرى حرارية عشوائية (القنبلة النووية) أو حرارية منتظمة ومراقبة (المفاعلات النووية المنتجة للكهرباء) فلم يبدأ إلا في عام 1945. أما تحويلها من إشعاع إلى كتلة (من فوتونات إلى إلكترون وبوزيترون مثلاً) فلا يستغل تقانياً بعد.

ينتج مما سبق أن كل القوى – التفاعلات الأساسية – في الطبيعة هي قوى محافظة وأن ما نسميه بالقوى المبددة، كقوى الاحتكاك، غير المشتقة من كمون، والتي تمنع النواس من العودة إلى ارتفاعه الأول لا تبدد في الواقع شيئاً من الطاقة وإنما تبدد الطاقة الميكانيكية $T+U$ محولة جزءاً منها إلى طاقة حركية، اهتزازية لجزيئات التماس على السطحين وتحول هذا الجزء "المبدد" إلى طاقة حرارية غير صالحة للاستعمال.

إن التحقق من مبدأ انحفاظ الطاقة يقتضي إذاً وجود آلات مثالية تسمح نقل الطاقة من الشكل الذي تظهر عليه إلى الشكل الذي نرغب به تقانياً دون التفريط بأي جزء منها، أي دون تحويل هذا الجزء إلى طاقة غير منتظمة كالحرارة لا يمكن استردادها بسهولة. نسمي هذه الآلات المثالية التي تسمح بالانتقال من الطاقة الكامنة إلى الحركية مثلاً دون أي ضياع وبالتالي عكس هذه العملية بقدر ما نريد بالآلات المعكوسة أو الآلات قابلة القلب : بكرات مثالية مؤلفة من خيوط مثالية غير قابلة للمد، لا يتطلب عطفها أي عمل، تنزلق دون احتكاك على قرص صلب غير قابل للتشويه، الخ. لا يمكن لأي بكرة واقعية أن ترفع الجسم إلى نفس الارتفاع الذي توصله إليه البكرة المثالية.

لنضف أخيراً وظيفة عملية لمبدأ انحفاظ الطاقة : يقتضي حل المعادلات التفاضلية التفتيش عن المقادير التي تبقى ثابتة مع الزمن – المقادير الصامدة – والتي تسمى بالتكاملات الأولية. إن الطاقة الثابتة $T+U=C$ هي إحدى هذه المقادير ويكتسي ثباتها من وجهة النظر العملية هذه أهمية إضافية. ستتحدث بالتفصيل في الفصول القادمة عن التكاملات الأولية وإن لم يكن لها كلها نفس المحتوى المبدئي الهام الذي تكتسبه الطاقة.

1.2- الهزاز التوافقي :

سنبدأ بدراسة حركة جسم خاضع لقوة تتناسب مع المسافة كحركة نابض مثلاً ثبت أحد طرفيه وشد الآخر بقوة صغيرة، لا تبعده إلا قليلاً عن حالة التوازن نستطيع معها تطبيق قانون هوك القائل بالتناسب بين القوة والاستطالة والذي أعدناه في الفصل السابق إلى منشئه الذري. تكتسي هذه الدراسة أهمية خاصة لأنها أبسط مثل يبين لنا تحول الطاقة الميكانيكية من شكل إلى آخر، من كامنة إلى حركية والعكس بالعكس. يمكن تمثل حركة الإلكترون حول النواة عندما ننظر إلى هذه الحركة من بعيد، أي من مسافة كبيرة بالنسبة لأبعاد الذرة، كحركة الهزاز أيضاً ويمكننا أن نفعل ذلك في كل مرة تتغير فيها القوة خطياً بتغير المسافة. وهذا ما يقع، كما في مثل النابض، كل مرة ندرس فيها الحركة حول وضع التوازن، على مسافات صغيرة، بحيث نستطيع مطابقة منحني القوة $F(x)$ ، مهما كان شكله، مع المماس على هذا المنحني في نقطة التوازن، لنسم k ثابتة التناسب بين القوة والاستطالة التي تعبر عن قساوة الهزاز ولنسم Ox محور تطبيق القوة، فالقوة إذاً هي

$$F = F_X = X = -kx \qquad (2.1)$$

إشارة القوة سالبة لأنها قوة تحاول إعادة الجسم إلى وضعه الأصلي، إلى حالة التوازن التي أخرجناه منها بشدنا طرفه. هذه القوة مشتقة من كمون وعملها بين وضعين هو حسب (1.14)

$$U_1 - U_2 = [w]_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} -kx\,dx = \frac{-kx_2^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2} \qquad (2.2)$$

سنأخذ نقطة التوازن، النقطة a_0 ، كنقطة مبدأ على المحور Ox وكنقطة الصفر لقياس الطاقة الكامنة، الشكل.6. نرى إذاً، بوضع $x_1 = 0$ في (2.2) و $U_1 = 0$ أن الطاقة الكامنة في كل نقطة هي $U = \frac{kx^2}{2}$.

والطاقة الكلية هي

$$\frac{1}{2}(mx'^2 + kx^2) = E = \text{ثابتة} \qquad (2.3)$$

1.2– الهزاز التوافقي :

سنبدأ بدراسة حركة جسم خاضع لقوة تتناسب مع المسافة كحركة نابض مثلاً ثبت أحد طرفيه وشد الآخر بقوة صغيرة، لا تبعده إلا قليلاً عن حالة التوازن نستطيع معها تطبيق قانون هوك القائل بالتناسب بين القوة والاستطالة والذي أعدناه في الفصل السابق إلى منشئه الذري. تكتسي هذه الدراسة أهمية خاصة لأنها أبسط مثل يبين لنا تحول الطاقة الميكانيكية من شكل إلى آخر، من كامنة إلى حركية والعكس بالعكس. يمكن تمثل حركة الإلكترون حول النواة عندما ننظر إلى هذه الحركة من بعيد، أي من مسافة كبيرة بالنسبة لأبعاد الذرة، كحركة الهزاز أيضاً ويمكننا أن نفعل ذلك في كل مرة تتغير فيها القوة خطياً بتغير المسافة. وهذا ما يقع، كما في مثل النابض، كل مرة ندرس فيها الحركة حول وضع التوازن، على مسافات صغيرة، بحيث نستطيع مطابقة منحني القوة $F(x)$ ، مهما كان شكله، مع المماس على هذا المنحني في نقطة التوازن، لنسم k ثابتة التناسب بين القوة والاستطالة التي تعبر عن قساوة الهزاز ولنسم Ox محور تطبيق القوة، فالقوة إذاً هي

$$F = F_X = X = -kx \qquad (2.1)$$

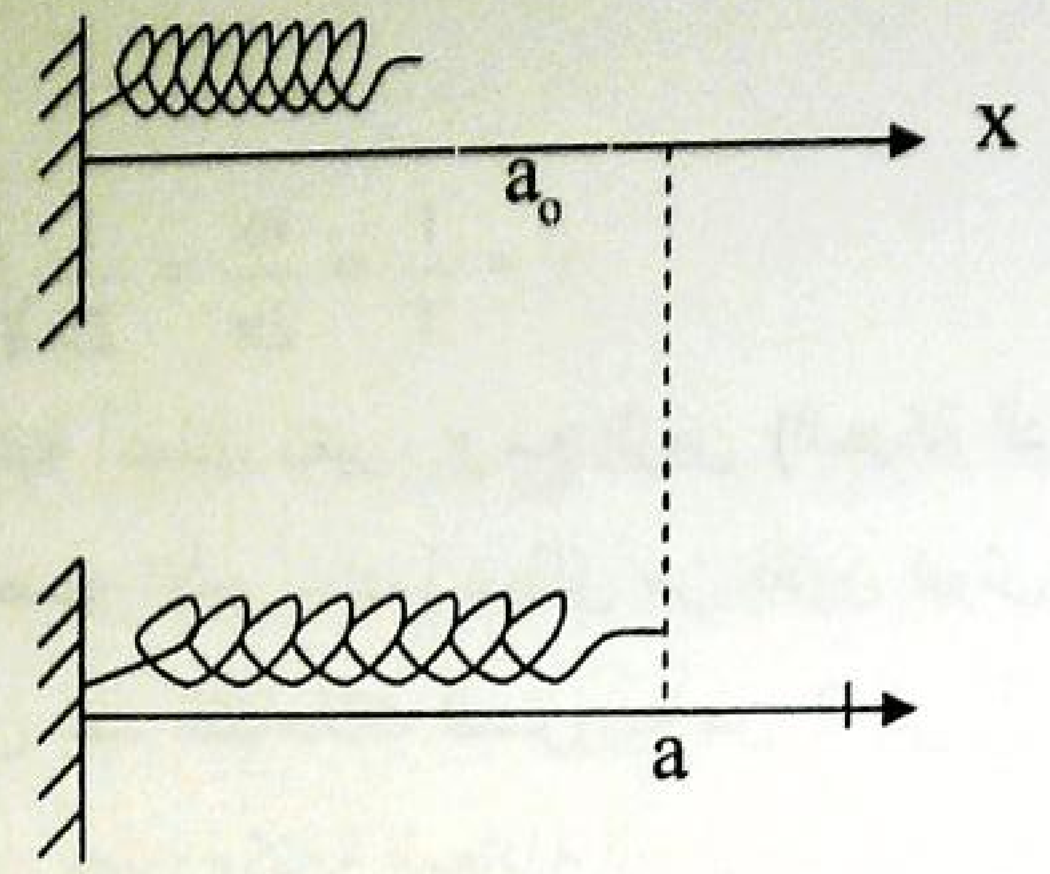
إشارة القوة سالبة لأنها قوة تحاول إعادة الجسم إلى وضعه الأصلي، إلى حالة التوازن التي أخرجناه منها بشدنا طرفه. هذه القوة مشتقة من كمون وعملها بين وضعين هو حسب (1.14)

$$U_1 - U_2 = [w]_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} -kx\, dx = \frac{-kx_2^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2} \qquad (2.2)$$

سنأخذ نقطة التوازن، النقطة a_0، كنقطة مبدأ على المحور Ox وكنقطة الصفر لقياس الطاقة الكامنة، الشكل.6. نرى إذاً، بوضع $x_1 = 0$ في (2.2) و $U_1 = 0$ أن الطاقة الكامنة في كل نقطة هي $U = \frac{kx^2}{2}$.

والطاقة الكلية هي

$$\frac{1}{2}(mx'^2 + kx^2) = E = \text{ثابتة} \qquad (2.3)$$



الشكل.6

لنفرض أن الشروط البدائية في $t = 0$ هي $x'_o = 0$

$x_o = a$، أي وضع الاستطالة العظمى للنابض

هذا يعطينا قيمة الطاقة الكلية وهي طاقة كامنة بحتة :

$$E = \frac{1}{2}ka^2$$

وتصبح العلاقة (2.3) على الشكل

$$x'^2 = \frac{k}{m}(a^2 - x^2) \qquad (2.3)'$$

نسمي المقدار $\omega = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$ بالتواتر الزاوي؛ أبعاده $\left[\frac{L^2T^{-2}}{L^2}\right]^{1/2} = \left[\frac{1}{T}\right]$، هي أبعاد تواتر زاوي (سرعة زاوية) وأبعاد k هي $[k] = [M][T]^{-2}$.

ونحصل من '(2.3) على الزمن بالاستربا ع

$$\omega\int_0^t dt = \int_a^x \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{1/2}} \qquad (2.4)$$

ومنه، بالمتغير الجديد $\frac{x}{a} = \sin u$:

$$\omega t = \int_{u=\frac{\pi}{2}}^{\arcsin\frac{x}{a}} du = \arcsin\frac{x}{a} - \frac{\pi}{2} \qquad (2.5)$$

(سنرمز أحياناً لـ arc sin بـ $\sin^{-1}$ لأنه الدالة العكسية لـ sin).

أي

$$x = a\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = a\cos\omega t \qquad (2.5)'$$

وحركة طرف النابض حركة دورية حول وضع التوازن تنحرف عنه بـ $+a$ (نحو اليمين) $\omega t = 2k\pi$ وبـ $-a$ (نحو اليسار) $\omega t = (2k+1)\pi$ نسمي a سعة الاهتزاز وتتم الدورة الكاملة بزمن مقداره

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (2.6)$$

والتواتر هو

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (2.6)'$$

لنلاحظ أن معرفتنا بالطاقة الكلية أعطانا تغير x مع الزمن (الحركة الدورية على المستقيم Ox) بتكامل واحد بدلاً عن تكاملين كما يقتضيه الأمر عندما ننطلق من قانون نيوتن. ولذا سمي إعطاء الطاقة الكلية الثابتة تكاملاً أولياً إذ أنه خفض عدد التكاملات الضرورية من 2 إلى 1.

يمكننا طبعاً الانطلاق من قانون نيوتن وكتابة المعادلة التفاضلية على الشكل

$$mx'' = -kx \qquad (2.7)$$

أو

$$x'' + \omega^2 x = 0 \qquad (2.8)$$

إن حل هذه المعادلة الخطية وكل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة، أي بدون طرف ثان، ذات المعاملات الثابتة سهل إذا بدلنا x بـ $ce^{\lambda t}$ في المعادلة مما يعطينا حلاً خاصاً لها؛ أما الحل العام فنحصل عليه بتوضيعنا – بجمعنا لكل الحلول الخاصة التي نحصل عليها –

$$x = \sum c_j e^{\lambda_j t}$$

ونحن دون الخوض في التفاصيل نكتفي بالإشارة إلى أمرين هامين، أولهما هو أن عدد الحلول الخاصة وبالتالي عدد الثوابت c_i يساوي لدرجة المعادلة. ولما كانت كل معادلات الحركة من الدرجة الثانية فإن معرفة الوضع البدائي والسرعة البدائية (الثابتتان x_o و x'_o) كافية. وثانيهما إمكانية التوضيع الخطي للقوى المؤثرة وهكذا فإننا عندما قبلنا مبدأ التوضيع (§3.1. 3) فإننا قبلنا أن تكون المعادلات التفاضلية معادلات خطية. لنبدل x بـ $ce^{\lambda t}$ في (2.8) فنحصل على

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

أي $\lambda = \pm i\omega$ والحل العام لـ (2.8) هو

$$c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} \qquad (2.8)'$$

والشروط البدائية : $x'_o = 0$ تعطي $c_1 i\omega - c_2 i\omega = 0$ أي $c_1 = c_2$

و $x_o = a$ تعطي $a = c_1 + c_2$ ومنه

$$x = \frac{a}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) = a\cos\omega t \qquad (2.8)''$$

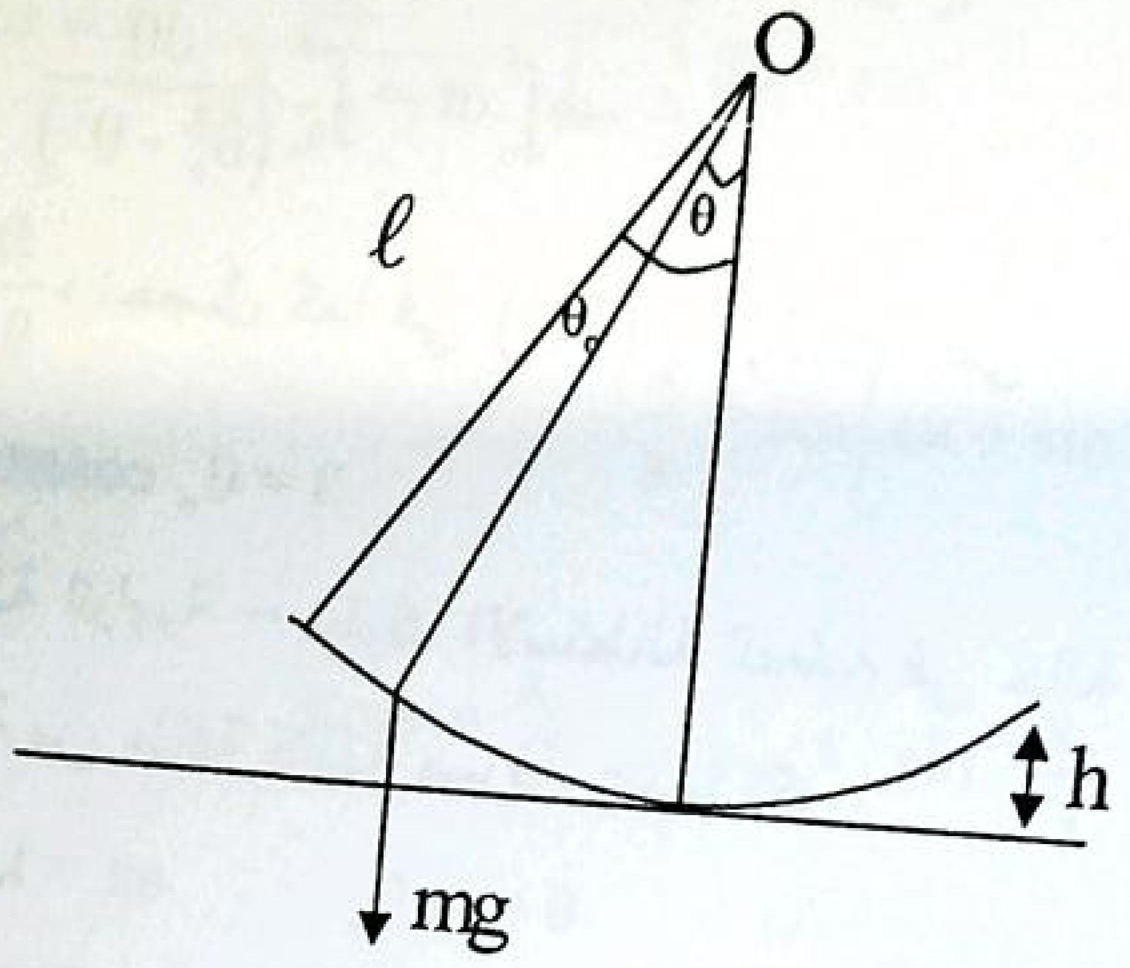
$$= \operatorname{Re} a\, e^{i\omega t}$$

ونجد من جديد الحل الذي وجدناه مباشرة بالاستربا ع.

وبصورة عامة فإن الحل الذي يهمنا هو الحل الحقيقي لـ '(2.8). عندئذ $c_2 = \bar{c}_1$ حيث – ترمز للعدد العقدي المرافق والحل هو $A\cos\omega t + B\sin\omega t$ مع $A = 2Rc_1$ و $B = -2I_m c_1$.

2.2- النواس البسيط :

وهو كتلة نقطية m معلقة إلى أحد طرفي خيط مثالي طوله ℓ مشدود لا كتلة له يستطيع الحركة بحرية ودون أي احتكاك حول طرفه الآخر O، الشكل.7. سنكرر ما فعلناه خطوة فخطوة في الرقم السابق.



الشكل.7

الطاقة الحركية في هذه الحركة الدائرية هي $\frac{m\ell^2\theta'^2}{2}$ والطاقة الكامنة هي طاقة التثاقل الكامنة $U = mgh$، حيث أخذنا وضع التوازن مبدأ قياس الطاقة الكامنة. نرى بسهولة أن

$$U = mg\ell(1 - \cos\theta)$$

سنأخذ الشروط البدائية في اللحظة t_o حيث الكتلة تصنع الزاوية θ_o مع وضع التوازن وحيث سرعتها تساوي، كما في المثل السابق، صفراً. فالطاقة الكامنة (الطاقة الكلية) هي إذاً

$$mg\ell(1 - \cos\theta_o)$$

ونكتب مبدأ انحفاظ الطاقة على الشكل

$$\frac{m\ell^2\theta'^2}{2} + mg\ell(1 - \cos\theta) = mg\ell(1 - \cos\theta_o) \qquad (2.9)$$

سنفرض أننا باقون في جوار وضع التوازن فالزاوية θ_o، وبالأولى θ، صغيرتان بحيث يمكننا نشر $\cos\theta$ في جوار الصفر والكتابة

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots$$

نكتفي بالحد الثاني مهملين θ^4 والقوى التي تليها. تصبح (2.9) على الشكل

$$\frac{1}{2}\left(m\ell^2\theta'^2 + mg\ell\theta^2\right) = \frac{1}{2}mg\ell\theta_o^2 \qquad (2.9)'$$

أو

$$\theta'^2 = \frac{g}{\ell}\left(\theta_o^2 - \theta^2\right) \quad (2.10)$$

هذه المعادلة بالمجهول θ هي تماماً نفس المعادلة '(2.3) التي حصلنا عليها بالمجهول x في حركة الهزاز التوافقي. نسمي المقدار $\omega = \left(\frac{g}{\ell}\right)^{1/2}$ بالتواتر الزاوي، وأبعاده $\left[\frac{1}{T}\right]$ هي أبعاد تواتر زاو لأن $[g] = [L][T^{-2}]$ (أبعاد تسارع) ونحصل على الزمن بالاستربا ع

$$\omega\int_0^t dt = \int_{\theta_o}^{\theta} \frac{d\theta}{\left(\theta_o^2 - \theta^2\right)}$$

وبتغيير المتغير $\frac{\theta}{\theta_o} = \sin u$، نحصل كما في (2.4) و '(2.5) على

$$\theta = \theta_o \cos\omega t \quad (2.11)$$

تسلك الزاوية θ – الاستطالة الزاوية – سلوك الاستطالة الفعلية في حالة الهزاز التوافقي وتتراوح بين θ_o و $-\theta_o$ وتتحول الطاقة الكلية من طاقة كامنة صرفة عندما تكون

$$\theta = \pm\theta_o \qquad \omega t = k\pi$$

إلى طاقة حركية صرفة عندما تكون

$$\theta = 0 \quad ، \qquad \omega t = \frac{(2k+1)\pi}{2}$$

وهو وضع التوازن حيث الطاقة الكامنة أصغر ما يمكن، وقد أخذنا الطاقة في هذا الوضع كمبدأ لقياس الطاقة الكامنة. تبلغ السرعة الزاوية أعلى قيمة لها، من أجل $\theta = 0$، حسب (2.10) والسرعة هي إذاً

$$|v| = \ell|\theta'| = \sqrt{g\ell}\,|\theta_o|$$

لنكرر هنا ما قلناه في الرقم السابق : يمكننا الانطلاق من قانون نيوتن وإسقاط معادلة الحركة على المماس فنحصل على :

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\theta$$

ولكن التسارع المماسي حسب '(2.(3.18) هو $\theta''\ell$

$$\theta''\ell = -g\sin\theta \quad (2.12)$$

θ صغيرة و $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \ldots$؛ نهمل الحدود التي هي فوق الدرجة الثانية فنحصل

$$\theta'' + \omega^2\theta = 0 \quad (2.13)$$

وهي طبعاً نفس معادلة حركة الهزاز التوافقي (2.8).

يوضح لنا مثل النواس البسيط معنى ما قلناه في بدء هذه الفقرة من التغير الخطي للقوة. فالقوة هنا تابع جيبي حسب (2.12) متناسب مع $\sin\theta$، اعتبرناه خطياً، متناسباً مع θ عندما أهملنا الحدود التالية في نشر $\sin\theta$.

ملاحظات :

1- ليس من الضروري أن يكون وضع الهزاز التوافقي (أو وضع النواس) منطبقاً في اللحظة البدائية على القيمة العظمى للاستطالة x أو θ. لنفرض مثلاً أن الوضع البدائي في (2.4) هو a_o وأن $a_o \neq a$ فالتكامل إذاً هو على الشكل

$$\omega t = \int_{a_o}^{x} \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{1/2}} = \int_{\sin^{-1}\frac{a_o}{a}}^{\sin^{-1}\frac{x}{a}} du = \sin^{-1}\frac{x}{a} - \sin^{-1}\frac{a_o}{a}$$

ومنه

$$\frac{x}{a} = \sin\left[\omega t + \sin^{-1}\frac{a_o}{a}\right]$$

نسمي طوراً المقدار

$$\sin^{-1}\frac{a_o}{a} = \varphi \quad ; \quad \sin\varphi = \frac{a_o}{a} \qquad (2.14)$$

وتصبح حركة الهزاز (أو النواس) على الشكل

$$x = a\sin(\omega t + \varphi) \qquad (2.15)$$

حيث قيمة x في اللحظة 0 : $x_o = a\sin\varphi = a\,\frac{a_o}{a} = a_o$

$\sin\varphi = 1$ و $\varphi = \frac{\pi}{2}$ عندما تنطبق الاستطالة العظمى على الاستطالة البدائية.

2- يرجع ما فعلناه حين قبلنا أن القوة خطية (متناسبة مع x أو مع θ) من الناحية الرياضية إلى ما يلي : لنفرض أن الطاقة الكامنة U تابعة لـ x ولننشر هذه الطاقة حول وضع التوازن حسب القوى المتصاعدة لـ x؛ لدينا النشر المحدود :

$$U(x) = U(0) + \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} x + \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=0} \frac{x^2}{2} + \ldots \qquad (2.16)$$

لقد أخذنا النشر حول وضع التوازن $U(0)$ وأخذنا $U(0)$ مبدأ لقياس الطاقة الكامنة $U_o = U(0) = 0$ وجدنا أن السرعة هي أكبر ما يمكن في هذه النقطة وتساوي للطاقة الكلية لدينا في كل لحظة

$$T + U = T_o + U_o = \frac{1}{2} m V_o^2$$

$$U = \frac{1}{2} m (V_o^2 - V^2) > 0$$

وبعبارة أخرى، تصل الطاقة الكامنة حدها الأدنى في النقطة O فالمشتق الأول $\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0}$ يساوي الصفر و $k = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=0}$ موجب.

وهكذا فإن أخذنا للطاقة الكامنة مساوية لـ $k\frac{x^2}{2}$ أو $mg\ell\frac{\theta^2}{2}$ يعني ببساطة أننا توقفنا في النشر (2.16) عند الحد من الدرجة الثانية بـ x، وهو أول حد يختلف عن الصفر في هذا النشر. وهو الذي يعطينا أبسط تعبير للقوة $F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx$، أي الهزاز التوافقي أو النواس البسيط. أما إذا تابعنا النشر فنحصل على قوى متناسبة مع x^2، x^3... ويطلق على الهزاز في هذه الحالة اسم الهزاز غير التوافقي.

لنأخذ كمثال الحد التالي في نشر الطاقة الكامنة للنواس:

$$U = mg\ell(1 - \cos\theta) = mg\ell(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} - ...)$$

أي أن $\frac{\partial^3 U}{\partial\theta^3} = 0$. تصبح القوة:

$$-\frac{\partial U}{\partial\theta} = -mg\ell(\theta - \frac{\theta^3}{3!}) \cong -mg\ell\sin\theta$$

ومعادلة الحركة

$$\theta'' + \omega^2(\theta - \frac{\theta^3}{3!}) = 0 \qquad (2.17)$$

لا ننسى أننا مازلنا نعتبر θ صغيرة ولكن ليس بالقدر الكافي لإهمال الحد بـ θ^3 الذي يبقى صغيراً. إننا مع الأسف لا نملك الوسائل الكافية لحل المعادلات التفاضلية غير الخطية التي هي على نمط معادلة الهزاز غير التوافقي (2.17) حلاً صحيحاً دوماً. وعلى الرغم أنه يمكن للحاسوب إيجاد الحل الصحيح فقد رأينا منذ الآن التطرق إلى وسائل إيجاد الحلول التقريبية لهذا النوع من المعادلات نظراً للدور الكبير الذي تلعبه هذه الوسائل في كل الفيزياء.

سننظر إلى الحد غير التوافقي الإضافي، إلى القوة الإضافية المتناسبة مع θ^3 كاضطراب بالنسبة إلى القوة المتناسبة مع θ وسنفتش عن حل مضطرب يرجع إلى الحل الأصلي $\theta = \theta_o \sin\omega_o t$ (حيث أخذنا في الحل العام (2.15) $\varphi = 0$ وسمينا $\omega_o = \left(\frac{g}{\ell}\right)^{1/2}$). سنكتب هذا الحل المضطرب على الشكل

$$\theta = \theta_o\sin\omega t + \lambda\theta_o\sin3\omega t \qquad (2.18)$$

حيث $\lambda(\theta)$ عدد صغير جداً بحيث يمكن من جديد إهمال الاضطراب، θ^3، وإعادة الحل إلى الحل الأصلي $\theta = \theta_o\sin\omega_o t$. ولكن لماذا اخترنا التفتيش عن حلول من الشكل (2.18)؟ لأن $\sin3\omega t$ تتناسب مع $\sin^3\omega t$ وبالتالي مع $(\omega t)^3$ حسب العلاقة المعروفة

$$\sin^3 u = \frac{3}{4}\sin u - \frac{1}{4}\sin 3u \qquad (2.19)$$

يمكننا الآن مادمنا اخترنا التفتيش عن حلول من الشكل (2.18) تعيين المجهول ω بأن نأخذ θ'' و θ^3 من (2.18) مع إهمال كل ما هو من الدرجة الثانية بمعامل الاضطراب λ ووضع النتيجة في (2.17) حيث ω هي ω_o. لدينا

$$0 = -\omega^2\theta_o\sin\omega t - 9\omega^2\lambda\theta_o\sin3\omega t + \omega_o^2\left[\theta_o\sin\omega t + \lambda\theta_o\sin3\omega t - \frac{\theta_o^3}{6}(\sin^3\omega t + 3\lambda\sin^2\omega t \cdot \sin3\omega t)\right]$$

وهكذا فإن أخذنا للطاقة الكامنة مساوية لـ $k\frac{x^2}{2}$ أو $mg\ell\frac{\theta^2}{2}$ يعني ببساطة أننا توقفنا في النشر (2.16) عند الحد من الدرجة الثانية بـ x، وهو أول حد يختلف عن الصفر في هذا النشر. وهو الذي يعطينا أبسط تعبير للقوة $F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx$، أي الهزاز التوافقي أو النواس البسيط. أما إذا تابعنا النشر فنحصل على قوى متناسبة مع x^2، x^3... ويطلق على الهزاز في هذه الحالة اسم الهزاز غير التوافقي. لنأخذ كمثال الحد التالي في نشر الطاقة الكامنة للنواس:

$$U = mg\ell(1 - \cos\theta) = mg\ell(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} - ...)$$

أي أن $\frac{\partial^3 U}{\partial \theta^3} = 0$. تصبح القوة:

$$-\frac{\partial U}{\partial \theta} = -mg\ell(\theta - \frac{\theta^3}{3!}) \cong -mg\ell\sin\theta$$

ومعادلة الحركة

$$\theta'' + \omega^2(\theta - \frac{\theta^3}{3!}) = 0 \qquad (2.17)$$

لا ننسى أننا مازلنا نعتبر θ صغيرة ولكن ليس بالقدر الكافي لإهمال الحد بـ θ^3 الذي يبقى صغيراً. إننا مع الأسف لا نملك الوسائل الكافية لحل المعادلات التفاضلية غير الخطية التي هي على نمط معادلة الهزاز غير التوافقي (2.17) حلاً صحيحاً دوماً. وعلى الرغم أنه يمكن للحاسوب إيجاد الحل الصحيح فقد رأينا منذ الآن التطرق إلى وسائل إيجاد الحلول التقريبية لهذا النوع من المعادلات نظراً للدور الكبير الذي تلعبه هذه الوسائل في كل الفيزياء.

سننظر إلى الحد غير التوافقي الإضافي، إلى القوة الإضافية المتناسبة مع θ^3 كاضطراب بالنسبة إلى القوة المتناسبة مع θ وسنفتش عن حل مضطرب يرجع إلى الحل الأصلي $\theta = \theta_o \sin\omega_o t$ (حيث أخذنا في الحل العام (2.15) $\varphi = 0$ وسمينا $\omega_o = \left(\frac{g}{\ell}\right)^{1/2}$). سنكتب هذا الحل المضطرب على الشكل

$$\theta = \theta_o\sin\omega t + \lambda\theta_o\sin3\omega t \qquad (2.18)$$

حيث λ(θ) عدد صغير جداً بحيث يمكن من جديد إهمال الاضطراب، θ^3، وإعادة الحل إلى الحل الأصلي $\theta = \theta_o\sin\omega_o t$. ولكن لماذا اخترنا التفتيش عن حلول من الشكل (2.18)؟ لأن $\sin3\omega t$ تتناسب مع $\sin^3\omega t$ وبالتالي مع $(\omega t)^3$ حسب العلاقة المعروفة

$$\sin^3 u = \frac{3}{4}\sin u - \frac{1}{4}\sin 3u \qquad (2.19)$$

يمكننا الآن مادمنا اخترنا التفتيش عن حلول من الشكل (2.18) تعيين المجهول ω بأن نأخذ θ'' و θ^3 من (2.18) مع إهمال كل ما هو من الدرجة الثانية بمعامل الاضطراب λ ووضع النتيجة في (2.17) حيث ω هي ω_o. لدينا

$$0 = -\omega^2\theta_o\sin\omega t - 9\omega^2\lambda\theta_o\sin3\omega t + \omega_o^2\left[\theta_o\sin\omega t + \lambda\theta_o\sin3\omega t - \frac{\theta_o^3}{6}(\sin^3\omega t + 3\lambda\sin^2\omega t \cdot \sin3\omega t)\right]$$

نبدل $\sin^3\omega t$ في هذه العلاقة بقيمتها حسب (2.19)، فنحصل عند إهمال الحد بـ $\theta_o^3\lambda$ ~ θ_o^4 على علاقة من الشكل $A\sin\omega t + B\sin 3\omega t = 0$ حيث A و B ثابتتان.

وهكذا فإن الثابت $\frac{A}{B}$ متناسب مع $\frac{-\sin 3\omega t}{\sin\omega t}$ مهما تكن t فهو تابع للزمن، لابد إذاً للتخلص من التناقض فرض $A = 0$ وعندئذ $B = 0$ إن $A = 0$ يعطينا

$$-\omega^2 + \omega_o^2 - \frac{3}{24}\omega_o^2\theta_o^2 = 0$$

أو

$$\omega^2 = \omega_o^2(1 - \frac{1}{8}\theta_o^2)$$

وبأخذ جذري الطرفين والتذكر أن $(1-\alpha^2)^{½} \cong 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$:

$$\omega \cong \omega_o(1 - \frac{1}{16}\theta_o^2) \qquad (2.20)$$

و $B = 0$ تعين لنا قيمة λ :

$$-9\omega^2\lambda + \omega_o^2\lambda + \frac{\omega_o^2}{24}\theta_o^2 = 0$$

3- إن الحل المباشر لمعادلة الحركة (2.9) ممكن إذ أننا نحصل منها على

$$\frac{\ell\dot{\theta}^2}{2} = g(\cos\theta - \cos\theta_o) = g2(\sin^2\frac{\theta_o}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2})$$

ومنه

$$\omega_o t = \int_o^{\frac{\theta}{2}} \frac{d\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left[\sin^2\frac{\theta_o}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right]^{½}} \qquad (2.21)$$

حيث $\omega_o = \left(\frac{g}{\ell}\right)^{½}$.

يعرف هذا التكامل بالتكامل الإهليليجي (القطعي الناقص) من النوع الأول[3]. لنكتب المتغير θ بدليل المقدار الثابت θ_o على الشكل

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta_o}{2}\sin u \qquad (2.22)$$

ويصبح المخرج

$$\left[\sin^2\frac{\theta_o}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right]^{½} = \sin\frac{\theta_o}{2}\cos u$$

---

[3] التكاملات الإهليليجية تكاملات لا تعبر عنها الدالات البدائية؛ ولا يوجد تعبير منته لها. ليكن $p(x)$ كثير حدود من الدرجة الثالثة، يمكن إعادة هذه التكاملات إلى الأشكال الثلاثة التالية $\int\frac{dx}{\sqrt{p(x)}}$ ، $\int\frac{x dx}{\sqrt{p(x)}}$ ، $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{p(x)}}$ وهي الأنواع الثلاثة بالترتيب للتكاملات الإهليليجية ومنشأ هذه التسمية هو قياس طول قوس من القطع الناقص ذي الإحداثيين $x = a\sin\theta$ و $y = b\cos\theta$ ، $dS^2 = dx^2 + dy^2$ و $s = a\int_o^{\theta}(1 - k^2\sin^2\theta)^{½}d\theta$ حيث $k = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$.

و

$$\frac{d\frac{\theta}{2}}{\left[\sin^2\frac{\theta_o}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right]^{1/2}} = \frac{du}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{du}{\left[1 - k^2\sin^2 u\right]^{1/2}}$$

حيث $k = \sin\frac{\theta_o}{2}$.

لنفرض أننا نريد حساب الدورة T. يجب عندئذ أن نضع في (2.21) $\theta = \theta_o$ و $t = \frac{T}{4}$ ولكن هذا يعني

أن $u = \frac{\pi}{2}$ حسب (2.22).

فالتكامل الذي يعطينا ربع الدورة هو إذاً

$$\omega_o \frac{T}{4} = K = \int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\left(1 - k^2\sin^2 u\right)^{1/2}}$$

يمكن نشر $\left(1 - k^2\sin^2 u\right)^{1/2}$ والمكاملة حداً فحد فنجد

$$\omega_o \frac{T}{4} = K = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9k^4}{64} + \dots\right)$$

$$\omega_o \frac{2\pi}{\omega \cdot 4} = K$$

$$\frac{\omega}{\omega_o} = \frac{\pi}{2K} = \frac{1}{1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9k^4}{64} + \dots} \cong 1 - \frac{k^2}{4} + \dots$$

وبتبديل k بتعريفها $k = \sin\frac{\theta_o}{2} \cong \frac{\theta_o}{2}$

$$\frac{\omega}{\omega_o} = 1 - \frac{\theta_o^2}{16} + \dots$$

وهي العلاقة التي وجدناها بالتفتيش عن الحل التقريبي حسب طريقة الاضطراب.

إن نواسات الميقاتيات الفلكية مصنوعة مع $\theta_o \leq 45$ دقيقة وهكذا فإن الحد الأول في التصحيح يقل عن 1/20.000.

3.2– الاهتزاز المتخامد :

لم نأخذ في دراسة الهزاز التوافقي قوى الاحتكاك بعين الاعتبار. يجب إذاً في حالة الاهتزازات الواقعية، القريبة من المثالية، النظر إلى تباطؤ الحركة الناتج عن الاحتكاك. وذلك بأن نضيف إلى القوة $-kx$ التي تحاول إعادة الهزاز إلى وضع التوازن قوة سالبة تعيق هي أيضاً تسارع الجسم وسنفرض أن هذه القوة متناسبة مع السرعة. تبرر دراسات ديناميكية السوائل هذا الافتراض، في حالة الجريان البطيء غير المخضرب، كحركة مكبس في الزيت مثلاً. تصبح معادلة الحركة (2.7) على الشكل

$$mx'' = -kx - \gamma x' \tag{2.23}$$

حيث γ مثل تناسب القوى المخمِدة مع السرعة.

نرمز كالمعتاد بـ $\omega_o^2 = \dfrac{k}{m}$

ونسمي المقدار $\dfrac{\gamma}{m}$: $\dfrac{1}{\tau} = \dfrac{\gamma}{m}$ (2.23)

(أبعاد τ هي أبعاد زمن لأن أبعاد $[\gamma] = [M][T^{-1}]$) ونفتش، كما فعلنا في أول رقم من هذه الفقرة، عن حل للمعادلة

$$x'' + \frac{1}{\tau}x' + \omega_o^2 x = 0 \tag{2.24}$$

من الشكل $x = ce^{\lambda t}$، الذي يعيد المعادلة إلى الشكل

$$\lambda^2 + \frac{1}{\tau}\lambda + \omega_o^2 = 0$$

لدينا إذاً قيمتان لـ λ:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{\tau} \pm \left(\frac{1}{\tau^2} - 4\omega_o^2\right)^{1/2}\right\}$$

نسمي

$$\omega = \frac{1}{2}\left(4\omega_o^2 - \frac{1}{\tau^2}\right)^{1/2} \tag{2.25}$$

ونميز حالتين حسب إشارة المميز. لنفرض أولاً، وهي الحالة الأهم عملياً، أن المميز سالب : $\dfrac{1}{\tau} < 2\omega_o$ و ω عدد حقيقي، فالحل عندئذ هو من الشكل

$$x = e^{-\frac{t}{2\tau}}\left(c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}\right) \tag{2.26}$$

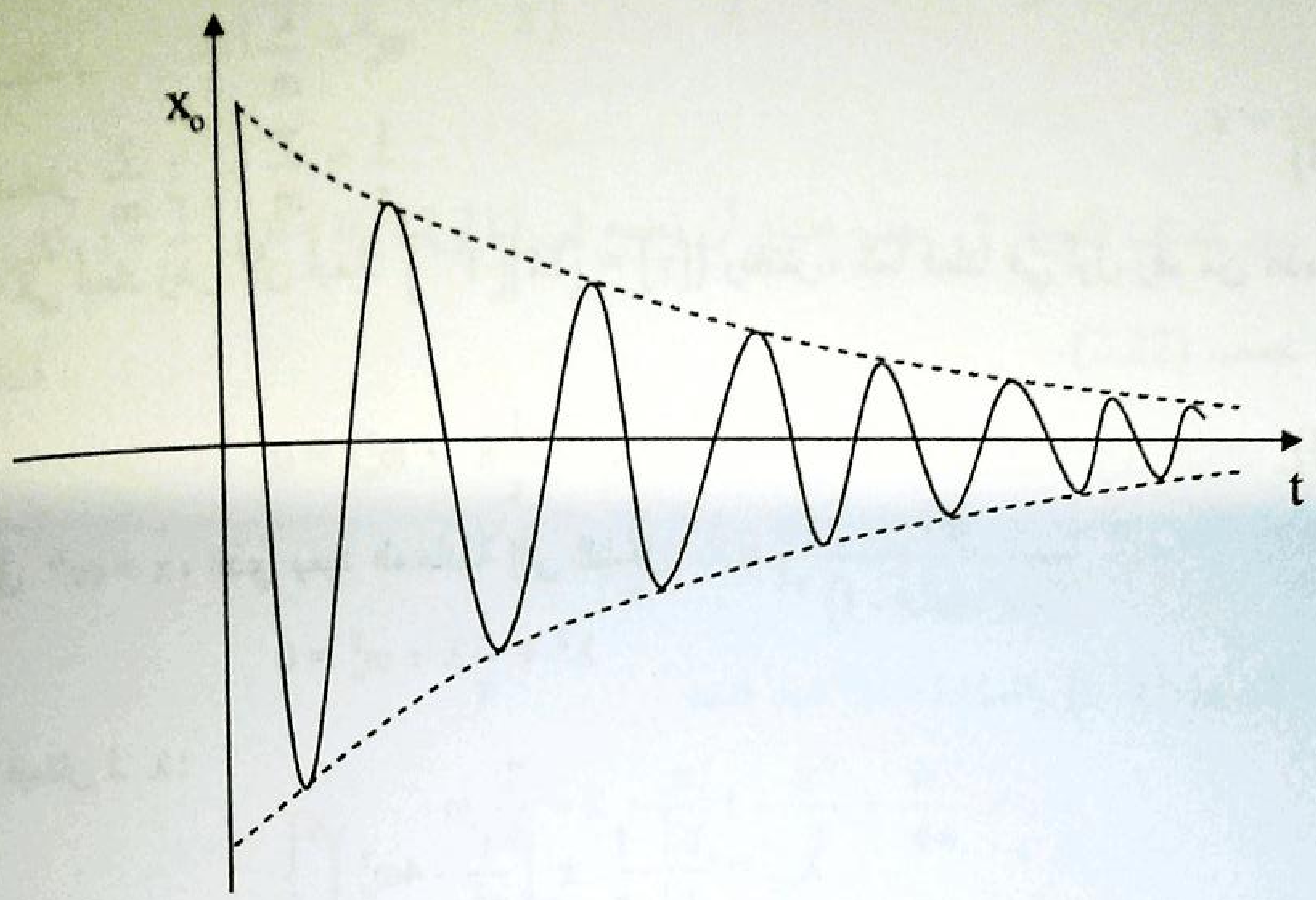
ولكي يكون الحل حقيقياً، ذا معنى فيزيائياً، وجب أن تكون قيمة المقدار بين القوسين حقيقية أي وجب أن يكون $c_2 = \bar{c}_1$

$$x = 2\mathrm{Re}\, c_1 e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos\omega t \tag{2.26'}$$

يحدد الشرط البدائي $t = 0$، $x = x_o$، قيمة $2\mathrm{Re}\, c_1 = x_0$ والحل

$$x = x_o e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos\omega t \tag{2.27}$$

يبين الشكل.8 تغيرات x مع الزمن وهو تابع جيبي متخامد : مركب مع تابع أسي متناقص $e^{-\frac{t}{2\tau}}$.



الشكل.8

أما إذا كان المميز موجباً فالحل عندئذ

$$x = e^{-\frac{t}{2\tau}}\left(c_1 e^{\Omega t} + c_2 e^{-\Omega t}\right) \quad \text{حيث :} \quad \Omega = \frac{1}{\tau^2} - 4\omega_o^2 \qquad (2.28)$$

والشرط البدائي $x_o = 0$ يعطي $c_1 = -c_2$ وبالتالي

$$x = 2c_1 e^{-\frac{t}{2\tau}} \operatorname{sh} \Omega t \qquad (2.28)'$$

4.2- الاهتزاز القسري المتخامد :

لنفرض أخيراً أن الهزاز المتخامد خاضع لقوة خارجية تابعة للزمن. تصبح معادلة الحركة بدلاً عن (2.23) على الشكل

$$mx'' + \gamma x' + kx = F(t) \qquad (2.29)$$

لنفرض أن القوة الخارجية المطبقة هي قوة دورية أيضاً من الشكل $F_o \cos\omega t$ [4].

[4] تعود أهمية هذا الفرض، بالإضافة إلى وجود قوى جيبية فعلاً، إلى إمكانية نشر أي تابع دوري بدليل توابع جيبية تواتراتها الزاوية هي ω، 2ω، ...nω ويعرف هذا النشر باسم نشر فوريي، أو تقريب التوابع، وإن لم تكن دورية، في كثير من الحالات بسلسلة فوريه أو تكامل فوريي Fourier.

نكتب هذه القوة على شكل $\mathrm{Re}\,F_o e^{i\omega t}$ ونفتش كما في فعلنا في '(2.8) و (2.26) عن حلول حقيقية من الشكل $x = \mathrm{Re}\,x_o e^{i(\omega t+\varphi)}$. لنكتب المعادلة (2.29) على شكل عقدي، نحلها ونأخذ في النهاية الأجزاء الحقيقية. نسمي $\alpha = \frac{F_o}{m}$ وتصبح المعادلة (2.29)

$$\left(-\omega^2 + \frac{i\omega}{\tau} + \omega_o^2\right) x_o e^{i(\omega t+\varphi)} = \alpha\, e^{i\omega t}$$

لنكتب العدد العقدي بين القوسين على شكل $\rho\, e^{-i\varphi}$ بحيث تصبح

$$x = x_o \cos(\omega t + \varphi) \qquad \text{و} \qquad x_o = \frac{\alpha}{\rho}$$

نرى بسهولة أن

$$\rho = \left(\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}\right)^{1/2} \tag{2.30}$$

وأن

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\frac{\omega}{\tau}}{\omega^2 - \omega_o^2} \tag{2.31}$$

أو

$$\varphi = \mathrm{tg}^{-1}\frac{\omega/\tau}{\omega^2 - \omega_o^2} \tag{2.31'}$$

ونحصل أخيراً على الحل

$$x = \frac{\alpha}{\left(\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}\right)^{1/2}} \cos\left(\omega t + \mathrm{tg}^{-1}\frac{\frac{\omega}{\tau}}{\omega^2 - \omega_o^2}\right) \tag{2.32}$$

هذا هو الحل الخاص للمعادلة (2.29) بطرف ثان. إن الحل العام للمعادلة المذكورة هو هذا الحل الخاص مضافاً إليه الحل العام بدون طرف ثان من الشكل (2.26) أو (2.28) حسبما يكون المميز سالباً أو موجباً.

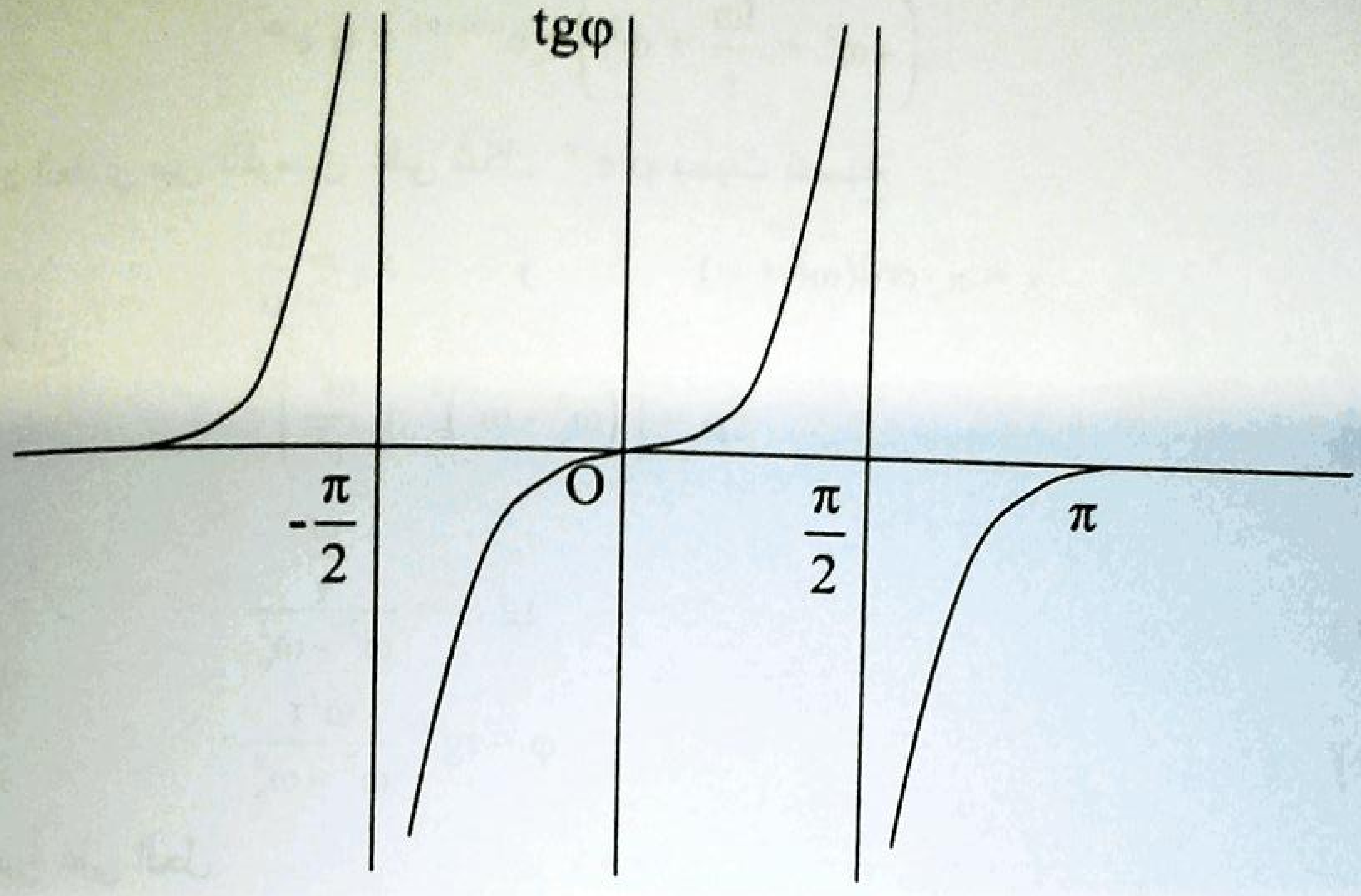
5.2– الإرنان Resonance :

لنناقش هذا الحل الخاص (2.32) حسب قيم ω ، التواتر الزاوي للقوة المطبقة. تزداد قيمة المقدار $\frac{\alpha}{\rho} = x_0$ عندما تتناقص قيمة المخرج؛ إلى أن تصل إلى قيمة عظمى نسميها بالإرنان لأنها تعطينا أكبر سعة لـ x وبالتالي، كما سنرى، أكبر طاقة.

نعرف الإرنان إذاً بالقيمة التالية لـ ω :

$$\omega = \omega_o$$

تبين العلاقة (2.31) أن $tg\varphi \rightarrow -\infty$ عند الإرنان آتياً من الصفر، من أجل $(\omega = 0)$ بقيم سالبة (تتغير φ إذاً من π إلى $\frac{\pi}{2}$) ثم يصبح موجباً ويتحول من $+\infty$ إلى الصفر من جديد، الشكل.9.

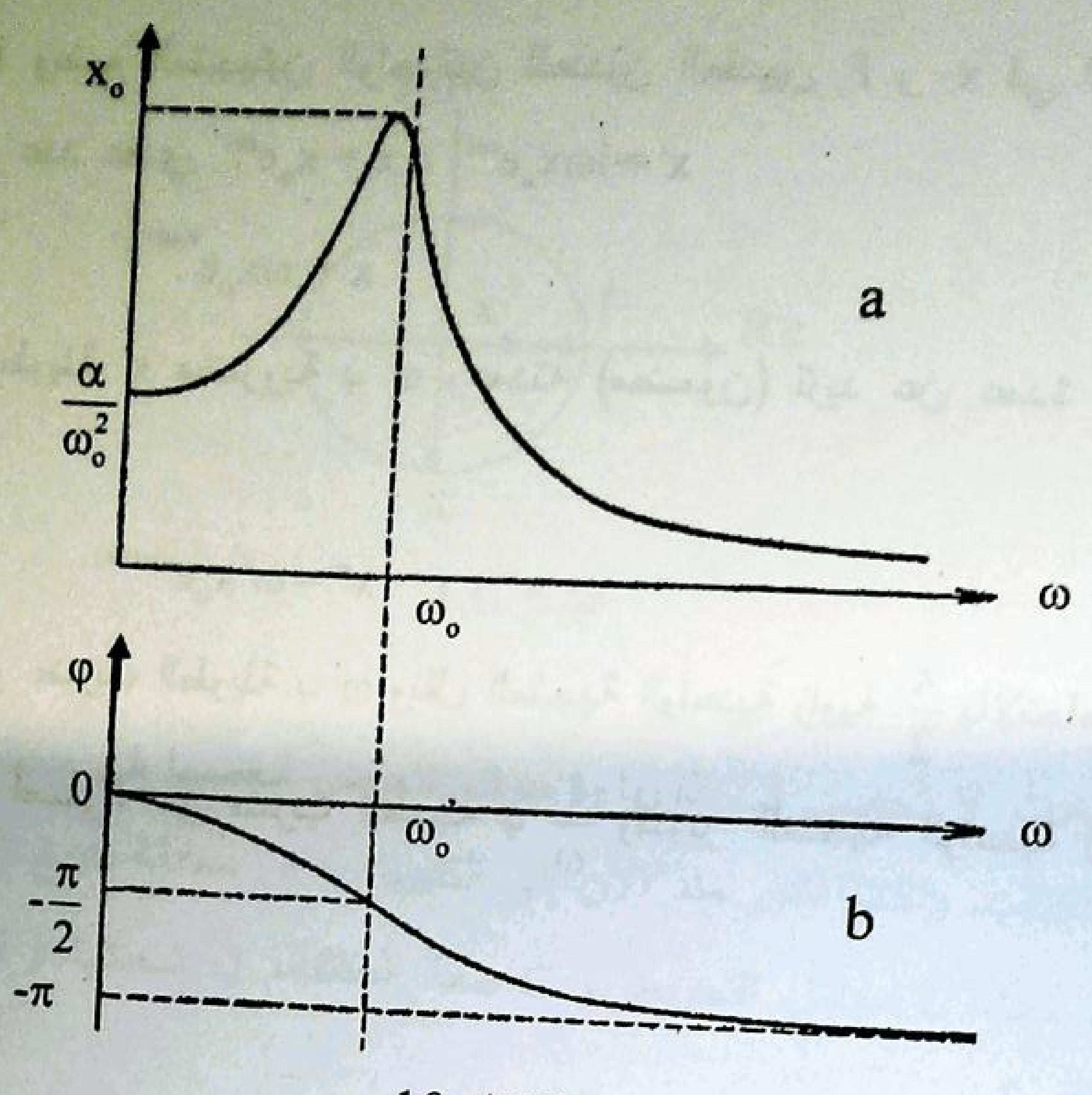


الشكل.9

والخلاصة تتغير φ من π إلى O (أو من صفر إلى $-\pi$ إذا شئنا). وهذا ما سنفعله إذا أردنا أن تكون x في اللحظة صفر موجبة، $x(t_o) > 0$. تتغير $x_o = \frac{\alpha}{\rho}$ على الشكل.10a وتبلغ قيمتها العظمى في جوار ω_o.[5]

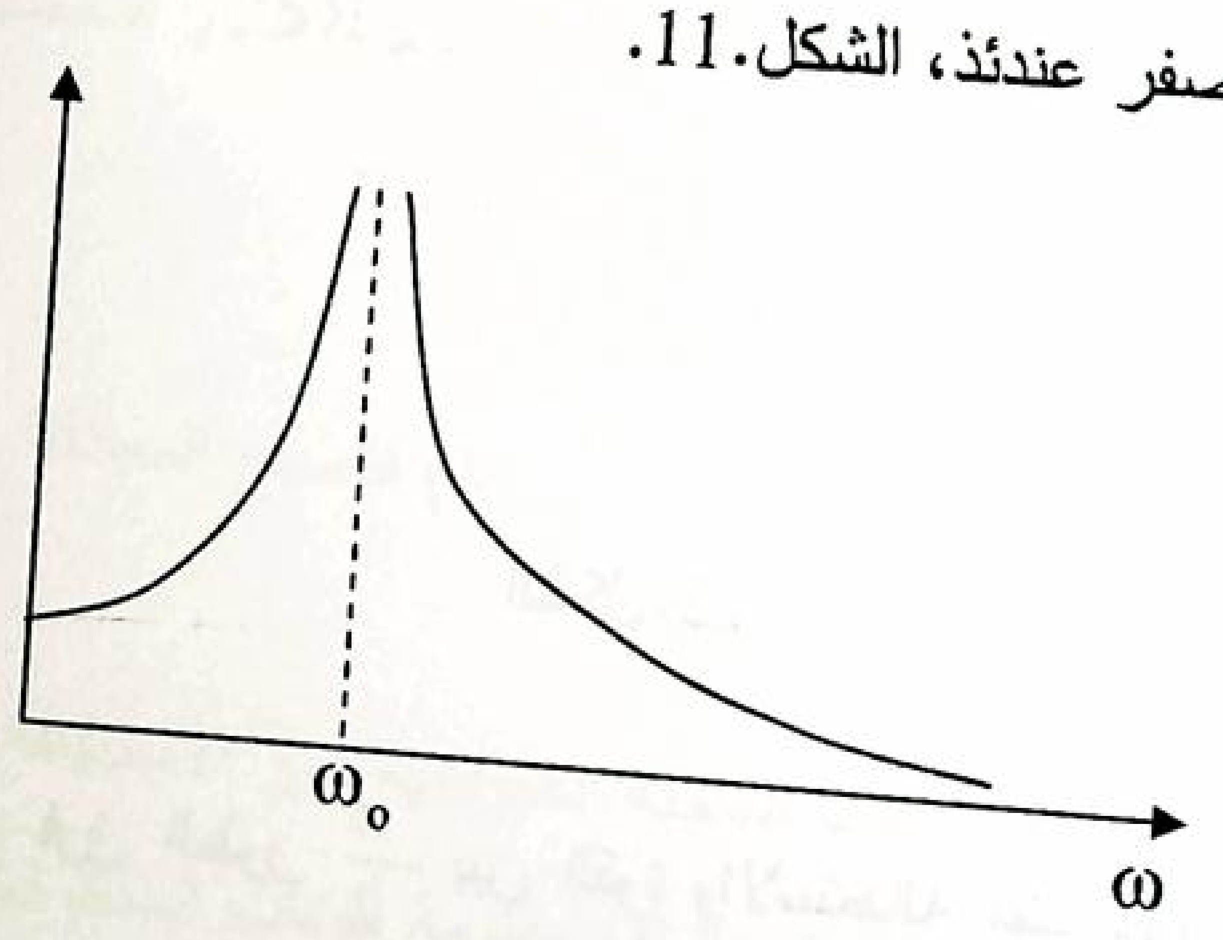
---

[5] عندما يصبح مشتق المخرج في (2.32) مساوياً للصفر أي من أجل $\omega^2 = \omega_o^2 - \frac{1}{2\tau^2}$ ، $\frac{1}{\tau}$ صغيرة في كل الأحوال والإرنان هو $\omega \cong \omega_o - \frac{1}{4\omega_o^2\tau^2}$.



الشكل.10

لنلاحظ أن x_o تصبح مساوية للما لا نهاية في حالة الإرنان إذا كان الاهتزاز قسرياً دون احتكاك لأن المخرج في (2.32) يساوي الصفر عندئذ، الشكل.11.



الشكل.11

إن فرق الطور φ بين القوة F والاستطالة x يقيس الزاوية التي تتقدم بها x على F فهو يقيس الزمن الذي يفصل بين وصول x نهايتها العظمى $(1 = \cos(\omega t' + \varphi))$ ووصول F نهايتها العظمى بعد x : $1 = \cos\omega t$.

$$2\pi = \omega t = \omega t' + \varphi$$

$$t = t' + \frac{\varphi}{\omega}$$

مثلنا في الشكل.12 وضع المتجهتين الواحداتين للعددين العقديين F و x في المستوى العقدي. نرى بالمناسبة أن اشتقاق عدد عقدي $x = x_o e^{i\omega t}$: $x' = i\omega x_o e^{i\omega t}$

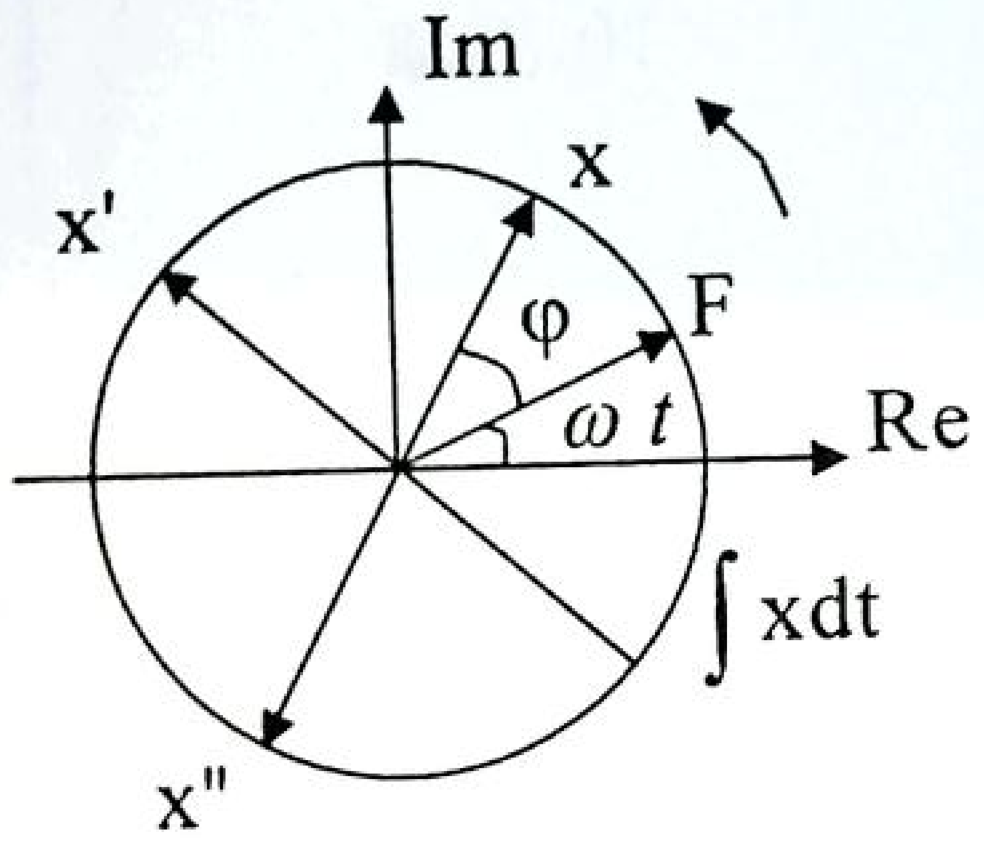
أو

$$x' = \omega x_o e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})} \quad (2.33)$$

طويلة المشتق هي طويلة x مضروبة بـ ω وعمدته (مضمون) تزيد عن عمدة x بطور يساوي $\frac{\pi}{2}$ وكذلك

$$x'' = \omega^2 x_o e^{i(\omega t + \pi)} \quad (2.34)$$

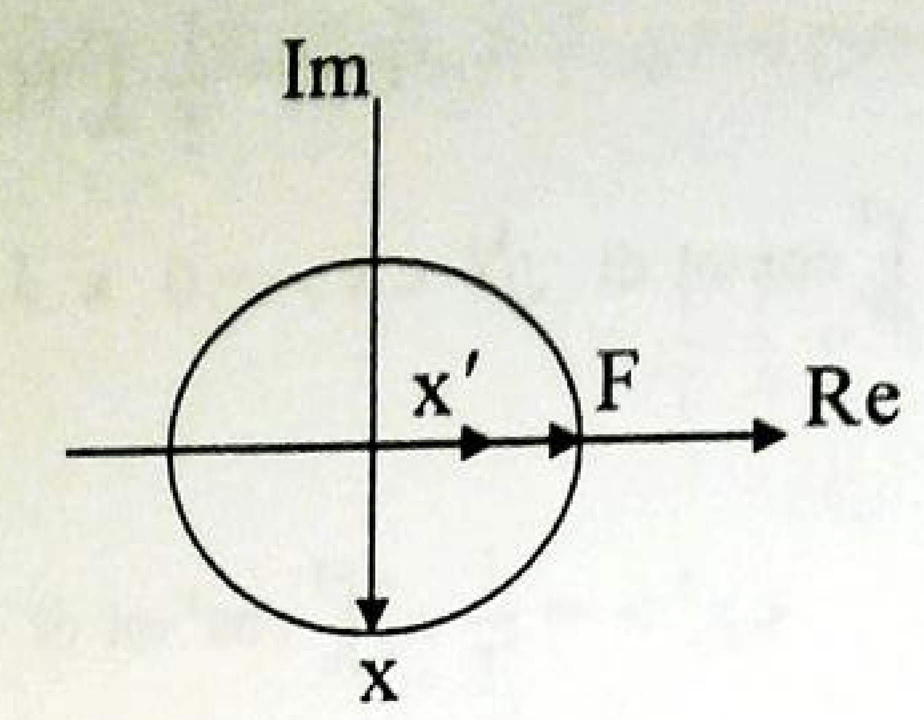
وهكذا فكل اشتقاق هو ضرب الطويلة بـ ω ونقل المتجهة الواحدية زاوية $\frac{\pi}{2}$ بالاتجاه الموجب وبالعكس كل تكامل، كل تابع أصلي، هو ضرب الطويلة بـ $\frac{1}{\omega}$ وتدوير المتجهة الواحدية زاوية $\frac{\pi}{2}$- بالاتجاه السالب، الشكل.12.



الشكل.12

يسمح لنا هذا الامتثال فهم فرق الطور $\frac{\pi}{2}$- بين القوة والاستطالة عند حدوث الإرنان : يحدث الإرنان عندما تكون السرعة والقوة كلاهما أكبر ما يمكن في نفس اللحظة وفي نفس الاتجاه[6]؛ فإذا كانت $x = x_o e^{i(\omega t + \varphi)}$ فإن $x' = x_o \omega e^{i(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})}$ ونريد أن تكون عمدة 'x مساوية لعمدة F (و F أكبر ما تكون) أي $\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2} = \omega t$ و $(t = \frac{2k\pi}{\omega})$، الشكل.13.

[6] يعرف كل من مارس لعبة الأرجوحة أن الإرنان، إيعاد الأرجوحة إلى أقصى ما يمكن θ_{max}، يحدث عندما تدفع الأرجوحة في الوضع الأفقي : 'x أكبر ما يمكن، انظر حالة النواس، و F قوة الدافع أكبر ما يمكن أيضاً.



الشكل.13

يقع الإرنان في حوادث لا تحصى في الفيزياء، سوف نتعرض لبعضها في مختلف فروع الفيزياء التي سندرسها في هذا الكتاب. ولكننا نشير منذ الآن إلى الكهرباء : إن معادلة تفريغ المكثفة في تحريضية : $L\frac{dI}{dt}+\frac{Q}{C}=0$ ، حيث L معامل التحريض، C سعة المكثفة، Q شحنتها و I شدة التيار $I=\frac{dQ}{dt}$ هي معادلة هزاز توافقي.

$$LQ''+\frac{Q}{C}=0 \qquad (2.35)$$

وإذا أخذنا بعين الاعتبار مقاومة السلك الكهربائي المتناسبة مع شدة التيار فنحصل على المعادلة

$$LQ''+RQ'+\frac{Q}{C}=0 \qquad (2.36)$$

وهي معادلة الهزاز المتخامد.

وأما إذا وصلنا الدارة بمصدر للطاقة الكهربائية (كمون $V(t)$) فتصبح المعادلة على الشكل

$$LQ''+RQ'+\frac{Q}{C}=V(t) \qquad (2.37)$$

وهي معادلة الهزاز المتخامد المقسور. تلعب الشحنة الكهربائية دور الاستطالة x. معامل التحريض دور الكتلة و R دور المقاومة الميكانيكية، وهي في الواقع مقاومة أيونات السلك لحركة الإلكترونات و $\frac{1}{C}$ دور معامل قساوة الهزاز، يمكننا دراسة تغيرات نوابض سيارة مثلاً بالمماثلة مع المعادلة (2.37) حيث تمثل تغيرات الكمون تغيرات حالة الطريق، صعوداً وهبوطاً : القوة $mgz(t)$.

6.2- دراسة الاستطاعة :

لنبدأ بحساب القيمة الوسطية لتابع جيبي من الشكل

$$x=x_o\cos\omega t=\mathrm{Re}\, x_o e^{i\omega t}$$

نسمي تعريفاً القيمة الوسطية لمقدار دوري ما، $f(t)$، ونكتب $<f>$ التكامل

$$< f > = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \tag{2.38}$$

نرى بسهولة أن القيمة الوسطية لـ x $< x > = 0$ لأن $\int_0^T \cos\omega t\,dt = \left[+\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right]_0^T = 0$ ولكن القيمة الوسطية لـ x^2 هي

$$< x^2 > = \frac{1}{T}x_o^2\int_0^T \cos^2\omega t\,dt$$

$$= \frac{x_o^2}{T}\int_0^T\left(\frac{1+\cos 2\omega t}{2}\right)dt$$

$$< x^2 > = \frac{x_o^2}{2} \tag{2.39}$$

يرينا هذا البرهان أن إضافة طور φ – غير تابع للزمن – للمتغير ωt لا يغير شيئاً من القيمة الوسطية. تسمح لنا هذه الملاحظة واستعمال العلاقتين (2.33)، (2.34) إعطاء القيم الوسطية للسرعة والتسارع :

$$< x'^2 > = \frac{\omega^2 x_o^2}{2} = \omega^2 < x^2 > \tag{2.40}$$

$$< x''^2 > = \frac{\omega^4 x_o^2}{2} = \omega^4 < x^2 > \tag{2.41}$$

لنحسب انطلاقاً من هذه العلاقات القيمة الوسطية للطاقة الكلية في الحالات الثلاثة التي درسناها :

أ– الهزاز التوافقي:

$$< E > = < T > + < U > = \frac{1}{2}m < x'^2 > + \frac{k}{2} < x^2 >$$

$$= \frac{1}{2}m\omega_o^2\frac{x_o^2}{2} + \frac{k}{2}\frac{x_o^2}{2} \qquad \text{ولكن } k = \omega_o^2 m$$

$$= \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2 = \frac{1}{2}kx_0^2$$

وهذا ما وجدناه في §2.1 : الطاقة الوسطية تساوي للطاقة الكلية الثابتة وهي الطاقة الكامنة في حالة الاستطالة العظمى $x' = 0$.

ب– لنحسب الطاقة الوسطية في حالة الهزاز المتخامد : لدينا حسب (2.27)

$$x^2 = x_o^2 e^{-\frac{t}{\tau}}\cos^2\omega t \tag{2.42}$$

يمكننا طبعاً حساب التكامل $I = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-\frac{t}{\tau}}\cos\alpha\omega t\,dt$. بقولنا إنه يساوي لـ

$$\frac{1}{T}\mathrm{Re}\int_0^T e^{-t(\frac{1}{\tau}+i\alpha\omega)}dt = \frac{1}{T}\,\mathrm{Re}\,\frac{-1}{\frac{1}{\tau}+i\alpha\omega}\left[e^{-T(\frac{1}{\tau}+i\alpha\omega)} - 1\right]$$

$$I = \frac{1/\tau}{\frac{1}{\tau^2}+\alpha^2\omega^2}\left(e^{\frac{T}{\tau}} - 1\right)$$

ذلك أن $e^{-i\alpha T\omega} = 1$ حيث α عدد صحيح يساوي 2 في الحالة التي تعنينا.

وكذلك حساب التكامل

$$J = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-\frac{t}{\tau}} \sin\alpha\omega t \, dt$$

بنفس الطريقة؛ إنه الجزء التخيلي فهو إذاً

$$J = -\frac{1}{T}\,\frac{\alpha\omega}{\frac{1}{\tau^2}+\alpha^2\omega^2}\left(e^{-\frac{T}{\tau}}-1\right)$$

وبالتالي حساب القيمة الوسطية لـ x^2 المعطاة بـ (2.42) و لـ x'^2 المساوية

$$x'^2 = x_o^2 e^{-\frac{t}{\tau}}\left(\frac{1}{4\tau^2}\cos^2\omega t + \omega^2\sin^2\omega t + \frac{\omega}{\tau}\sin\omega t\cos\omega t\right) \qquad (2.43)$$

بدليل I و J ؛ إذ أنه يكفي أن نكتب أن $\cos^2\omega t = \frac{1+\cos 2\omega t}{2}$ ، $\sin^2\omega t = \frac{1-\cos 2\omega t}{2}$ و $\sin\omega t\cos\omega t = 1/2\sin 2\omega t$. ولكن هذا الحساب طويل من جهة وغير ضروري من جهة أخرى لأن المقدار $\beta = \frac{1}{\tau}$ صغير جداً بحيث يمكن اعتبار تغيرات $e^{-\beta t}$ مهملة خلال الدورة T وبشكل أكثر تحديداً

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{-\beta t}dt = -\frac{1}{T\beta}\left(e^{-\beta T}-1\right) = \frac{e^{-\frac{\beta T}{2}}\left(-e^{-\frac{\beta T}{2}}+e^{\frac{\beta T}{2}}\right)}{\beta T} = e^{-\frac{\beta T}{2}}\,\frac{sh\frac{\beta T}{2}}{\beta T/2}$$

ولكن $\frac{sh\,x}{x} \underset{x\to 0}{\rightarrow} 1$. فالقيمة الوسطية للتابع $e^{-\beta t}$ تساوي تقريباً لقيمته من أجل أي زمن t من المجال $[0, T]$ أو من المجال $[nT, n(T+1)]$ الذي نحسب فيه.

نخرج إذاً $e^{-\beta t}$ من قوس حساب القيمة الوسطية ويبقى $<\sin^2\omega t> = \frac{1}{2} = <\cos^2\omega t>$

و $<\cos\omega t\sin\omega t> = \frac{1}{2}<\sin 2\omega t> = 0$.

لدينا إذاً

$$<U> = \frac{1}{2}m\omega_o^2 <x^2> = \frac{1}{4}m\omega_o^2 x_o^2 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

وحسب (2.43)

$$<T> = \frac{1}{2}m<x'^2> = \frac{1}{4}mx_o^2\left(\frac{1}{4\tau^2}+\omega^2\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

وحسب (2.25) يساوي القوس ω_0^2 وهكذا فإن الطاقة الوسطية

$$<E> = <U> + <T> = \frac{1}{2}m\omega_o^2 x_o^2 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (2.44)$$

وهي ليست ثابتة خلافاً لطاقة الهزاز التوافقي وإنما تساوي لطاقة هذا الأخير مضروبة بالتابع الأسي المتناقص $e^{-\frac{t}{\tau}}$. لنحسب مقدار تناقص هذه الطاقة في واحدة الزمن ونرمز له بـ $<P>$

$$<P(t)> = -\frac{d<E>}{dt} = +\frac{1}{\tau}\frac{1}{2}m\omega_o^2 x_o^2 e^{-\frac{t}{\tau}} = \beta <E> \qquad (2.45)$$

ونسمي عامل نوعية الاهتزاز نسبة الطاقة المخزونة على الطاقة المبددة خلال دورة ونرمز لهذا العامل بـ $\frac{Q}{2\pi}$ لدينا إذاً تعريفاً

$$Q = 2\pi \frac{<E>}{<P>\cdot T}$$

وحسب (2.45)

$$Q = \frac{<E>\cdot\omega}{\beta<E>} = \omega\tau \qquad (2.46)$$

ج- لنحسب الآن عمل القوى الخارجية في واحدة الزمن في حالة الاهتزاز القسري، إن هذا العمل هو استطاعة يمتصها الهزاز لمعارضة التخامد. لدينا حسب (2.29)

$$P = \bar{F} \cdot \frac{dx}{dt} = mx''x' + \gamma x'^2 + m\omega_o^2 xx'$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(mx'^2) + \frac{1}{2}m\omega_o^2\frac{d}{dt}(x^2) + \gamma x'^2$$

إن مجموع الحدين الأولين هو تغير الطاقة الكلية بالنسبة للزمن أي أن عمل القوى الخارجية موزع بين زيادة الطاقة الكلية وبين ما يبدده الاحتكاك $\gamma x'^2$. لنحسب الاستطاعة الوسطية التي تبذلها القوى الخارجية

$$<P> = <\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mx'^2)> + <\frac{d}{dt}\frac{1}{2}m\omega_o^2 x^2> + <\gamma x'^2>$$

لنبرهن أولاً أن القيمة الوسطية لمشتق بالنسبة للزمن $\frac{df(t)}{dt} = f'$ لمقدار منته f تساوي الصفر شريطة حساب هذه القيمة بالنسبة لعدد كبير من الدورات n. لدينا في الحقيقة

$$<f'(t)> = \frac{1}{nT}\int_0^{nT}\frac{df(t)}{dt} = \frac{f(nT) - f(0)}{nT} = 0 \qquad (2.47)$$

لما كان $f(nT)$ مقداراً منتهياً مهما يكن المتغير (nT) فالصورة تبقى منتهية بينما يتناهى المخرج إلى ما لا نهاية و $<f'(t)>$ إلى الصفر.

وهكذا فإن

$$<P> = <\gamma x'^2> \qquad (2.48)$$

أي أن كل الطاقة التي تصرفها القوى الخارجية هي على المدى البعيد لمعارضة التخامد لا غير. إن الطاقة التي يصرفها المنبع الكهربائي في حالة الدارة (2.36) هي وسطياً $(Q' = I)$.

$$<P> = R<I^2> = R\frac{I_o^2}{2}$$

أي أنها تسخن المقاومة الموجودة في الدارة.

لنحسب الطاقة الكلية الوسطية انطلاقاً من (2.32) لدينا

$$<x^2> = \frac{\alpha^2}{\rho^2}<\cos^2(\omega t + \varphi)> = \frac{\alpha^2}{2\rho^2}$$

$$<x'^2> = \frac{\omega^2\alpha^2}{\rho^2}<\sin^2(\omega t+\varphi)> = \frac{\omega^2\alpha^2}{2\rho^2}$$

وهكذا فإن

$$<U> = \frac{1}{2}m\omega_o^2<x^2> = \frac{1}{4}\ \frac{m\omega_o^2\alpha^2}{\rho^2}$$

و

$$<T> = \frac{1}{4}\ \frac{m\omega^2\alpha^2}{\rho^2}$$

وأخيراً

$$<E> = \frac{1}{4}\frac{m\alpha^2}{\rho^2}\left(\omega_o^2+\omega^2\right) = \frac{1}{4}\frac{\frac{F_o^2}{m}\left(\omega_o^2+\omega^2\right)}{\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2+\frac{\omega^2}{\tau^2}} \qquad (2.49)$$

ترينا هذه العلاقة أن القيمة الوسطية لـ $<E>$ غير تابعة للزمن. ولما كنا نستطيع وضع رمز القيمة الوسطية قبل أو بعد رمز الاشتقاق أي أن

$$\frac{d}{dt}<E> = <\frac{dE}{dt}>$$

فإن (2.49) ترينا أن $<\frac{dE}{dt}> = 0$ وقد برهنا على ذلك في الحالة العامة (2.47).

7.2– المعادلات الخطية ومبدأ التوضيع :

لنذكر أن المؤثر الخطي هو تطبيق خطي لفضاء متجهي في فضاء متجهي آخر قد ينطبق على الفضاء الأول أو لا ينطبق. سنأخذ هنا كمثل على مؤثر خطي لحقل الأعداد الحقيقية (أو حقل الأعداد العقدية) في ذاته المؤثر التفاضلي :

$$L = m\frac{d^2}{dt^2}+\gamma\frac{d}{dt}+k \qquad (2.29)'$$

إنه تطبيق لـ R (أو C)، حقل الأعداد الحقيقية أو حقل الأعداد العقدية في ذاته

$$L(x) = y \quad : \quad \left(m\frac{d^2}{dt^2}+\gamma\frac{d}{dt}+k\right)x = y$$

تعني الخطية أنه إذا كان $L(x_1) = y_1$ و $L(x_2) = y_2$ فإن

$$L(x_1+x_2) = y_1+y_2$$

$$L(a\,x_1) = ay_1 \qquad \text{حيث } a\in R$$

هذا يعني فيزيائياً أنه إذا وجدنا حلاً لمعادلة الهزاز التوافقي المقسور، x_1 من الشكل (2.32) عندما تكون القوة المطبقة y_1 بالتواتر الزاوي ω_1 وحلاً آخر لنفس المعادلة، x_2، عندما تكون القوة المطبقة y_2 والتواتر الزاوي ω_2 فإن الحل الذي نحصل عليه عند تطبيق قوة تساوي لمجموع القوتين هو مجموع الحلين x_1+x_2 وهذا هو محتوى مبدأ التوضيع الذي ألمحنا إليه (3.§3.1) : إن كل قوة تؤثر على استطالة الهزاز كما لو كانت مطبقة وحدها وهكذا فإن كون المعادلات التفاضلية خطية يؤدي إلى تنضيد القوى.

وعلى العكس إذا كانت المعادلات غير خطية، كوجود حد ب x^2 مثلاً في الهزاز غير التوافقي، فإن الحل ليس بجمع x_1 و x_2 أي بالتواتر الزاوي $\omega_1 + \omega_2$ وإنما بحدود فيها جداءات التواترات الزاوية بأعداد $2\omega_1$، $3\omega_1$، ...؛ $2\omega_2$، $3\omega_3$ ... وتواترات من الشكل $\omega_1 + \omega_2$، $\omega_1 - \omega_2$، $\omega_1 - 2\omega_2$، الخ.

وهكذا فإن مبدأ التوضيع الفيزيائي يكافئ رياضياً القول إن كل المعادلات التفاضلية التي تحقق هذا المبدأ هي خطية حتماً وهذه هي حالة أغلب القوانين الفيزيائية الأساسية التي نعالجها هنا، فقانون نيوتن خطي $\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F}$ ومعادلات الكهرطيسية خطية، ومعادلة شرودينغر في ميكانيك الكم ومعادلات الميكانيك النسبوي ومعادلات ميكانيك الكم النسبوي – نظرية الحقول المكممة – كلها خطية... أما معادلات النظريات الحالية التي تحاول توحيد قوى الطبيعة فهي كلها غير خطية ولا يصح فيها مبدأ التوضيع.

لنشر في صدد الحديث عن المؤثرات التفاضلية الخطية أن المؤثر $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$ هو مؤثر خطي يطبق حقل الأعداد الحقيقية (كفضاء متجهي) مثل $U(x,y,z)$ أو $r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}$ في الفضاء المتجهي الإقليدي ذي الثلاثة أبعاد. لدينا مثلاً

$$\vec{\nabla} r = \begin{pmatrix} x/r \\ y/r \\ z/r \end{pmatrix} = \frac{\vec{r}}{r} \tag{2.50}$$

3. انحفاظ الاندفاع (العزم) الخطي واصطدام الجسيمات

1.3– انحفاظ الاندفاع الخطي :

ينص مبدأ نيوتن الثالث على تساوي الفعل ورد الفعل بين جسمين متفاعلين، لنرمز لهذين الجسمين ب 1 و 2 ونكتب من جديد

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \tag{3.1}$$

أو

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0 \tag{3.1'}$$

ولكن $\vec{F}_{12}$ القوة المؤثرة على 1 (من قبل 2) ستؤدي حسب مبدأ نيوتن الثاني إلى تغيير عزمه الخطي $\vec{P}_1$

$$\frac{d\vec{P}_1}{dt} = \vec{F}_{12}$$

وكذلك $\vec{F}_{21}$ القوة المؤثرة على 2 (من قبل 1) ستؤدي حسب نفس المبدأ إلى تغيير عزمه الخطي $\vec{P}_2$:

$$\frac{d\vec{P}_2}{dt} = \vec{F}_{21}$$

نعبر عن مبدأ نيوتن الثالث بقولنا إذاً أن

$$\frac{d\vec{P}_1}{dt} + \frac{d\vec{P}_2}{dt} = 0 \qquad (3.1)''$$

أو

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{C} \qquad (3.2)$$

أي أن مجموع العزمين الخطيين للجسمين المتفاعلين متجهة ثابتة لا تتغير مع الزمن.

قلنا من جهة أخرى إن القوى الأساسية مشتقة من كمون؛ لتكن $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ المتجهتين اللتين تعينان وضع الجسمين 1 و 2 في الفضاء انطلاقاً من نقطة مبدأ O. فالقوة $\vec{F}_{21}$ المؤثرة على 2 مشتقة من كمون تابع لوضع الجسم 2 : $U(\vec{r}_2)$ وكذلك $\vec{F}_{12}$ المؤثرة على 1 مشتقة من كمون تابع لوضع الجسم 1 : $U(\vec{r}_1)$

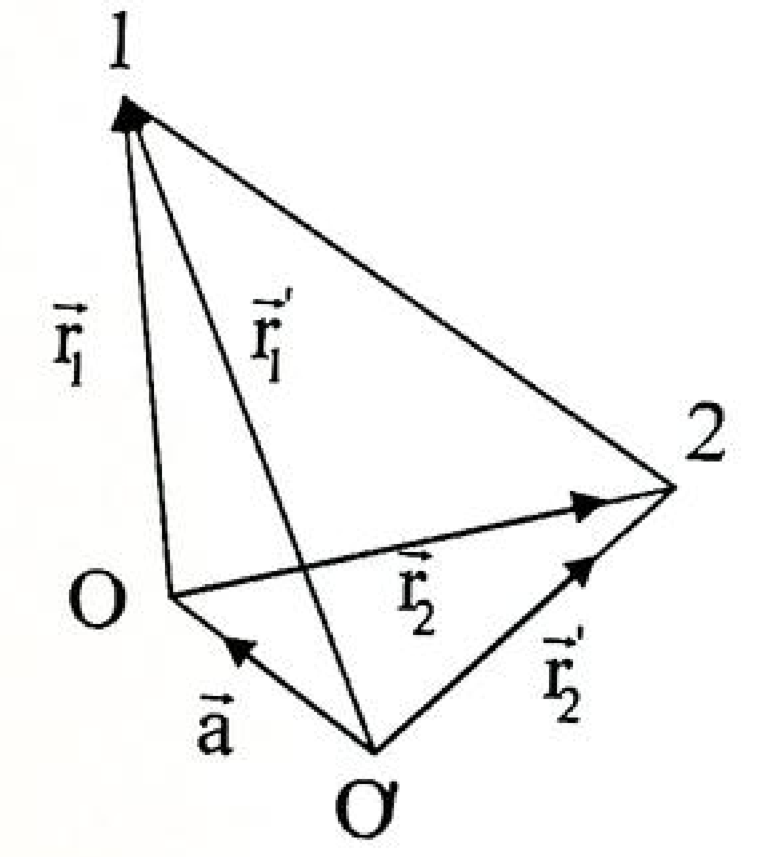
ولكن العلاقة (3.1) تظهر أن

$$\vec{\nabla}U(\vec{r}_2) = \frac{\partial U(\vec{r}_2)}{\partial \vec{r}_2} = \frac{-\partial U(\vec{r}_1)}{\partial \vec{r}_1}$$

أي أن U تابع في نفس الوقت لـ $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$. ولنبحث الآن عن شكل هذا التابع $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$. قلنا إن الفضاء متجانس أي أن الحوادث الفيزيائية لا تتأثر بتغيير نقطة المبدأ من O إلى O' : $\overline{O'O} = \vec{a}$ مثلاً، الشكل.14. يصبح الكمون المشترك الذي تشتق منه $\vec{F}_{12}$ و $\vec{F}_{21}$

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = U(\vec{r}_1{}', \vec{r}_2{}') = U(\vec{r}_1 + \vec{a}, \vec{r}_2 + \vec{a}) \qquad (3.3)$$

هذا هو التعبير الفيزيائي عن صمود قوانين الفيزياء بالنسبة للانسحابات.



الشكل.14

لنأخذ $\vec{a}$ مساوية لـ $-\vec{r}_1$ فيصبح الكمون المشترك

$$U(0, \vec{r}_2 - \vec{r}_1) = U(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

وهذا يعني أن التفاعل لا يتوقف إلا على الوضع النسبي للجسمين لا غير وهو أمر طبيعي.

ثم لنأخذ $\vec{a}$ مساوية لـ $-\vec{r}_2$ فيصبح الكمون المشترك

$$U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, 0) = U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

وهذا يعني أن التفاعل لا يتوقف إلا على طويلة المتجهة التي تعين الوضع النسبي للجسمين

$$U(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \quad (3.4)$$

نرى بسهولة أن مشتق الكمون بالنسبة لـ $\vec{r}_1$ يساوي ويعاكس مشتقة بالنسبة لـ $\vec{r}_2$ وهذا ما يعبر عنه مبدأ تساوي الفعل ورد الفعل؛ ويظهر لنا أن مبدأ نيوتن الثالث هو في الواقع <u>نتيجة</u> لمبدأ تجانس الفضاء :

$$U(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = U(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = U(x, y, z)$$

حيث سمينا $x = x_2 - x_1$ ؛ $y = y_2 - y_1$ ؛ $z = z_2 - z_1$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_2} = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_1} = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

وكذلك الأمر بالنسبة للمشتقين الآخرين.

لنعمم العلاقة (3.3) إلى حالة جملة معزولة مؤلفة من n جسيماً متفاعلاً. إن الطاقة الكامنة لهذه المجموعة هي

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots \vec{r}_n) = U(\vec{r}_1 + \vec{a}, \vec{r}_2 + \vec{a}, \dots, \vec{r}_n + \vec{a}) \quad (3.3)'$$

لنأخذ الآن المتجهة $\overline{O'O} = \vec{a}$ صغيرة ولننشر التابع $U(\vec{r}_1 + \vec{a}, \dots, \vec{r}_n + \vec{a})$ بجوار الوضع $(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$ لدينا

$$^{7}U(\vec{r}_1 + \vec{a}, \dots \vec{r}_n + \vec{a}) = U(\vec{r}_1, \dots \vec{r}_n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \cdot \vec{a}$$

$$= U(\vec{r}_1, \dots \vec{r}_n) + \vec{a} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}$$

وبأخذ العلاقة '(3.3) بعين الاعتبار نرى أن جداء المتجهة $\vec{a}$، وهي انسحاب صغير لا على التعيين بمجموع المتجهات $\sum_i \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}$ يساوي الصفر

أي أن

$$\sum_i \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} = 0$$

ولكن كل حد $\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}$ ليس سوى القوة المؤثرة على الجسيم i (مضروبة بناقص واحد) لدينا إذاً

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0 \quad (3.5)$$

---

[7] إن ما نفعله هو تعميم لـ $U(x+a) = U(x) + \frac{\partial U(x)}{\partial x} \cdot a$، حيث نهمل كل ما هو من الدرجة الثانية بـ a، إلى حالة $U(\vec{r} + \vec{a})$ وهذا يعني كتابة

$$U(x + a_x, y + a_y, z + a_z) = U(x,y,z) + \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} a_x + \frac{\partial U}{\partial y} a_y + \frac{\partial U}{\partial y} a_z$$

$$\equiv U(\vec{r}) + \overline{\nabla U} \cdot \vec{a} \equiv U(r) + \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{a}$$

ثم تعميم هذه العلاقة بمتجهة واحدة (ثلاث علاقات) إلى n متجهة (3n علاقة).

وهذا تعميم هام لمبدأ الفعل ورد الفعل : إن مجموع القوى المؤثرة على جملة جسيمات معزولة يساوي الصفر، وهو كمبدأ تساوي الفعل ورد الفعل نتيجة لمبدأ تجانس الفضاء. نكتب (3.5) بدليل مبدأ نيوتن الثاني :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{P}_i}{dt} = 0 \qquad (3.6)$$

حيث سمينا $\vec{P}_i$ العزم الخطي للجسم i وباستعمال خاصية خطية الاشتقاق

$$\frac{d}{dt}\sum_i \vec{P}_i = 0$$

أو

$$\sum_i \vec{P}_i = \vec{C} \qquad (3.7)$$

أي أن العزم الخطي الكلي لجملة معزولة منحفظ : وهكذا فعندما نقبل خاصة تجانس الفضاء فإننا نقبل في نفس الوقت انحفاظ العزم الخطي تماماً كما أدى قبولنا لتجانس الزمان إلى قبول انحفاظ الطاقة وإن لم نبرهن بعد على هذه الصلة.

2.3– مقرن مركز الكتلة :

مبرهنة 5 :

يسير مركز كتلة جملة معزولة بحركة مستقيمة منتظمة. لدينا من (3. 3.2) تعريفاً

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

حيث G مركز الكتلة

$$\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\overrightarrow{OA_i}}{dt}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

وحسب (3.7)

$$\vec{V}_G = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\vec{C}}{M} \qquad (3.8)$$

حيث M الكتلة الكلية للجملة.

يمكننا إذاً اختيار نظمة محاور غاليلية يكون مبدؤها مركز كتلة الجملة المعزولة ولذا يسمى مركز الكتلة بمركز العطالة أيضاً.

مبرهنة 6 :

عندما تكون الجملة غير معزولة فإن حركة مركز كتلتها هي حركة نقطة مادية، كتلتها تساوي الكتلة الكلية، تخضع لقوة تساوي مجموع القوى الخارجية :

إن حركة كل جسيم هي على الشكل

$$\frac{d\vec{P}_i}{dt} = \vec{F}_{i_{int}} + \vec{F}_{i_{ext}} \qquad (3.9)$$

حيث $\vec{F}_{i_{int}}$ هي مجموع القوى المؤثرة على الجسم i من قبل سائر الجسيمات الأخرى في الجملة ولذا سميناها قوى داخلية و $\vec{F}_{i_{ext}}$ هي مجموع القوى الخارجية، غير الجسيمات الأخرى، لدينا

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d\vec{P}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i_{int}} + \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i_{ext}}$$

إن الطرف الأيسر في هذه العلاقة هو حسب (3.8)

$$M\,\frac{d^2\overline{OG}}{dt^2}$$

أما الحد الأول من الطرف الأيمن فيساوي الصفر حسب (3.5). نسمي $\vec{F}_{ext} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i_{ext}}$ ونكتب إذاً

$$M\,\frac{d^2\overline{OG}}{dt^2} = M\,\vec{a}_G^{*} = \vec{F}_{ext} \qquad (3.10)$$

وهو المطلوب.

هذا يعني مثلاً أن مركز كتلة قذيفة انفجرت في الجو (المفرغ) بعد إطلاقها من مدفع سيتابع سيره على محرك على شكل قطع مكافئ، كما لو أن القذيفة لم تنفجر. هناك إذاً علاقة بين حركة مختلف شظايا القذيفة تحددها ضرورة بقاء مركز الكتلة على القطع المكافئ.

لنعد من جديد إلى الجملة المادية المعزولة : $\vec{V}_G = \overline{\text{ثابـــت}}$ و G نقطة مبدأ نظمة غاليلية. نسمي طاقة داخلية طاقة الجملة بالنسبة لمركز كتلتها. لدينا

مبرهنة 7 كونيغ (Koenig) :

إن الطاقة الكلية لجملة مادية معزولة ما تحددها العلاقة

$$E = E_{int} + \frac{M\left|\vec{V}_G\right|^2}{2} \qquad (3.11)$$

حيث E_{int} الطاقة الداخلية.

لتكن O نقطة مبدأ مقرن غاليلي S ولنأخذ G مبدأ مقرن غاليلي آخر 'S. يعين وضع الجسيم i في النقطة A_i بـ

$$\vec{r}_i = \overline{OA_i} = \overline{OG} + \overline{GA_i}$$

$$\vec{V}_i = \vec{V}_G + \frac{d\overline{GA}_i}{dt} = \vec{V}_G + \vec{V}_{i_r} \qquad (3.12)$$

و

حيث رمزنا بـ $\vec{V}_{i_r}$ لسرعة الجسيم بالنسبة للمقرن S'. إن (3.12) هو قانون تركيب السرع المعروف

$$|\vec{V}_i|^2 = |\vec{V}_G|^2 + |\vec{V}_{i_r}|^2 + 2\vec{V}_G \cdot \vec{V}_{i_r}$$

وهكذا فالطاقة الحركية الكلية

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i V_i^2 = \frac{1}{2}MV_G^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i V_{i_r}^2 + 2\vec{V}_G \cdot \sum_{i=1} m_i \cdot \vec{V}_{i_r}$$

إن $\sum m_i \vec{V}_{i_r} = \vec{P}'$ هو العزم الخطي الكلي بالنسبة للمقرن S'، وبما أن الطاقة الكامنة لا تتوقف على نقطة المبدأ، لا تتوقف إلا على المسافة النسبية بين النقاط، فإن الطاقة الكلية

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i V_i^2 + U = \frac{1}{2}MV_G^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i V_{i_r}^2 + U + 2\vec{V}_G \cdot \vec{P}' \qquad (3.13)$$

يكفي الآن أن نعود إلى تعريف مركز الكتلة ونكتبه على الشكل

$$\vec{0} = \frac{\sum_i m_i \cdot \overline{GA}_i}{M} \qquad \text{(O منطبقة على G)}$$

لنرى أن

$$\vec{P}' = \sum_i m_i \frac{d\overline{GA}_i}{dt} = \vec{0} \quad [8]$$

ونكون قد برهنا (3.11)

$$E = \frac{1}{2}MV_G^2 + E_{int}$$

حيث

$$E_{int} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i V_{i_r}^2 + U$$

هي الطاقة الكلية بالنسبة لمركز الكتلة.

3.3- اصطدام الجسيمات :

نستخلص من كل ما سبق أن $\sum_{i=1}^{n}\vec{P}_i = \vec{0}$ في مقرن مركز الكتلة و $\sum_{i=1}^{n}\vec{P}_i = \vec{C}$ في أي مقرن غاليلي آخر. نسمي هذا المقرن مقرن المختبر. لنطبق هاتين العلاقتين على جملة مؤلفة من جسيمين فقط كتلتهما m_1 و m_2 يصطدمان ببعضهما في لحظة معينة t. نرمز بـ P و V إلى القيم قبل الاصطدام و P' و V' إلى هذه القيم بعد الاصطدام.

لدينا في مقرن المختبر (ℓ) :

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_1' + \vec{P}_2' \qquad (3.14)$$

[8] وهذا ما نراه مباشرة أيضاً من (3.8) $\vec{V}_G$ تساوي الصفر بالنسبة لـ S' ومنه $\vec{P}' = \Sigma\vec{P}_i' = 0$.

وسرعة مركز الكتلة $\vec{V} = \vec{V}_G$ حسب (3.8)

$$\vec{V} = \frac{\vec{P}_1 + \vec{P}_2}{M} = \overline{\text{ثابتة}} \qquad (3.15)$$

ولدينا في مقرن مركز الكتلة (C)

$$\vec{P}_{1_c} + \vec{P}_{2_c} = \vec{P}'_{1_c} + \vec{P}'_{2_c} = 0 \qquad (3.15)'$$

نميز نوعين من الاصطدامات. الاصطدامات المرنة التي لا تبدد الطاقة الحركية للجسيمين المصطدمين

$$T_1 + T_2 = T'_1 + T'_2 \qquad (3.16)$$

وبالتالي لا تتغير طاقة التفاعل بين الجسيمين أو طاقتهما الداخلية. والاصطدامات غير المرنة التي يتبدد فيها جزء من الطاقة الحركية على شكل عمل يصرف لتشويه الجسيمين، فالجسيمان عندئذ ليسا مثاليين، ليسا قاسيين تماماً، ويظهر هذا العمل على شكل طاقة حرارية مثلاً أو على شكل طاقة تحريض عندما يصطدم إلكترون مثلاً بذرة فيحرضها مضيعاً جزءاً من طاقته الحركية. لدينا في هذه الحالة

$$T'_1 + T'_2 < T_1 + T_2 \qquad (3.17)$$

أ- لنبدأ بمثل بسيط هو اصطدام جسيم m_1 سرعته $\vec{V}_1$ بجسيم آخر m_2 ثابت، $\vec{V}_2 = 0$، والتصاقه به :

لدينا حسب (3.14)

$$m_1\vec{V}_1 = (m_1 + m_2)\vec{V}'$$

حيث سمينا $\vec{V}'$ السرعة المشتركة للجسيمين الملتصقين بعد الاصطدام، ومنه السرعة بعد الاصطدام

$$\vec{V}' = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{V}_1 \qquad (3.18)$$

ونسبة الطاقة الحركية بعد الاصطدام على الطاقة الحركية قبل الاصطدام

$$\frac{T'}{T} = \frac{(m_1 + m_2)V'^2}{m_1 V_1^2}$$

ومن العلاقة (3.18) :

$$\frac{T'}{T} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} < 1 \qquad (3.19)$$

فالاصطدام غير مرن إذاً و يظهر الفرق $\Delta T = T - T'$ على شكل تحريض داخلي للجملة المؤلفة من الجسيمين الملتصقين بعد الاصطدام : عندما يصطدم جسم ما، نيزك مثلاً، بسطح الأرض فإن الطاقة الحركية للجسم تتحول كلها إلى طاقة حرارية لأن $m_1 << m_2$ حيث m_1 كتلة النيزك و m_2 كتلة الأرض.

$$\frac{T'}{T} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} << 1$$ ؛ T' تساوي الصفر عملياً

أما سرعة مركز الكتلة الثابتة فهي

$$\vec{V} = \frac{m_1\vec{V}_1}{m_1 + m_2} \qquad (3.20)$$

هذا في مقرن المختبر أما في مقرن مركز الكتلة (C)، فلدينا حسب (3.12) $\vec{V}_{1c} = \vec{V}_1 - \vec{V}$ حيث $\vec{V}_C$ هي السرعة بالنسبة لمركز الكتلة $\vec{V}_{1c} = \vec{V}_{1r}$

$$\vec{V}_{2c} = \vec{0} - \vec{V}$$

$$\vec{P}_{1c} + \vec{P}_{2c} = m_1\left(\vec{V}_1 - \vec{V}\right) + m_2\left(\vec{0} - \vec{V}\right)$$

و

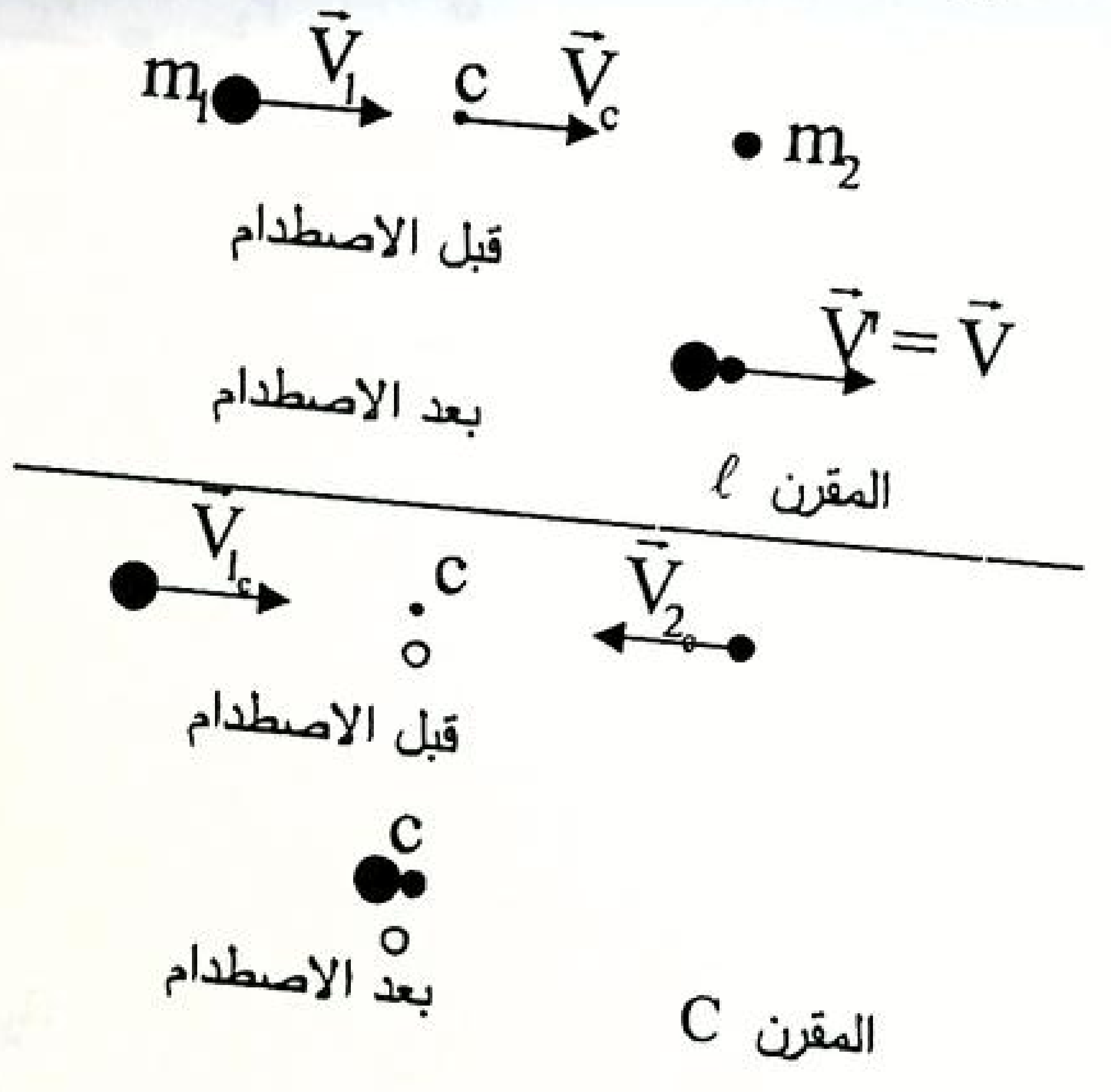
وبتبديل $\vec{V}$ بقيمتها في (3.20) نجد أن

$$\vec{P}_{1c} + \vec{P}_{2c} = m_1\vec{V}_1 - (m_1 + m_2)\vec{V} = m_1\vec{V}_1 - \frac{(m_1 + m_2)m_1\vec{V}_1}{m_1 + m_2} = \vec{0}$$

أما بعد الاصطدام فإن سرعة الجسيمين الملتصقين تساوي الصفر :

$$\vec{P}_{1c} + \vec{P}_{2c} = \vec{0} = \vec{P}'_{1c} + \vec{P}'_{2c} = (m_1 + m_2)\vec{V}'_{(1,2)c}$$

وهذا ما نراه بشكل مباشر لأن مركز الكتلة ينطبق على الجسيم الناتج نتيجة الالتصاق وسرعة مركز الكتلة في المقرن (C) يساوي الصفر طبعاً، الشكل.15.



الشكل.15

ب- الاصطدام المرن بين جسيمين. لنحسب عزمي الجسيمين في المقرن (C) انطلاقاً من (3.12) و(3.15) فنحصل على

$$\vec{V}_{1c} = \vec{V}_1 - \vec{V} = \vec{V}_1 - \frac{m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2\left(\vec{V}_1 - \vec{V}_2\right)}{m_1 + m_2} \qquad (3.21)$$

نسمي فرق السرعتين في المقرن (ℓ) بـ $\vec{v}$، $\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = \vec{v}$ وهي سرعة الجسيم الأول بالنسبة للجسيم الثاني ونطلق على المقدار التالي اسم الكتلة المختصرة.

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad (3.22)$$

يصبح

$$\vec{P}_{1_c} = m\vec{v} \qquad (3.23)_1$$

وبنفس الشكل نحسب $\vec{P}_{2_c}$

$$\vec{P}_{2_c} = -m\vec{v} \qquad (3.23)_2$$

أو نستنتجه مباشرة من $\vec{P}_{1_c} + \vec{P}_{2_c} = 0$.

لنكرر من جديد أن الاصطدام يبين، عندما ينظر إليه في المقرن C، أن الجسيمين يسيران بعزمين متساويين ومتعاكسين قبل الاصطدام $\vec{P}_{1_c} = -\vec{P}_{2_c}$ وبعده $\vec{P}'_{1_c} = -\vec{P}'_{2_c}$.

لنرمز بـ P_C لطويلة العزم قبل الاصطدام و P'_C بعد الاصطدام ولما كان الاصطدام مرناً فلدينا من (3.16) :

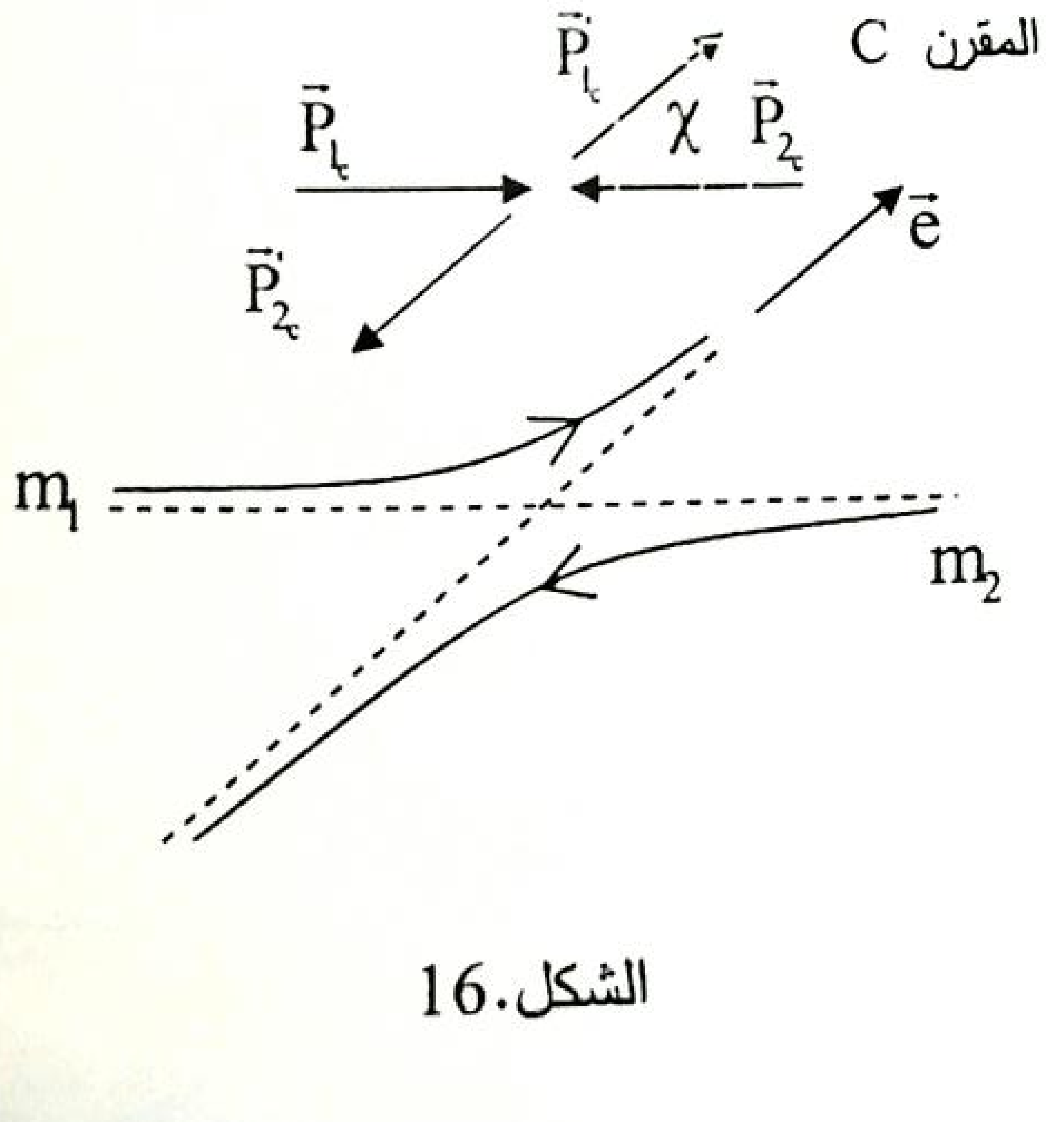
$$\frac{P_{1_c}^2}{2m_1} + \frac{P_{2_c}^2}{2m_2} = \frac{P_C^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{P_C^2}{2m}$$

$$\frac{P'^2_{1_c}}{2m_1} + \frac{P'^2_{2_c}}{2m_2} = \frac{P'^2_C}{2m}$$

و

$$P'^2_C = P_C^2 \qquad (3.24)$$

أي أن كل ما يفعله الاصطدام المرن هو تغيير اتجاه الجسيمين المتعاكسين في المقرن C، الشكل.16



الشكل.16

4.3- حساب الانعطاف في الاصطدام المرن :

نريد الآن القيام بحسابات جبرية لمعرفة مدى انحراف الجسيم 1 عن اتجاهه في المقرن العملي (ℓ) نتيجة الاصطدام. نسمي متجهة الواحدة في اتجاه الجسيمين في المقرن (C) بعد الاصطدام $\vec{e}$، الشكل.16. إن القيمة المطلقة لـ $\vec{P}'_{1_c}$ معطاة حسب (3.24) و (3.23) بـ mv . لدينا إذاً

$$\vec{P}_1' = mv\vec{e} + m_1\vec{V} \qquad (3.23)_1'$$

ومن (3.15)

$$mv\vec{e} + \frac{m_1\left(\vec{P}_1 + \vec{P}_2\right)}{m_1 + m_2}$$

وكذلك

$$\vec{P}_2' = -mv\vec{e} + \frac{m_2\left(\vec{P}_1 + \vec{P}_2\right)}{m_1 + m_2} \qquad (3.23)_2'$$

نمثل هندسياً هاتين العلاقتين بأن نرسم دائرة نصف قطرها mv ونعين عليها النقطة M حسب اتجاه $\vec{e}$ إن $\vec{P}_1$ و $\vec{P}_2$ يقعان على خط تفاعل الجسيمين في المقرن (ℓ) كما في المقرن (C). يكفي لإيضاح ذلك فرض m_2، الجسيم الهدف، ساكناً كما في الشكل.15. ليكن هذا الخط، القطر الأفقي للدائرة، كما في الشكل.16، الشكل.17. نعين على نصف القطر هذا النقطة A بحيث يكون

$$\overline{AO} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(\vec{P}_1 + \vec{P}_2\right)$$

والنقطة B بحيث يكون

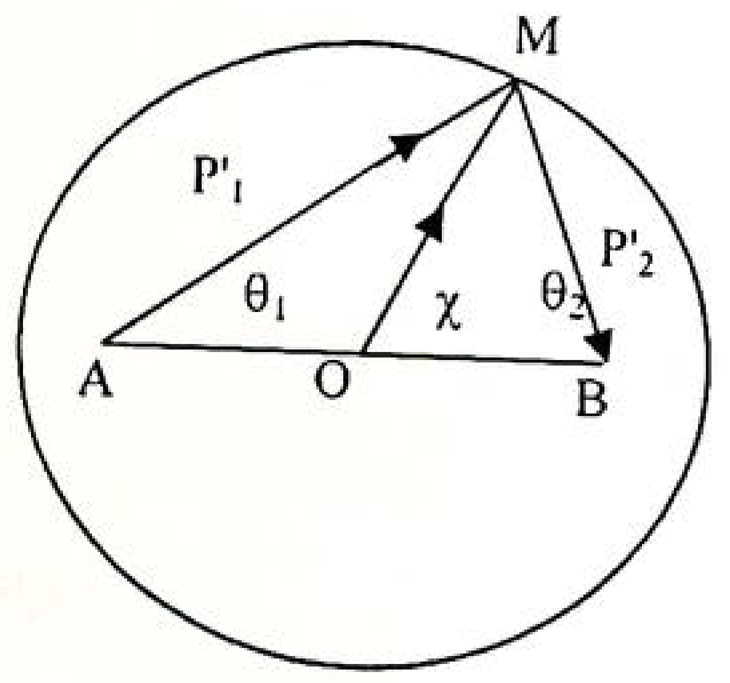
$$\overline{OB} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(\vec{P}_1 + \vec{P}_2\right)$$

نرى فوراً أن

$$\vec{P}_1' = \overline{AM}$$

و

$$\vec{P}_2' = \overline{MB}$$



الشكل.17

إن الزاوية χ هي انعطاف خط فعل الجسيمين في المقرن C، θ_1 انعطاف الجسيم الأول في المقرن ℓ و θ_2 انعطاف الجسيم الثاني في نفس المقرن. يمكن لـ χ أن تأخذ أي قيمة ويمكن حساب θ_1 و θ_2 بدليل الزاوية χ.

لننظر بشكل خاص إلى الحالة التي يكون فيها m_2 ساكناً قبل الاصطدام، مكررين أن هذا ما يحدث عملياً في مقرن المختبر : اصطدام جسيم مسرع مسبقاً بهدف ساكن. تصبح المتجهة $\overline{OB}$ على الشكل

$$tg\theta_1 = \frac{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} V_1 \sin\chi}{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} V_1 \left(\cos\chi + \frac{m_1}{m_2}\right)}$$

$$tg\theta_1 = \frac{\sin\chi}{\cos\chi + \frac{m_1}{m_2}} \qquad (3.25)'$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{2} \qquad (3.27)$$

نحسب السرعة V_1' بعد الاصطدام انطلاقاً من (3.26) مثلاً

$$V_1'^2 = \frac{P_1'^2}{m_1^2} = \frac{1}{m_1^2}\left(m^2v^2 + 2mvm_1 V\cos\chi + m_1^2 V^2\right)$$

$$= \frac{V_1^2}{m_1^2 (m_1 + m_2)^2}\left(m_1^2 m_2^2 + 2m_1 m_2 m_1^2 \cos\chi + m_1^4\right)$$

وبالتبديل

$$V_1' = \frac{V_1}{m_1 + m_2}\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos\chi} \qquad (3.28)$$

لدينا كذلك بإسقاط $_2'$(3.23) على المحورين المتعامدين

$$V_2'^2 = \frac{P_2'^2}{m_2^2} = \frac{V_1^2}{m_2^2 (m_1 + m_2)^2}\left(2m_1^2 m_2^2 - 2(m_1 m_2)^2 \cos\chi\right)$$

$$V_2' = \frac{2V_1 m_1}{m_1 + m_2} \sin \chi/2 \qquad (3.29)$$

يمكن الوصول مباشرة إلى هذه النتيجة بملاحظة أن P_2' يساوي $2mv\sin\chi/2$ في المثلث OMB، الشكل.18. نتحقق بسهولة أن الطاقة الحركية منحفظة في الاصطدام المرن (بأخذ مربع (3.28) و(3.29)).

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} = \frac{m_1 V_1'^2}{2} + \frac{m_2 V_2'^2}{2}$$

إن المجموع $\theta_1 + \theta_2$ هي الزاوية التي تفصل بين اتجاهي الجسيمين، في المقرن (ℓ) بعد الاصطدام

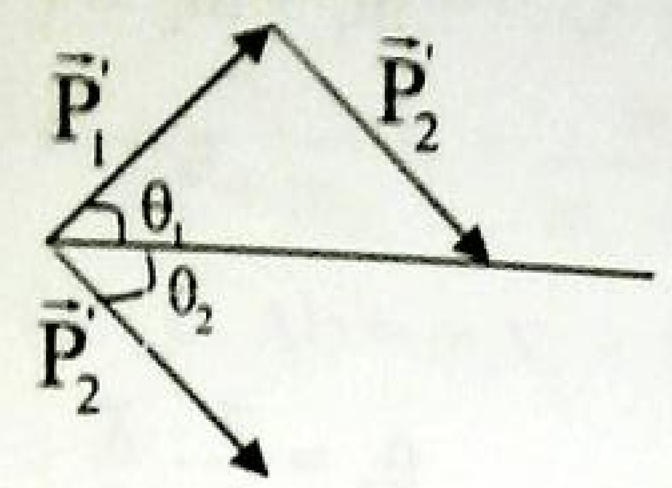
$\theta_1 + \theta_2 > \frac{\pi}{2}$ عندما تكون $m_1 < m_2$ ، الشكل.18a

$\theta_1 + \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ عندما تكون $m_1 > m_2$ ، الشكل.18b

و عندما يسير الجسيمان على خط واحد، في المقرن (ℓ) بعد الاصطدام أي عندما يكون $\vec{P}_1 = \vec{P}_1' + \vec{P}_2'$ فمعنى ذلك أن الجسيمين يسيران على نفس الخط الأفقي. تصبح النقطة M نظيرة النقطة B على القطر و $\chi = \pi$ ($\chi = 0$ تعني أن $P_2' = 0$)[9]. $\vec{P}_1'$ و $\vec{P}_2'$ متعاكسي الاتجاه في حالة الشكل (18.a) وفي اتجاه

[9] وهذا غير مقبول لأنه يعني أن الجسيم الوارد قد اخترق الجسيم الهدف دون تحريكه.

واحد في حالة الشكل.18b. تصبح السرع بعد الاصطدام في هذه الحالات حسب (3.28) و(3.29) حيث $\cos\chi = -1$ و $\sin\frac{\chi}{2} = 1$.



$$V_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_1 \quad (3.30)$$

$$V_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} V_1 \quad (3.31)$$

تأخذ V_2' في هذه الحالة قيمتها العظمى.

$$T'_{2_{max}} = \frac{m_2 V^2_{2_{max}}}{2} = \frac{4m_1 m_2 m_1}{2(m_1 + m_2)^2} V_1^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} T_1 \quad (3.32)$$

حيث T_1 هي الطاقة الحركية للجسيم الوارد.

لنحسب في النهاية الزاوية القصوى لانحراف الجسيم 1، الشكل.18b:

$$\sin\theta_{max} = \frac{\overline{OM}}{AO} = \frac{mv}{\frac{m_1^2 V_1}{m_1 + m_2}} = \frac{m_2}{m_1} \quad (3.33)$$

تصبح دراسة الاصطدام أكثر سهولة عندما تكون $m_1 = m_2$ و m_2 في حالة السكون كالسابق : $\overline{AO} = m\bar{v}$ وتقع النقطة A كالنقطة B على الدائرة، الشكل.19 :

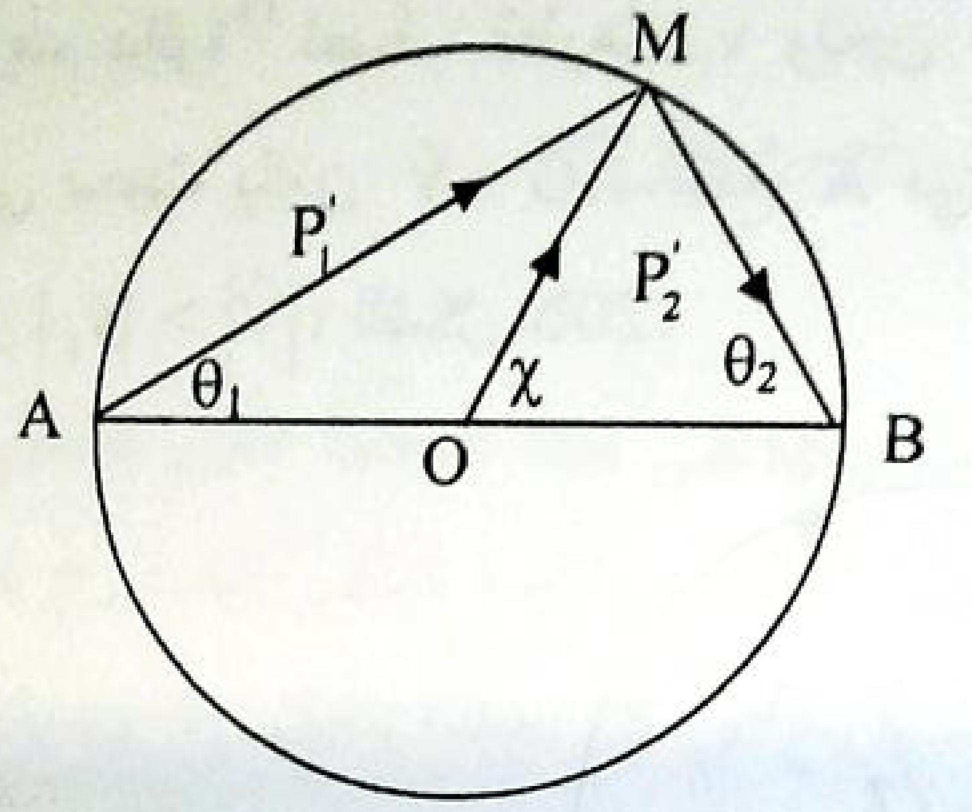
$$\theta_1 = \frac{\chi}{2}$$

$$\theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2} = \frac{\pi}{2} - \theta_1$$

ترينا العلاقتان (3.28) و (3.29) أن

$$V_1' = V_1 \cos\frac{\chi}{2}$$

$$V_2' = V_1 \sin\frac{\chi}{2}$$



الشكل.19

5.3– تفكك الجسيم إلى جسيمين[10] :

ندرس هذه الحالة في المقرن (C). إن طاقة الجسيم الأب هي طاقة داخلية صرفة تعريفاً. نكتب مبدأ انحفاظ الطاقة على الشكل

$$E_{int} = E_{1int} + \frac{P_C'^2}{2m_1} + E_{2int} + \frac{P_C'^2}{2m_2}$$

حيث

$$\vec{0} = \vec{P}'_{1C} + \vec{P}'_{2C} \quad \text{و} \quad P'_C = \left|P'_{1C}\right|$$

نسمي طاقة التفكك المقدار

$$\varepsilon = E_{int} - \left(E_{1int} + E_{2int}\right) = \frac{P_C'^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{P_C'^2}{2m}$$

ولندرس كما فعلنا في الرقم السابق العلاقة بين اتجاه سرعته v_C بالنسبة للاتجاه الأفقي – الاتجاه المشترك للجسيمين الناتجين – في المقرن C، ونسمي هذه الزاوية χ كما في الرقم السابق، واتجاه سرعته $\vec{v}$ بالنسبة لنفس الاتجاه الأول – اتجاه حركة مركز الكتلة – في المقرن ℓ ونسمي هذه الزاوية θ.

لتكن $\vec{V}$ سرعة الجسيم في المقرن ℓ ولنركز اهتمامنا على أحد الجسيمين الناتجين

$$\chi = \left(\widehat{\vec{v}_C, \vec{V}}\right) \qquad .\theta = (\widehat{\vec{v}, \vec{V}})$$

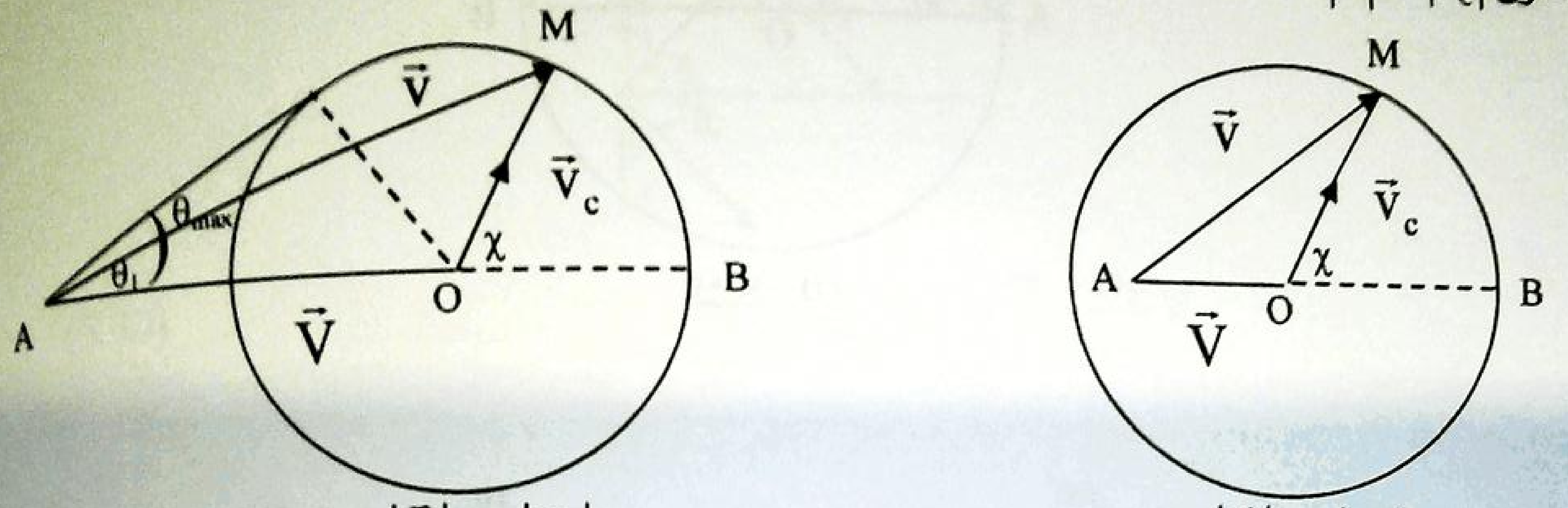
$$\vec{v}_C = \vec{v} - \vec{V}$$

$$\left|v_C\right|^2 = v_C^2 = v^2 + V^2 - 2vV\cos\theta$$

---

[10] نطلق عادة عبارة التفكك على الجسيمات السريعة جداً، النسبوية، آخذين بعين الاعتبار حينئذ تحول الكتلة إلى طاقة؛ نستعمل نفس التعبير في هذه الحالة التقليدية آخذين بعين الاعتبار تحول الطاقة الداخلية للجسيم المتفكك إلى طاقة حركية وطاقة داخلية في الجسيمين الناتجين كما هو عليه الأمر عند انفجار الجسيم وتفككه.

نمثل هذه العلاقة هندسياً بأن نرسم دائرة[11] نصف قطرها v_C ونعين النقطة M حسب اتجاه $\vec{v}_C$ كما نعين النقطة A على الخط الأفقي بحيث يكون $\overline{AO} = \vec{V}$. تقع A في داخل الدائرة أو خارجها حسبما تكون $|\vec{v}_C| > |\vec{V}|$، الشكل.20a، أو $|\vec{v}_C| < |\vec{V}|$، الشكل.20b،



b- $|\vec{V}| > |\vec{v}_c|$ a- $|\vec{V}| < |\vec{v}_c|$

الشكل.20

يمكن في الحالة الأولى للجسيم أن يبتعد بزاوية θ لا على التعيين، أما في الحالة الثانية فلا يمكن للجسيم إلا الاتجاه نحو الإمام بزاوية يتعين حدها الأقصى كما في (3.33) بالعلاقة

$$\sin\theta_{max} = \frac{v_C}{V} \qquad (3.34)$$

لدينا

$$tg\theta = \frac{v_C \sin\chi}{V + v_C \cos\chi}$$

تحدد لنا هذه المعادلة قيمة $\cos\chi$ وذلك بأن نربع طرفيها ونحل المعادلة من الدرجة الثانية بـ $\cos\chi$:

$$\left(V^2 + v_C^2\cos^2\chi + 2Vv_C\cos\chi\right)\sin^2\theta = v_C^2\left(1 - \cos^2\chi\right)\cos^2\theta$$

$$\cos\chi = -\frac{V}{v_C}\sin^2\theta \pm \cos\theta\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_C^2}\sin^2\theta} \qquad (3.35)$$

نختار الإشارة الموجبة أمام المميز عندما تكون $V < v_C$ حتى تقابل $\theta = 0$ $\chi = 0$ والمقابلة بين θ و χ مقابلة تباينية – واحد لواحد – كما يبينه الشكل.20a. أما من أجل $V > v_C$ فيقابل كل قيمة لـ θ قيمتان لـ χ : تلك التي تحددها النقطة M والأخرى التي تحددها النقطة B على الشكل.20b.

[11] نرسم في الواقع كرة نصف قطرها v_c والدائرة في الشكل 20 هي دائرة كبرى على هذه الكرة.

6.3- انحفاظ الاندفاع الخطي في الصواريخ :

تقوم حركة الطائرات النفاثة والصواريخ على مبدأ انحفاظ العزم الخطي : تخرج كمية من الغاز بسرعة كبيرة نسبياً $\vec{V}_o$ تصل طويلتها إلى 2500 متر/ثانية فيتلقى الصاروخ عزماً يدفعه في الاتجاه المعاكس لـ $\vec{V}_o$ ونحن نريد حساب سرعة الصاروخ في كل لحظة بدليل $\vec{V}_o$ وبدليل كتلة الغاز التي يفقدها. لتكن $\vec{V}$ هذه السرعة. إن سرعة الغاز بالنسبة لمقرن المخبر (ℓ) وهو الأرض في حالتنا هو

$$\vec{V} + \vec{V}_o$$

لنحسب العزم الخطي للجملة المؤلفة من الصاروخ والغاز في لحظتين متتاليتين t، $t + \Delta t$. هذا العزم في اللحظة t هو كتلة الصاروخ في هذه اللحظة $m(t)$ مضروبة بـ $\vec{V}$

$$\vec{P}(t) = m(t)\vec{V}$$

أما العزم في اللحظة التالية فهو مجموع عزمي الصاروخ والغاز؛ عزم الصاروخ هو

$$(m + \Delta m)\ (\vec{V} + \Delta\vec{V})$$

وعزم الغاز المنفلت خلال البرهة Δt هو

$$-\Delta m(\vec{V} + \vec{V}_o)$$

Δm هي في الواقع كمية سالبة ولكننا نهتم بحساب التزايدات (وإن تكن سالبة !)

انحفاظ العزم يعني إذاً أن

$$m\vec{V} = (m + \Delta m)\ (\vec{V} + \Delta\vec{V}) - \Delta m(\vec{V} + \vec{V}_o) \qquad (3.36)$$

نفرض أن الغاز ينفلت في الاتجاه المعاكس تماماً لحركة الصاروخ بحيث تصبح المعادلة السابقة معادلة ببعد واحد

$$mV = (m + \Delta m)\ (V + \Delta V) - \Delta m(V - V_o)$$

لنفرض أن تغير كلٍ من الكتلة m والسرعة V مع الزمن تغير خطي $\Delta t \sim \Delta m$، $\Delta t \sim \Delta V$ فالجداء $\Delta m\, \Delta V$ هو من الدرجة الثانية بـ Δt، نهمله بحيث يبقى

$$m\Delta V + \Delta m V_o = 0$$

ننتقل من التزايدات إلى التفاضل ونكتب

$$dV = -V_o \frac{dm}{m}$$

$$\int_{V_0}^{V} dV = -V_0 \int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m}$$

حيث V_0 هي السرعة البدائية للصاروخ و m_o كتلته البدائية

$$V - V_0 = -V_0(\lg m - \lg m_0)$$
$$= V_0 \lg \frac{m_0}{m}$$

لأن الصاروخ يفقد الغاز أثناء الانطلاق، والطرف الثاني موجب إذاً كما يقتضيه تسريع $m_0 > m$ الصاروخ. نستطيع حساب السرعة القصوى التي يصل إليها الصاروخ عند استهلاك كل الغاز. لتكن m_1 كتلة الصاروخ وحده فكتلة الغاز هي إذاً $M = m_0 - m_1 \cong \frac{9}{10} m_0$

$$V_{max} - V_0 = V_0 \lg \frac{m_0}{m_1} \cong V_0 \lg 10$$

يتوقف الأمر إذاً على سرعة الغاز الدافر V_0 وأحسن دافر من وجهة النظر هذه هو غاز الفوتونات $\bar{V}_0 = C$!

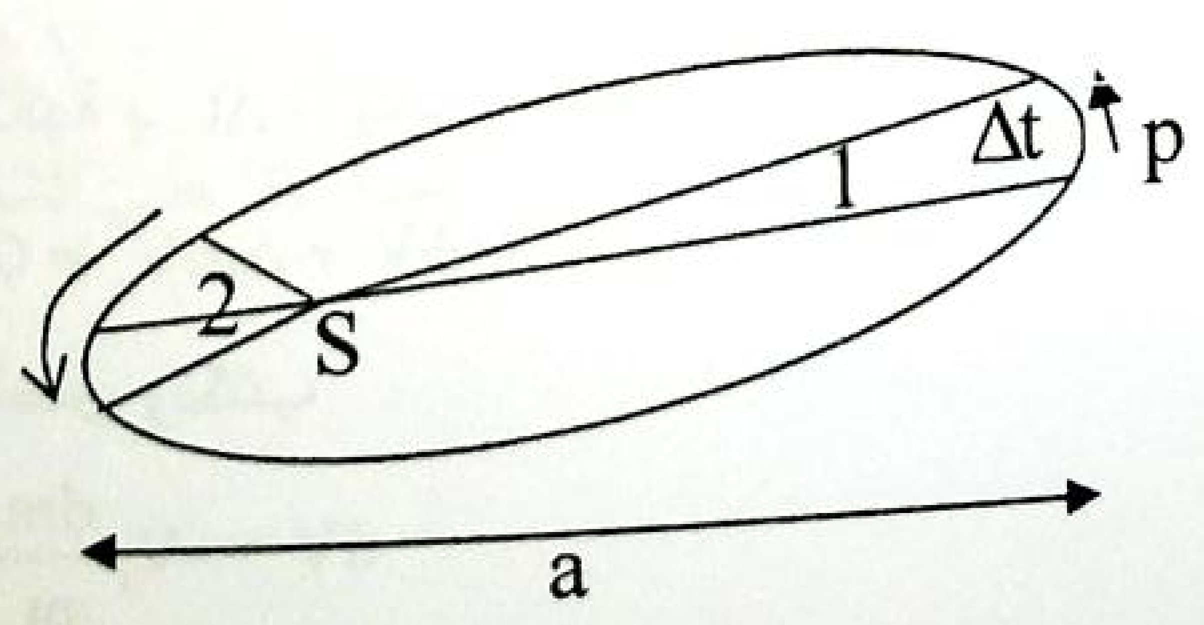
4. حقل التثاقل، القوة المركزية

1.4– قوانين كبلر Kepler وحقل الجاذبية :

استطاع كبلر معتمداً على الأرصاد التي قام بها الفلكي تيخو براهة Tycho Brahe استنتاج قوانين ثلاثة تخضع لها الكواكب في حركتها حول الشمس وهي:

1– إن محرك كل كوكب P من النظمة الشمسية قطع ناقص، تقع الشمس S في أحد محرقيه. والحركة دورية أي أن الزمن الذي يستغرقه الكوكب للقيام بدورة كاملة حول الشمس ثابت نرمز له بـ T ونسميه الدور.

2– تمسح الخطوط SP، الواصلة بين الشمس والكوكب، سطوحاً تتناسب مع الزمن اللازم لمسحها. أو بمعنى آخر تتغير سرعة حركة الكوكب حسب بعده عن الشمس فيتباطأ حين يكون بعيداً عنها ويتسارع حين يقترب منها، ماسحاً السطحين المتساويين 1 و 2 في نفس الزمن Δt، الشكل.21.



الشكل.21

3– يتناسب مربع الدور T مع مكعب نصف محور القطع الناقص الكبير a :

$$T \sim a^{\frac{3}{2}}$$

هذا وفي الوقت الذي استطاع كبلر فيه صياغة قوانينه الثلاثة كان غاليله يدرس قوانين الحركة ويتساءل عن السبب الذي يجعل الكواكب تدور حول الشمس ويكتشف مبدأ العطالة : وضع السكون أو الحركة المستقيمة المنتظمة عندما لا يخضع الجسم لأي مؤثر وهو المبدأ الذي يحتويه قانون نيوتن الثاني $\vec{F} = m\vec{a}$.

استند نيوتن على قوانين كبلر وعرف القوة التي تتجاذب وفقها كتلتا جزيئين (نقطتين) m_1 و m_2 متباعدين عن بعضهما المسافة r_{12} بالعلاقة

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12} \qquad (4.1)$$

إنها قوة متناسبة مع عكس مربع المسافة بين الكتلتين. وهي في اتجاه مضاد لـ $\vec{r}$ لأنها قوة جاذبة تدفع الكتلة m_2 في اتجاه m_1 إذا اعتبرنا وضع m_1 مبدأ قياس المتجهات مثلاً. ونعرف في هذه الحالة الحقل الذي تخلقه الكتلة m_1 في كل نقاط الفضاء بالعلاقة

$$\vec{C} = -G\frac{m_1}{r^3}\vec{r} \qquad (4.2)$$

ونسميه حقل الجاذبية أو حقل التثاقل.

إن قانون القوة (4.1) قادر على تفسير حركة الكواكب حول الشمس وعلى تعيين مداراتها؛ كما يفسر حادث المد والجزر الذي يقع مرتين كل يوم والذي ينتج عن جذب القمر للأرض إضافة إلى جذب الشمس لها. ويفسر لنا شكل الأرض الكروي الناتج عن جذب الكتل المكونة للأرض بعضها بعضاً. ويفسر لنا أيضاً حركات النجوم المزدوجة وحركات وتكوين المجموعات النجمية والمجرات. إنه قانون عام بكل ما في هذه الكلمة من معنى، يصح، بعد أن أدخلت النسبية العامة بعض التصحيحات عليه، على سبيل المثال، مهما تكن المسافات التي تفصلنا عن المجموعات النجمية، ملايين السنين الضوئية أو بضعة دقائق؛ تفصلنا عن الشمس 8 دقائق وثلث ضوئية فقط؛ كما يصح في أقصر المسافات.

رأينا (4 .1.4) أن الحقل المتناسب مع قوى r، r^n (سواء كانت n سالبة أو موجبة) هو حقل مشتق من كمون والطاقة الكامنة التي تشتق منها القوة $\vec{F}$ التي تؤثر وفقها الكتلة m_1 على الكتلة m_2 هي

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}} \qquad (4.3)$$

وهكذا فإن الطاقة الكلية لمجموعة من الكتل (النقاط) أو الجزيئات، ونرمز لعناصرها بالدليل $i = 1, 2 \ldots$ الخاضعة إلى قوى الجاذبية فيما بينها ثابتة (المبرهنة 2).

لنكتب هذه الطاقة على الشكل

$$E = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 + \sum_{i,j} -G\frac{m_i m_j}{r_{ij}} = T + U \qquad (4.4)$$

ولنتحقق من كونها ثابتة بأخذ مشتقها بالنسبة للزمن.

لدينا من أجل الحد الأول

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2\right) = \sum_i m_i \vec{v}_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i \vec{F} \cdot \vec{v}_i$$

إن القوة $\vec{F}_i$ التي يتأثر بها الجزيء i هي مجموع قوى الجذب التي تمارسها الجزيئات الأخرى j

$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i} -G\frac{m_i m_j \vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3}$$

ويصبح مشتق الطاقة الحركية هو

$$\frac{dT}{dt} = \sum_i \sum_{j \neq i} \left(-G\frac{m_i m_j \vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3}\vec{v}_i\right) \tag{4.5}$$

لنلاحظ أن مشتق طويلة متجهة $\vec{r}$، إحداثياتها (x, y, z) بالنسبة للزمن هو $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} r$ حيث $\vec{\nabla} r = \frac{\vec{r}}{r} = \begin{pmatrix} \partial r/\partial x \\ \partial r/\partial y \\ \partial r/\partial z \end{pmatrix}$ هو غراديان r ولذا فإن مشتق $|r_{ij}|$ ذات المركبات $(x_j - x_i)$، $(y_j - y_i)$ و $(z_j - z_i)$ بالنسبة للزمن هو

$$\frac{dr_{ij}}{dt} = \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}\left(\vec{v}_j - \vec{v}_i\right) = \frac{\vec{r}_{ij}\vec{v}_j + \vec{r}_{ji}\vec{v}_i}{r_{ij}}$$

ومشتق $\frac{1}{r_{ij}}$ هو $-\frac{1}{r_{ij}^2}\frac{dr_{ij}}{dt}$.

وهكذا فإن مشتق الطاقة الكامنة هو

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \sum_{\text{كل الأزواج}} G\frac{m_i m_j\left(\vec{r}_{ij}\vec{v}_j + \vec{r}_{ji}\vec{v}_i\right)}{r_{ij}^3} \\ &= \sum_{\text{كل الأزواج}} 2G\frac{m_i m_j \vec{r}_{ij} \cdot \vec{v}_i}{r_{ij}^3} \end{aligned} \tag{4.6}$$

حيث بدلنا في الحد الثاني من الطرف الأيمن التسمية بين i و j.

لنلاحظ أخيراً أن الجمع على كل الحدود i, j يعني الجمع على كل الـ i ثم الجمع على كل الـ j المختلفة عن i أي أن

$$\sum_{i,j} = \sum_i \sum_{i \neq j} = \sum_i \left(\sum_{j>i} + \sum_{j<i}\right) = \sum_{j,i} \tag{4.7}$$

بينما الجمع على الأزواج هو جمع على رقمين بغض النظر عن ترتيبهما : الرقمين (3 و 5) أو (5 و 3) هما نفس الزوج، أي أن

$$\sum_{\text{كل الأزواج}} = \sum_i \left(\sum_{j>i}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \tag{4.7)'$$

تبين لنا هذه الملاحظة أن المجموع (4.5) + (4.6) $\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt}$ يساوي الصفر والطاقة الكلية ثابتة.

2.4- الكمون الناتج عن كتلة كروية :

لنحسب في البداية الكمون الناتج عن سطح كرة نصف قطرها ρ وكثافة الكتلة على سطحها σ في نقطة M تبعد عن مركز الكرة O المسافة $OM = r$. لنأخذ على الكرة المقطع الحلقي M' ذي نصف القطر $\rho\sin\theta$ والعرض $\rho\Delta\theta$، الشكل.22. إن سطح هذا المقطع هي $2\pi\rho^2\sin\theta\Delta\theta$ وكتلته $\sigma\left(2\pi\rho^2\sin\theta\Delta\theta\right)$ وتبعد كل نقطة من نقاط قاعدة المقطع M' المسافة r_1 عن M، حيث r_1 مولد المخروط ذي القاعدة المحددة بنصف القطر $\rho\sin\theta$ والمحور OM. إن الكمون الناتج عن هذا المقطع الدائري هو

$$\Delta U = \frac{-G\left(2\pi\rho^2\sin\theta\Delta\theta\right)\sigma}{r_1} \tag{4.8}$$

نرى في المثلث OMM' أن

$$r_1^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\theta$$

و

$$2r_1\Delta r_1 = 2r\rho\sin\theta\Delta\theta \quad , \quad \frac{\Delta\theta}{r_1} = \frac{\Delta r_1}{r\rho\sin\theta}$$

وتصبح (4.8) على الشكل

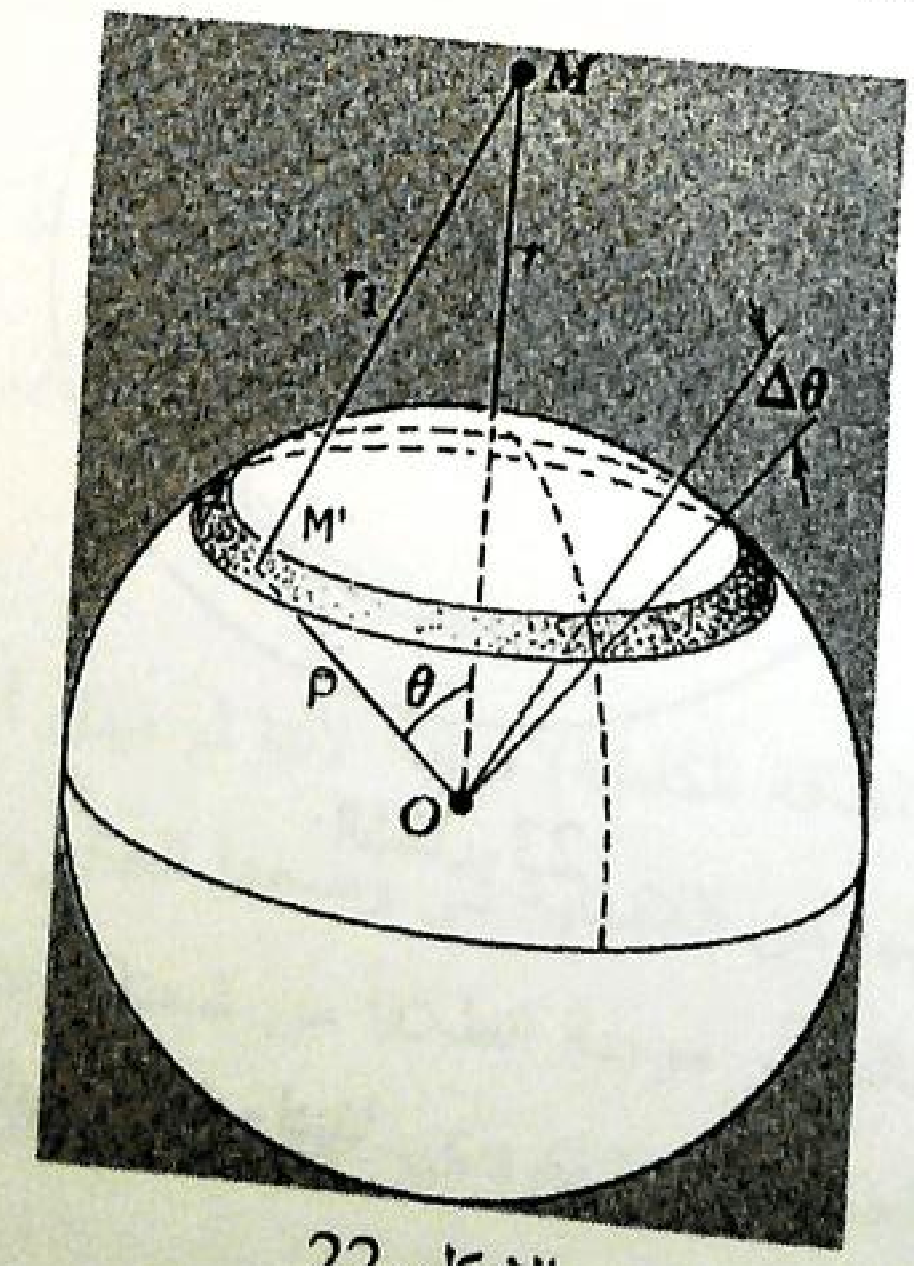
$$\Delta U = \frac{-G2\pi\rho\Delta r_1\sigma}{r}$$

ونحصل على الكمون الكلي بمكاملة هذه العلاقة على كل المقادير Δr_1، أي أن

$$U = \frac{-G2\pi\rho\sigma}{r}\int_{r-\rho}^{r+\rho} dr_1 = \frac{-G4\pi\rho^2\sigma}{r} \qquad r > \rho \tag{4.9}$$

إن $4\pi\rho^2$ هو سطح الكرة و $m = 4\pi\rho^2\sigma$ كتلتها الكلية. فالكمون الناتج عن سطح كرة كتلتها m في نقطة M تبعد عن مركزها المسافة r هو

$$U = \frac{-Gm}{r} \tag{4.10}$$



الشكل.22

قضية 1 :

إن الكمون الناتج عن سطح الكرة في نقطة ما تبعد المسافة r عن مركزها يساوي الكمون الناتج عن نقطة تجمعت فيها كل الكتلة هي مركز الكرة.

عندما تقع النقطة التي نحسب الكمون فيها داخل الكرة، على مسافة $r < \rho$ من المركز فإن حدي التكامل في (4.9) هما $\rho - r$ و $\rho + r$ والنتيجة هي

$$U = \frac{-G2\pi\rho\sigma}{r}\left[(\rho + r) - (\rho - r)\right] = -G\,4\pi\,\rho\sigma$$

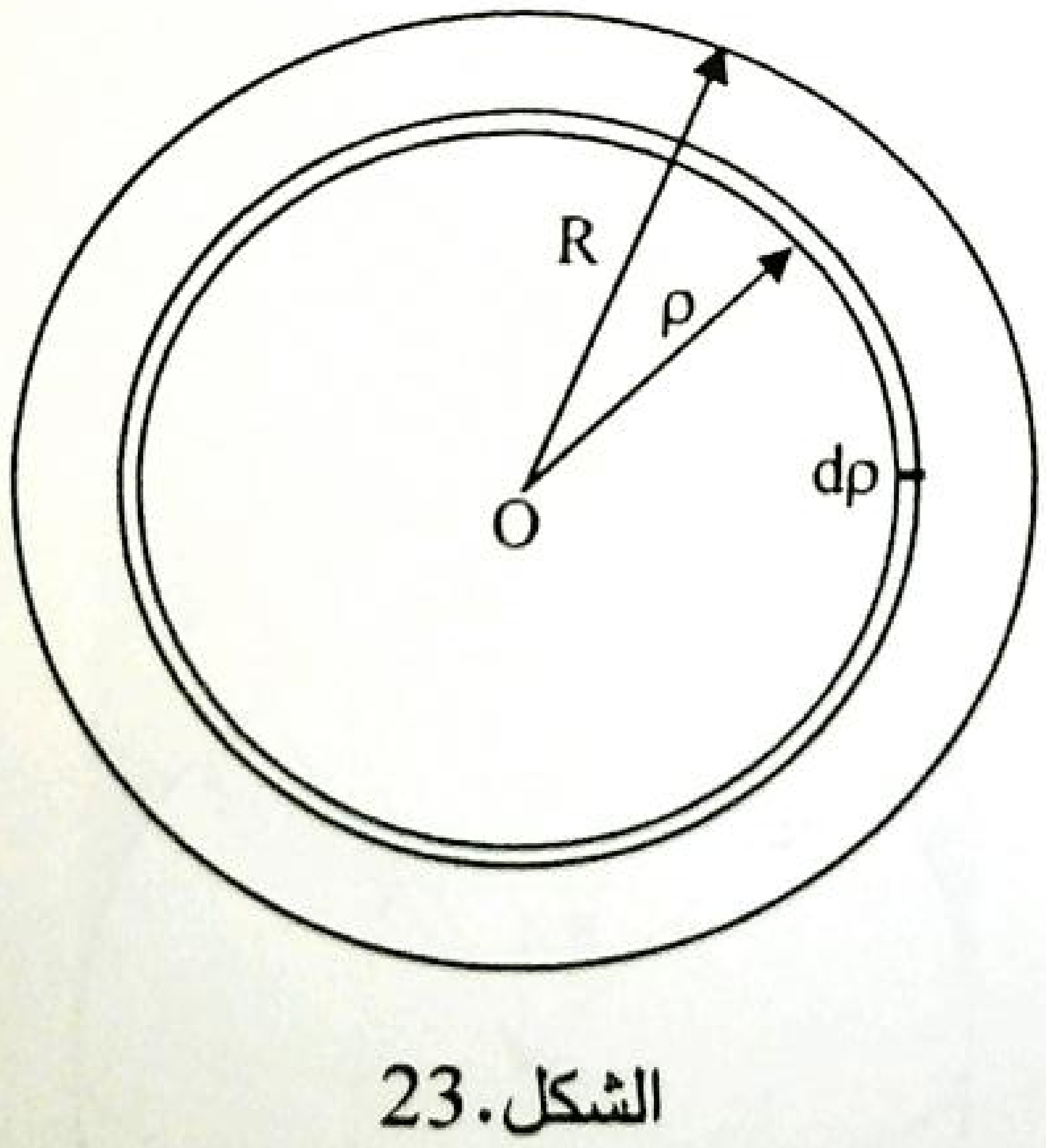
$$U = \frac{-Gm}{\rho} \qquad r < \rho \qquad (4.9)'$$

فالكمون ثابت في داخل الكرة وبالتالي فإن الحقل يساوي الصفر؛ أما في خارج الكرة فالحقل يساوي طبعاً $\frac{-Gm}{r^3}\vec{r}$.

لتكن لدينا الآن كرة ممتلئة نصف قطرها R ولتكن τ كثافة الكتلة الحجمية. إن الحجم المحصور بين كرتين قطراهما ρ و $\rho + d\rho$ هو $4\pi\rho^2 d\rho$ والكمون الناتج عنه في النقطة M هو حسب الطرف الأخير من (4.9) $\frac{-G4\pi\rho^2 d\rho\tau}{r}$. وهكذا فالكمون الكلي الناتج عن الكرة هو بأخذ تكامل هذا الكمون بين $\rho = 0$ و $\rho = R$، الشكل.23 فنحصل على

$$U = \frac{-G4\pi\tau}{r}\int_0^R \rho^2 d\rho = \frac{-G4\pi\rho^3\tau}{3r}$$

$$U = \frac{-G4\pi R^3\tau}{3r} \qquad (4.10)'$$



الشكل.23

حيث $M = \frac{4\pi R^3\tau}{3}$ هي الكتلة الكلية للكرة. ولدينا

قضية '1 :

إن الكمون الناتج عن كرة ممتلئة في نقطة ما تبعد مسافة r عن مركزها يساوي الكمون الناتج عن نقطة تجمعت فيها كل الكتل هي مركز الكرة.

إن النظر إلى تفاعل الكتل (أو الشحنات الكهربائية الخاضعة لحقل متناسب عكساً مع المسافة كحقل التثاقل) كروية الشكل وكأنها تفاعل نقاط هي مركز الكرات يبرر لنا التكلم عن الكتلة النقطية أو الشحنة النقطية الخ، أي كل ما فعلناه حتى الآن في ميكانيك النقاط المادية.

حساب طاقة التثاقل الذاتية :

نسمي طاقة ذاتية لجسم ما العمل المبذول لتجميع الجزيئات التي يتكون منها هذا الجسم في شكله الحالي. لنحسب الطاقة الذاتية لـ N جزيئاً نرقمها $1,2..N$ في حقل التثاقل الكوني. سنأخذ اللانهاية مبدأ لقياس الطاقة الكامنة $U_\infty = 0$ (أخذنا سطح الأرض مبدأ قياس الطاقة الكامنة في الفقرة 1 $U_{z=0} = 0$). إن الطاقة الكامنة لجزئيين i و j هي كما رأينا $U_{ij} = \frac{-Gm_i m_j}{r_{ij}}$ والطاقة الذاتية الكلية هي إذاً حسب (4.7)

$$\sum_{\substack{\text{كل الأزواج} \\ i \neq j}} \frac{-Gm_i m_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{-Gm_i m_j}{r_{ij}} \qquad (4.11)$$

كيف تصبح هذه الطاقة الذاتية عندما تكون الجزيئات متصلة ؟ لنأخذ حالة الكرة الممتلئة ذات القطر $2R$ ولنحسب الطاقة الكامنة بين كرة نصف قطرها ρ وغلاف يحيط بها سمكه $d\rho$. إن الكمون الناتج عن هذه الكرة في كل نقطة من نقاط الغلاف ذي الحجم $4\pi\rho^2 d\rho$ هي حسب '(4.10) $\frac{-G4\pi\rho^3\tau}{3\rho}$ وطاقة تفاعله مع الغلاف هي $4\pi\rho^2 d\rho\tau \times \frac{-G4\pi\rho^3\tau}{3\rho}$.

والطاقة الذاتية الكلية هي إذاً

$$U_{ذ} = -\int_0^R \frac{G4\pi\rho^3\tau}{3\rho} \times 4\pi\rho^2\tau d\rho = \frac{-G(4\pi)^2 R^5}{3\cdot 5}\cdot\tau^2 \qquad (4.12)$$

نكتب الطرف الأخير بدليل مربع الكتلة الكلية $(\frac{4\pi}{3}R^3\tau)^2$ فنحصل على

$$U_{ذ} = \frac{-3\,GM^2}{5\,R} \qquad (4.12)'$$

لا ننسى أن هذه الطاقة الذاتية (الطاقة الكامنة) سالبة لأننا لم نبذل أي عمل ضد قوى التثاقل الجاذبة لتجميع مكونات الجسم والمجيء بها من اللانهاية إلى وضعها الحالي. وعلى العكس من ذلك فإن تجميع كرة ممتلئة ذات شحنة ما e، سالبة أو موجبة انطلاقاً من شحنات بدائية يتطلب عملاً موجباً ضد قوى التفاعل الكهربائي الراكد النابذة والطاقة الذاتية لكرة كهربائية نصف قطرها R هي

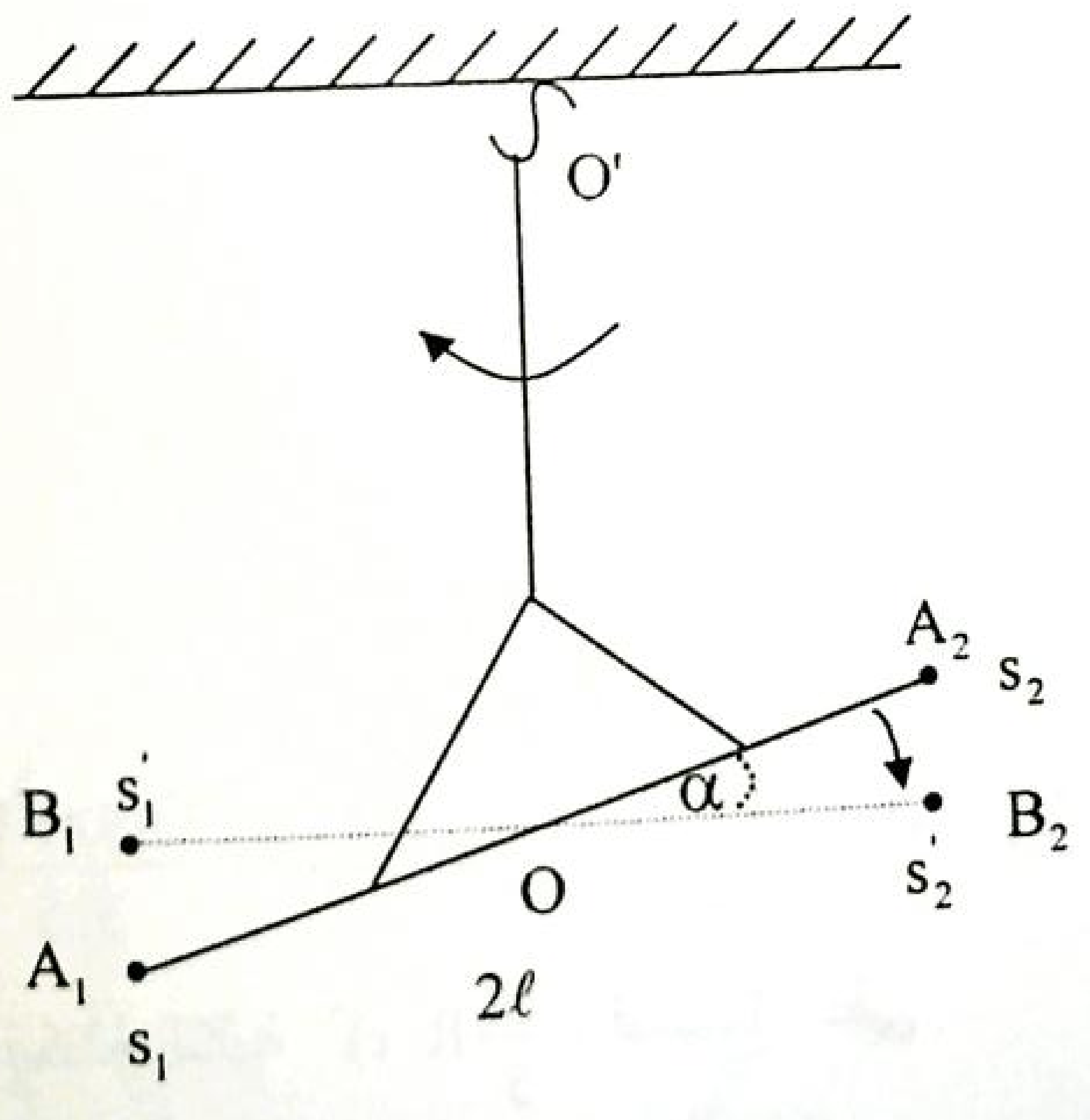
$$U_ذ = \frac{3}{5}\frac{e^2}{R}\frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \qquad (4.13)$$

حيث حلت $\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}$ ثابتة التفاعل الكهربائي الراكد محل G، ثابتة التثاقل

__تطبيق : وزن الأرض :__

قام كفنديش Cavendish بأول قياس للقوة الجاذبة عام 1798 بأن علق في طرفي ذراع طوله 2ℓ كرتين متماثلتين s_1 و s_2 كتلة كل منهما m وعلق الذراع من وسطه بواسطة خيط فتل إلى نقطة ثابتة O'. ليكن A_1OA_2 وضع التوازن، فإذا قربنا الآن من s_1 و s_2 كرتين متماثلتين أخرتين s'_1 و s'_2 كتلة كل منهما m' الأولى من يمين الذراع A_1OA_2 والأخرى من يساره، فإن التجاذب بين s_1 و s'_1 من جهة وبين s_2 و s'_2 من جهة أخرى يدفع الذراع إلى الدوران زاوية α حتى وضع التوازن الجديد B_1B_2 فإذا كانت مراكز الكرات الأربعة B_1B_2، الشكل.24 و A_1A_2 في مستو أفقي واحد والمسافتان B_1A_1 و B_2A_2 مساويتين لـ r فإن قوتي التجاذب $s_1 - s'_1$ و $s_2 - s'_2$ متساويتان بالقيمة المطلقة

$$F_1 = F_2 = G\frac{mm'}{r^2}$$



الشكل.24

إن شروط توازن هذه الجملة المؤلفة من أربع نقاط هو أن يكون مجموع العزوم المطبقة عليها مساوياً للصفر. يبرهن أن عزم الخيط يتناسب مع الزاوية α ونسمي مثل التناسب c بثابتة الفتل. يجب أن يساوي هذا العزم $c\alpha$ لعزم المزدوجة لدينا إذاً :

$$|c\alpha| = |2\vec{\ell}\vec{F}| = 2\ell\frac{Gmm'}{r^2}$$

تسمح لنا هذه العلاقة بقياس ثابتة الجاذبية الكونية G. أبعاد G هي :

$$[G] = [F][L]^2[M]^{-2} = [L]^3[T]^{-2}[M]^{-1}$$

وقد أعطت نتائج القياس

$$G = 6{,}670\ 10^{-11} N\cdot m^2/kg^2$$

أن معرفة G تسمح لنا حسب العلاقة $\frac{GmM}{r^2} = mg$ ، حيث m كتلة جسم قريب من سطح الأرض، بمعرفة كتلة (وزن) الأرض. لذا سميت تجربة كافينديش بوزن الأرض. كما أن هذه المعرفة تسمح بمقارنة قوة الجاذبية الكونية بين كتلتين مشحونتين كهربائياً (إلكترونين مثلاً) مع قوة النبذ الكهربائية لهاتين الشحنتين وقد وجد أن القوة الأولى ضعيفة جداً بالنسبة للثانية :

$$\frac{\text{قوة الجاذبية الكونية}}{\text{قوة النبذ الكهربائية}} = \frac{1}{4{,}17\cdot 10^{42}}$$

إن هذه النسبة هي إحدى ثوابت الطبيعية ولم يستطع أحد حتى الآن تفسير منشئها.

3.4– معادلات الحركة :

تعريف العزم الزاوي (الحركي) Angular momentum

نسمي عزماً زاوياً في O للنقطة المادية A_i، المعين وضعها بالمتجهة $\overline{OA_i} = \vec{r}_i$، عزم $\vec{P}_i$، اندفاعها الخطي، بالنسبة للنقطة O ونرمز له بـ $\vec{\ell}_i$:

$$\vec{\ell}_{i_o} = \vec{r}_i \times \vec{p}_i \qquad (4.14)$$

نسمي عزماً زاوياً كلياً لكل النقاط A_1، ...، A_n، المعينة أوضاعها بالمتجهات $\vec{r}_1 \dots \vec{r}_n$ واندفاعاتها الخطية $\vec{p}_1 \dots \vec{p}_n$ بـ شبه المتجهة

$$\vec{L}_o = \sum_{i=1}^{n} \vec{\ell}_{i_o} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{p}_i \qquad (4.15)$$

ولنحسب مشتق العزم الزاوي بالنسبة للزمن

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i + \sum_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

إن الحد الأول في الطرف الثاني يساوي الصفر والحد الثاني تعريفاً هو عزوم القوى $\vec{F}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt}$ في النقطة O ولدينا

قضية 2 :

إن مشتق العزم الزاوي الكلي لجملة مادية في نقطة ثابتة O يساوي العزم الحاصل في هذه النقطة لمجموعة القوى الخارجية المطبقة على هذه الجملة.

رمزنا لهذا العزم الحاصل بـ $\vec{\mathcal{M}}_o$

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_o \qquad (4.16)$$

لنلاحظ أن هذه العلاقة تعني أن مشتق كل مركبة من مركبات العزم الزاوي الثلاث, مشتق كل مسقط من مساقطها على أحد المحاور الثلاثة يساوي لمسقط عزم القوى الحاصل على نفس المحور

$$\vec{e}_x \frac{d\vec{L}_o}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{e}_x \cdot \vec{L}_o\right) = \frac{d}{dt}L_{o_x} = \vec{\mathcal{M}}_{o_x}$$

الخ

نسمي L_{o_x} العزم الزاوي الكلي بالنسبة للمحور Ox، ومشتقه يساوي العزم الحاصل بالنسبة لهذا المحور لمجموعة القوى المطبقة.

لنستعمل المتطابقة (4.7) للبرهان على انعدام العزم الكلي لقوى التفاعل بين مختلف جزيئات جسم ما. إن مجموع هذه القوى الداخلية يساوي الصفر حسب مبدأ نيوتن الثالث وسنرمز لها بـ $\vec{\mathcal{F}} = \sum_i \vec{F}_i = 0$

ونكتب القوة التي يتأثر بها الجزيء i $\vec{F}_i = \sum_{j\neq i} F_{ij}$. لدينا إذاً $\sum_i \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ij} = 0$.

إن عزم هذه القوى في نقطة ما O هو

$$\vec{\mathcal{M}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}$$

وحسب (4.7)

$$\sum_{ij} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i>j} + \sum_{i<j}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right) \times \vec{F}_{ij} = 0$$

لأن $\vec{F}_{ij}$ يوازي $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ تعريفاً. وهكذا فإن العزم الكلي للقوى الداخلية ذات الحصيلة 0 منعدم دوماً.

راينا (3.§6.1) أن العزم الحاصل للقوى المركزية، القوى التي تتلاقى خطوط أفعالها في النقطة O يساوي الصفر ومنه من أجل هذه القوى

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = 0 \quad \text{و} \quad \vec{L}_o = \text{ثابتـــة} \qquad (4.17)$$

وبالتالي فإن مركبات هذه المتجهة الشبيهة ثابتة بطبيعة الحال.

سنرى أن العزم الزاوي الكلي لجملة معزولة، مثله مثل الاندفاع الخطي الكلي والطاقة الكلية، يبقى ثابتاً، منحفظاً، مع الزمن.

لنحسب الآن العزم الزاوي بالنسبة لنقطة أخرى C، مركز الكتلة، انطلاقاً من علاقة التعريف (4.15)

$$\vec{p}_i = m_i \cdot \left(\vec{V}_c + \vec{V}_{r_c}\right) \quad ; \quad \vec{r}_i = \overline{OA}_i = \overline{OC} + \overline{CA}_i$$

حيث $\vec{V}_{r_c} = \frac{d\overline{CA}_i}{dt}$ هو السرعة بالنسبة لمركز الكتلة.

$$\vec{L}_o = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i m_i \left(\overline{OC} \times \left(\vec{V}_c + \vec{V}_{r_c}\right)\right) + \sum_i \left(m_i \overline{CA}_i\right) \times \vec{V}_c + \sum_i m_i \overline{CA}_i \times \vec{V}_{r_c}$$

إن الحد الأول في الطرف الثاني هو $\overline{OC} \times \vec{P}$ حيث $\vec{P}$ هو الاندفاع الخطي الكلي $\vec{P} = \sum_i \vec{m}_i \cdot \vec{p}_i$، والحد الأخير هو العزم الزاوي الكلي بالنسبة لمركز الكتلة. أما الحد الثاني فمعدوم حسب تعريف مركز الكتلة. أي أن

$$\vec{L}_o = \vec{L}_c + \overline{OC} \times \vec{P} \qquad (4.18)$$

لندرس الآن حركة جسمين متفاعلين بغض النظر عن شكل القوة المؤثرة للواحد منهما على الآخر. لتكن $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ المتجهتين اللتين تعينان وضع هذين الجسمين بالنسبة للمبدأ O. لنكتب المتجهة الفاصلة بينهما

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \qquad (4.19)$$

لدينا

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} - \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2}$$

ولكن

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{12} = -m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -\vec{F}_{21}$$

لتساوي الفعل ورد الفعل المعبر عن انحفاظ الاندفاع الخطي؛ $\vec{F}_{12}$ هي القوة المؤثرة على 1 من قبل 2

ومنه

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{12}$$

ولكن

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$$

ليس سوى مقلوب الكتلة المختصرة m التي عرفناها في (3.22). أي أن

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt} = \vec{F}_{12} \qquad (4.20)$$

وهكذا نعيد حركة هذين الجسمين إلى حركة جسم واحد.

لنذكر أن القوة $\vec{F}_{12}$ مشتقة من كمون U، وهو كما رأينا لا يتوقف إلا على المسافة بين 1 و 2، أي على $|\vec{r}|$ وحدها : $\vec{F}_{12} = -\vec{\nabla}U\left(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|\right)$؛ $\vec{F}_{12} = -\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r}$. إن القوة، أو الحقل، مركزية في هذه الحالة والعزم

الزاوي ثابت كما رأينا : $\vec{L}_o = \vec{r} \times \vec{p}$ ، حيث $\vec{p} = m\vec{r}'$. يعني هذا الثبات أن $\vec{r}$ عمودية دوماً على المتجهة الثابتة $\vec{L}_o$. أي أن الحركة حركة مستوية تقع في مستو عمودي على $\vec{L}_o$.

لنلاحظ أيضاً أن حركة مركز كتلة الجسمين المتفاعلين، C ، حركة مستقيمة منتظمة، وسرعتها هي $\vec{V}_c = \dfrac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{m_1 + m_2}$ نظراً لأن $(m_1 + m_2)\overline{OC} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2$ و $\dfrac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt} = 0$. يمكن أخذ جملة إحداثيات غاليلية مرتبطة بـ C أي اعتبار سرعة C بالنسبة لهذه الجملة مساوية للصفر.

ندرس الحركة المستوية (4.20) في جملة إحداثيات قطبية يتعين وضع النقطة المتحركة فيها بإعطاء المتجهة–الشعاع $\vec{r}$ والزاوية φ التي يصنعها مع اتجاه محدد في المستوى. نكتب $\vec{r}$ على الشكل $|r|\vec{e}_n$ حيث $\vec{e}_n$ المتجهة الواحدية للمتجهة الشعاع، ولتكن $\vec{e}_t$ المتجهة العمودية عليها في اتجاه الحركة. لدينا

$$\vec{r}' = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d|r|}{dt}\vec{e}_n + |r|\frac{d\vec{e}_n}{dt}$$

رأينا أن متجهة سرعة حركة دائرية (نصف قطرها ثابت) عمودية على نصف القطر، مماسة للدائرة تساوي ((2.(3.15) : $\dfrac{d\vec{e}_n}{dt} = |e_n|\omega\vec{e}_t$ ، ومنه

$$\vec{r}' = \frac{dr}{dt}\vec{e}_n + r\omega\vec{e}_t \qquad (4.21)$$

حيث كتبنا اختصاراً $|\vec{r}| = r$

$$\vec{r}'' = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{e}_n + 2\frac{dr}{dt}\omega\vec{e}_t + r\frac{d\omega}{dt}\vec{e}_t - r\omega^2\vec{e}_n$$

ذلك أن $\dfrac{d\vec{e}_t}{dt} = -\omega\vec{e}_n$

$$\vec{r}'' = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2\right)\vec{e}_n + \left(2\omega\frac{dr}{dt} + r\frac{d\omega}{dt}\right)\vec{e}_t \qquad (4.22)$$

إنها العلاقة التي رأيناها في ("2.(3.19). والشيء الوحيد الجديد هنا هو أن العزم الزاوي في O هو حسب (4.21)

$$\vec{L}_o = mr\vec{e}_n \times \left(\frac{dr}{dt}\vec{e}_n + r\omega\vec{e}_t\right) = mr^2\omega\vec{e}_n \times \vec{e}_t$$

إنه عمودي على مستوى الحركة بطبيعة الحال وطويلته $mr^2\omega$ ثابتة في الحالة التي تعنينا هنا ومشتق هذه الطويلة هو

$$r\left(2\omega\frac{dr}{dt} + r\frac{d\omega}{dt}\right) = 0$$

أي أن الحد الثاني في الطرف الثاني من (4.22) يساوي الصفر وبالتالي

$$\vec{r}'' = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2\right)\vec{e}_n \qquad (4.22)'$$

إن ثبات هذه الطويلة، ثبات العزم الزاوي تعبير عن قانون كبلر الثاني الذي جاء في مطلع هذه الفقرة: $\Delta\varphi \cong tg\Delta\varphi$ و $r\Delta\varphi$ العمودي على r هو ارتفاع المثلث ذي السطح $\Delta S = \frac{1}{2}r^2\Delta\varphi$ الذي تشكله المتجهتان الشعاعيتان المتجاورتان $\vec{r}$ و $\vec{r} + \Delta\vec{r}$ يساوي هذا السطح إذاً $\frac{1}{2}r^2\omega\Delta t$ أي أنه الثابتة $\frac{L_o}{2m}$ مضروبة بـ Δt :

$$\Delta S = \frac{L_o}{2m}\Delta t \qquad (4.23)$$

ويتناسب بالتالي مع الزمن اللازم لمسحه كما ينص على ذلك قانون كبلر الثاني. نرى من '(4.22) و(4.20) حيث $\vec{F}_{21} = -\frac{m_1 m_2}{r_2}\vec{e}_n$ أن معادلة الحركة بـ r هي

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{-Gm_1m_2}{r^2} + mr\omega^2 \qquad (4.24)$$

إن كلا من r و ω متغيران مع الزمن ولذا فمن الأفضل كتابة المقدار $r\omega^2$ بدليل r والمقدار الثابت $|L_o|$: $\omega^2 = \frac{L_o^2}{m^2r^4}$ وكتابة (4.24) على الشكل

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{-Gm_1m_2}{r^2} + \frac{L_o^2}{mr^3} \qquad (4.24)'$$

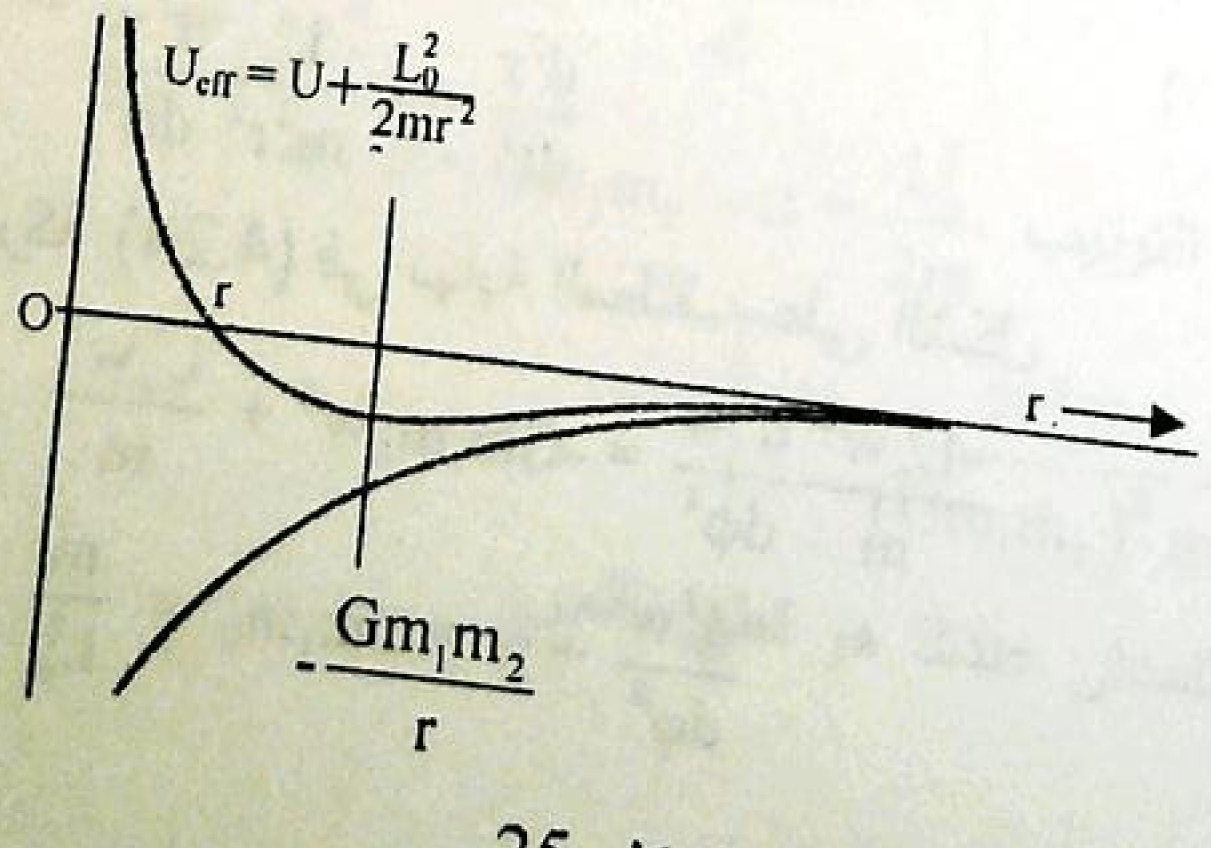
4.4- الكمون الفعال :

لنلاحظ أنه يمكن كتابة هذه المعادلة على الشكل $m\frac{d^2r}{dt^2} = F = -\frac{\partial U}{\partial r}$ ، حيث F مشتقة من كمون، نسميه الكمون الفعال هو

$$U_{eff} = \frac{-Gm_1m_2}{r} + \frac{L_o^2}{2mr^2} \qquad (4.24)''$$

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{\partial U_{eff}}{\partial r}$$

لنرسم تحولات $U_{eff}(r)$ بدليل r ، الشكل.25، يغلب فيه الحد الموجب إلى أن يبلغ الصفر من أجل $r_1 = \frac{L_o^2}{2mGm_1m_2}$ ، ثم يغلب الحد السالب وتتحول القوة من نابذة إلى جاذبة.



الشكل.25

يبلغ الكمون الفعال حده الأدنى من أجل $r = \frac{L_o^2}{mGm_1m_2}$ وهو $-\frac{1}{2}\frac{m(Gm_1m_2)^2}{L_o^2}$ أي نصف الطاقة الكامنة الحقيقية $\frac{-Gm_1m_2}{r}$ في هذه النقطة.

ليس حل المعادلة (4.24)، بالغة الأهمية في الميكانيك السماوي، بالأمر السهل، لأنها ليست معادلة تفاضلية خطية. ولذا لا بد من طريقة خاصة لحلها بأخذ متغير جديد بدلاً عن r، هو $\frac{1}{r}$ والنظر إليه كتابع لـ φ أي بحذف الزمن بين r و φ التابعين كليهما للزمن. لنرمز لهذا التابع بـ w $w = \frac{1}{r(\varphi)}$ ولنشتقه مرتين

$$\frac{dw}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} \tag{4.25}$$

$$\frac{d^2w}{d\varphi^2} = -\frac{1}{r^2}\frac{d^2r}{d\varphi^2} + \frac{2}{r^3}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \tag{4.25'}$$

ونحصل على $\frac{dr}{d\varphi}$ و $\frac{d^2r}{d\varphi^2}$ باشتقاق r مرتين بالنسبة للزمن

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\omega = \frac{dr}{d\varphi}\frac{L_o}{mr^2} \;;\; \frac{dr}{d\varphi} = \frac{r'mr^2}{L_o} \tag{4.26}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r}{d\varphi^2}\omega^2 + \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2r}{d\varphi^2}\omega^2 + \frac{dr}{d\varphi}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{L_o}{m}$$

$$= \frac{d^2r}{d\varphi^2}\left(\frac{L_o}{mr^2}\right)^2 - \frac{2}{r^3}\frac{L_0}{m}\frac{dr}{d\varphi}\frac{dr}{dt}$$

وبتبديل $\frac{dr}{dt}$ بقيمتها في (4.26)

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r}{d\varphi^2}\left(\frac{L_o}{mr^2}\right)^2 - \frac{2}{r^3}\frac{L_o^2}{m^2r^2}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \tag{4.26'}$$

وبالمقارنة مع '(4.25) نرى أن

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{L_o^2}{m^2r^2}\frac{d^2w}{d\varphi^2} \tag{4.27}$$

بحيث تصبح معادلة الحركة (4.24) في نهاية المطاف على الشكل

$$\frac{-L_o^2w^2}{m}\frac{d^2w}{d\varphi^2} = -Gm_1m_2w^2 + \frac{L_o^2w^3}{m}$$

أو

$$\frac{d^2w}{d\varphi^2} + w = Gm_1m_2 \times \frac{m}{L_o^2} \tag{4.24''}$$

يبلغ الكمون الفعال حده الأدنى من أجل $r = \frac{L_o^2}{mGm_1m_2}$ وهو $-\frac{1}{2}\frac{m(Gm_1m_2)^2}{L_o^2}$ أي نصف الطاقة الكامنة الحقيقية $\frac{-Gm_1m_2}{r}$ في هذه النقطة.

ليس حل المعادلة (4.24)، بالغة الأهمية في الميكانيك السماوي، بالأمر السهل، لأنها ليست معادلة تفاضلية خطية. ولذا لا بد من طريقة خاصة لحلها بأخذ متغير جديد بدلاً عن r، هو $\frac{1}{r}$ والنظر إليه كتابع لـ φ أي بحذف الزمن بين r و φ التابعين كليهما للزمن. لنرمز لهذا التابع بـ w $w = \frac{1}{r(\varphi)}$ ولنشتقه مرتين

$$\frac{dw}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} \tag{4.25}$$

$$\frac{d^2w}{d\varphi^2} = -\frac{1}{r^2}\frac{d^2r}{d\varphi^2} + \frac{2}{r^3}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \tag{4.25'}$$

ونحصل على $\frac{dr}{d\varphi}$ و $\frac{d^2r}{d\varphi^2}$ باشتقاق r مرتين بالنسبة للزمن

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\omega = \frac{dr}{d\varphi}\frac{L_o}{mr^2} \;;\; \frac{dr}{d\varphi} = \frac{r'mr^2}{L_o} \tag{4.26}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r}{d\varphi^2}\omega^2 + \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2r}{d\varphi^2}\omega^2 + \frac{dr}{d\varphi}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{L_o}{m}$$

$$= \frac{d^2r}{d\varphi^2}\left(\frac{L_o}{mr^2}\right)^2 - \frac{2}{r^3}\frac{L_o}{m}\frac{dr}{d\varphi}\frac{dr}{dt}$$

وبتبديل $\frac{dr}{dt}$ بقيمتها في (4.26)

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r}{d\varphi^2}\left(\frac{L_o}{mr^2}\right)^2 - \frac{2}{r^3}\frac{L_o^2}{m^2r^2}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \tag{4.26'}$$

وبالمقارنة مع '(4.25) نرى أن

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{L_o^2}{m^2r^2}\frac{d^2w}{d\varphi^2} \tag{4.27}$$

بحيث تصبح معادلة الحركة (4.24) في نهاية المطاف على الشكل

$$\frac{-L_o^2w^2}{m}\frac{d^2w}{d\varphi^2} = -Gm_1m_2w^2 + \frac{L_o^2w^3}{m}$$

أو

$$\frac{d^2w}{d\varphi^2} + w = Gm_1m_2 \times \frac{m}{L_o^2} \tag{4.24''}$$

يبلغ الكمون الفعال حده الأدنى من أجل $r = \frac{L_o^2}{mGm_1m_2}$ وهو $-\frac{1}{2}\frac{m(Gm_1m_2)^2}{L_o^2}$ أي نصف الطاقة الكامنة الحقيقية $\frac{-Gm_1m_2}{r}$ في هذه النقطة.

ليس حل المعادلة (4.24)، بالغة الأهمية في الميكانيك السماوي، بالأمر السهل، لأنها ليست معادلة تفاضلية خطية. ولذا لا بد من طريقة خاصة لحلها بأخذ متغير جديد بدلاً عن r، هو $\frac{1}{r}$ والنظر إليه كتابع لـ φ أي بحذف الزمن بين r و φ التابعين كليهما للزمن. لنرمز لهذا التابع بـ w $w = \frac{1}{r(\varphi)}$ ولنشتقه مرتين

$$\frac{dw}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} \tag{4.25}$$

$$\frac{d^2w}{d\varphi^2} = -\frac{1}{r^2}\frac{d^2r}{d\varphi^2} + \frac{2}{r^3}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \tag{4.25'}$$

ونحصل على $\frac{dr}{d\varphi}$ و $\frac{d^2r}{d\varphi^2}$ باشتقاق r مرتين بالنسبة للزمن

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\omega = \frac{dr}{d\varphi}\frac{L_o}{mr^2} \ ; \ \frac{dr}{d\varphi} = \frac{r'mr^2}{L_o} \tag{4.26}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r}{d\varphi^2}\omega^2 + \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2r}{d\varphi^2}\omega^2 + \frac{dr}{d\varphi}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{L_o}{m}$$

$$= \frac{d^2r}{d\varphi^2}\left(\frac{L_o}{mr^2}\right)^2 - \frac{2}{r^3}\frac{L_o}{m}\frac{dr}{d\varphi}\frac{dr}{dt}$$

وبتبديل $\frac{dr}{dt}$ بقيمتها في (4.26)

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r}{d\varphi^2}\left(\frac{L_o}{mr^2}\right)^2 - \frac{2}{r^3}\frac{L_o^2}{m^2r^2}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \tag{4.26'}$$

وبالمقارنة مع '(4.25) نرى أن

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{L_o^2}{m^2r^2}\frac{d^2w}{d\varphi^2} \tag{4.27}$$

بحيث تصبح معادلة الحركة (4.24) في نهاية المطاف على الشكل

$$\frac{-L_o^2w^2}{m}\frac{d^2w}{d\varphi^2} = -Gm_1m_2w^2 + \frac{L_o^2w^3}{m}$$

أو

$$\frac{d^2w}{d\varphi^2} + w = Gm_1m_2 \times \frac{m}{L_o^2} \tag{4.24''}$$

يبلغ الكمون الفعال حده الأدنى من أجل $r = \frac{L_o^2}{mGm_1m_2}$ وهو $-\frac{1}{2}\frac{m(Gm_1m_2)^2}{L_o^2}$ أي نصف الطاقة الكامنة الحقيقية $\frac{-Gm_1m_2}{r}$ في هذه النقطة.

ليس حل المعادلة (4.24)، بالغة الأهمية في الميكانيك السماوي، بالأمر السهل، لأنها ليست معادلة تفاضلية خطية. ولذا لا بد من طريقة خاصة لحلها بأخذ متغير جديد بدلاً عن r، هو $\frac{1}{r}$ والنظر إليه كتابع لـ φ أي بحذف الزمن بين r و φ التابعين كليهما للزمن. لنرمز لهذا التابع بـ w $w = \frac{1}{r(\varphi)}$ ولنشتقه مرتين

$$\frac{dw}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} \tag{4.25}$$

$$\frac{d^2w}{d\varphi^2} = -\frac{1}{r^2}\frac{d^2r}{d\varphi^2} + \frac{2}{r^3}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \tag{4.25'}$$

ونحصل على $\frac{dr}{d\varphi}$ و $\frac{d^2r}{d\varphi^2}$ باشتقاق r مرتين بالنسبة للزمن

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\omega = \frac{dr}{d\varphi}\frac{L_o}{mr^2} \;;\; \frac{dr}{d\varphi} = \frac{r'mr^2}{L_o} \tag{4.26}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r}{d\varphi^2}\omega^2 + \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2r}{d\varphi^2}\omega^2 + \frac{dr}{d\varphi}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{L_o}{m}$$

$$= \frac{d^2r}{d\varphi^2}\left(\frac{L_o}{mr^2}\right)^2 - \frac{2}{r^3}\frac{L_o}{m}\frac{dr}{d\varphi}\frac{dr}{dt}$$

وبتبديل $\frac{dr}{dt}$ بقيمتها في (4.26)

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r}{d\varphi^2}\left(\frac{L_o}{mr^2}\right)^2 - \frac{2}{r^3}\frac{L_o^2}{m^2r^2}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \tag{4.26'}$$

وبالمقارنة مع '(4.25) نرى أن

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{L_o^2}{m^2r^2}\frac{d^2w}{d\varphi^2} \tag{4.27}$$

بحيث تصبح معادلة الحركة (4.24) في نهاية المطاف على الشكل

$$\frac{-L_o^2w^2}{m}\frac{d^2w}{d\varphi^2} = -Gm_1m_2w^2 + \frac{L_o^2w^3}{m}$$

أو

$$\frac{d^2w}{d\varphi^2} + w = Gm_1m_2 \times \frac{m}{L_o^2} \tag{4.24''}$$

وهي معادلة هزاز توافقي مع طرف ثان ثابت، رأينا حلها الجيبي بدون طرف ثان في "(2.8) والحل العام مع هذا الطرف الثاني الثابت ولنسمه $B = \frac{Gm_1m_2m}{L_o^2}$

$$w = A\cos\varphi + B$$

$$r = \frac{1}{w} = \frac{B^{-1}}{1 + \frac{A}{B}\cos\varphi} \qquad (4.28)$$

إنها من الشكل $r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$ [12] فهي معادلة قطع مخروطي، ناقص أو زائد أو مكافئ، بالإحداثيات القطبية حيث أخذت البؤرة (أو أحدى البؤرتين) كمبدأ. وهي في الحركة التي ندرسها النقطة m_2. تحدد الشروط البدائية المقدار A وبالتالي التباعد المركزي للقطع $e = \frac{A}{B}$. وهو كما نعلم أكبر من الواحد في القطوع الزائدة وأصغر من الواحد في القطوع الناقصة ومساوياً للواحد في القطوع المكافئة وللصفر في الدائرة. لكننا لا نتوفر هنا على شروط بدائية ولذا سنرجع إلى الطاقة الثابتة لتعيين التباعد المركزي. هذه الطاقة الثابتة هي حسب (4.21)

$$E = T + U = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\bar{e}_n + r\omega\bar{e}_t\right)^2 - \frac{Gm_1m_2}{r} \qquad (4.29)$$

وتأخذ شكلاً بسيطاً عندما يكون r أصغرياً أو أعظمياً $\frac{dr}{dt} = 0$ (لا يبقى إلا المركبة $\bar{e}_t$ العمودية على المدار) لدينا عندما نكتب الطاقة الحركية بدليل L_o : $T = \frac{L_o^2}{2m}\frac{1}{r^2}$

$$E = \left(\frac{L_0^2}{2m}\frac{1}{r^2} - \frac{Gm_1m_2}{r}\right)_{max} = \left(\frac{L_0^2}{2m}\frac{1}{r^2} - \frac{Gm_1m_2}{r}\right)_{min} = U_{eff} \qquad (4.30)$$

أي أن r_{max} و r_{min} هما حلا معادلة من الدرجة الثانية من الشكل $Er^2 + \beta r - \alpha = 0$. فمجموع الحلين هو $-\frac{\beta}{E}$ والفرق بينهما هو $\frac{\sqrt{\beta^2 + 4\alpha E}}{E}$، إلا أن $r_{min} = a - c$ تعريفاً حيث a نصف قطر القطع و c بعد البؤرة عن مركزه و $r_{max} = a + c$ ومنه التباعد المركزي

$$\frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}} = \frac{c}{a} = e = \frac{\sqrt{\beta^2 + 4\alpha E}}{-\beta} = \left(1 + \frac{4\alpha E}{\beta^2}\right)^{1/2}$$

وتبديل α و β بقيمتيهما على الترتيب $\alpha = \frac{L_o^2}{2m}$ ، $\beta = Gm_1m_2$ نجد :

$$e = \left[1 + \frac{2L_o^2E}{(Gm_1m_2)^2 m}\right]^{1/2} \qquad (4.31)$$

إن $e < 1$ إذا كانت $E < 0$ والمدار عندئذ هو قطع ناقص

---

[12] وضعنا في آخر هذا الفصل ملحقاً نوجز فيه للتذكير خواص القطوع المخروطية.

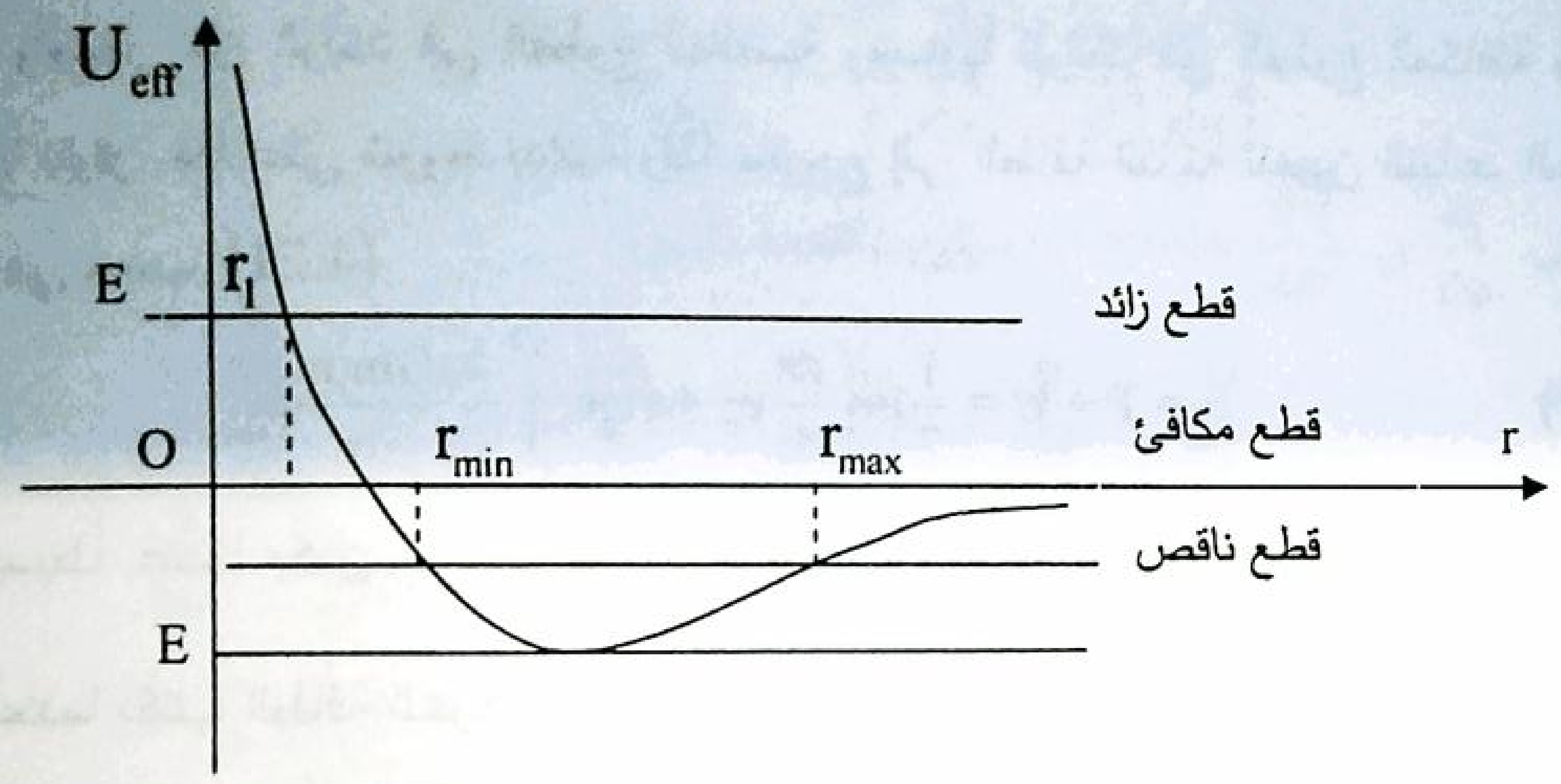
و $e = 0$ من أجل $E = \frac{-(Gm_1m_2)^2 m}{2L_o^2}$ والمدار عندئذ دائري

أما إذا كانت $E > 0$ فإن $e > 1$ والمدار في هذه الحالة قطع زائد

وإذا كانت $E = 0$ فإن $e = 1$ والمدار في هذه الحالة قطع مكافئ

إن $E < 0$ في الحالة التي تعنينا، الشكل.26، هنا لإن القوة قوة جاذبة، نحتاج لبذل جهد، عمل، لفصل الكتلتين m_1 و m_2 عن بعضهما وهكذا فمدار m_1 حول m_2 هو قطع ناقص تحتل m_2 إحدى بؤرتيه وكذا الأمر بالنسبة لمدار m_2 بالنسبة لـ m_1.

رأينا في (4.30) أن الطاقة تساوي U_{eff} فإذا كانت سالبة فإنها تتقاطع مع منحني U_{eff} في نقطتين r_{min} و r_{max} هما طرفا قطر القطع الناقص، حيث ينعدم $\frac{dr}{dt}$ كما رأينا



الشكل.26

أما إذا كانت موجبة فلا توجد إلا نقطة تقاطع واحدة على منحني U_{eff}. إن r_1 هي أقرب نقطة تصل إليها الكتلة m_1 في مدارها بالنسبة لـ m_2. وأخيراً إذا كانت E مساوية للحد الأدنى للكمون الفعال، المستقيم E مماس في هذه النقطة لـ U_{eff} فالمدار دائري وقد رأينا فعلاً من (4.31) أن E في هذه الحالة تساوي الكمون الفعال الأدنى $\frac{-m(Gm_1m_2)^2}{2L_o^2}$.

يبقى علينا لإثبات الشق الأول من قانون كبلر الأول أن نهمل كتلة الكوكب m_1 بالنسبة لكتلة الشمس m_2 : $m_1 << m_2$ فتصبح الكتلة المختصرة بإهمال كل ما هو من الدرجة الثانية بـ m_1

$$m = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \cong m_1\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) \cong m_1$$

وتصبح معادلة الحركة التي انطلقنا منها (4.20)

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{12}$$

إن حركة كوكب ما حول الشمس حركة على شكل قطع ناقص تحتل الشمس إحدى بؤرتيه. لدينا أيضاً بإهمالنا لـ $\frac{m_1}{m_2}$، $\frac{m_1}{m_2} \simeq 0$، في العلاقة التي تعرف مركز الكتلة

$$m_2\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\overline{OC} = m_2\left(\frac{m_1}{m_2}\vec{r}_1 + \vec{r}_2\right) = 0 ،$$

$$\overline{OC} = \vec{r}_2$$

أي أن الشمس تنطبق حسب هذا التقريب على مركز الكتلة وحركتها بالتالي حركة مستقيمة منتظمة : إن المحاور المرتبطة بالشمس محاور غاليلية وحركة الكوكب في هذا التقريب حركة في جملة غاليلية. كان يطلق على هذه الجملة الغاليلية اسم الجملة المطلقة، بمعنى أنها ثابتة لا تتحرك بالنسبة لأي جملة غاليلية. تم العدول على هذه التسمية بعد أن تبين استحالة البرهان على هذا الثبوت.

نلاحظ لإثبات قانون كبلر الثالث أن السطح البدائي معبراً عنه بالمقدار الثابت L_o هو حسب (4.23)

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L_o}{2m}$$

والسطح الكلي هو $S = \frac{L_o}{2m}T$ حيث T هو الدور

لكن سطح القطع الناقص هو $\pi\, ab$ وبالتالي

$$T = \frac{2\pi\, ab\, m}{L_o}$$

ولدينا في القطع الناقص تعريفاً $a^2 - b^2 = c^2$ أي $b^2 = a^2(1-e^2)$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^4 (1-e^2) m^2}{L_o^2}$$

نبدل e^2 بقيمتها في (4.31) و a بـ $\frac{-\beta}{2E}$ (نصف مجموع $r_{min} + r_{max}$) فنحصل على

$$T^2 = 4\pi^2 a^3 \frac{m}{Gm_1m_2}$$

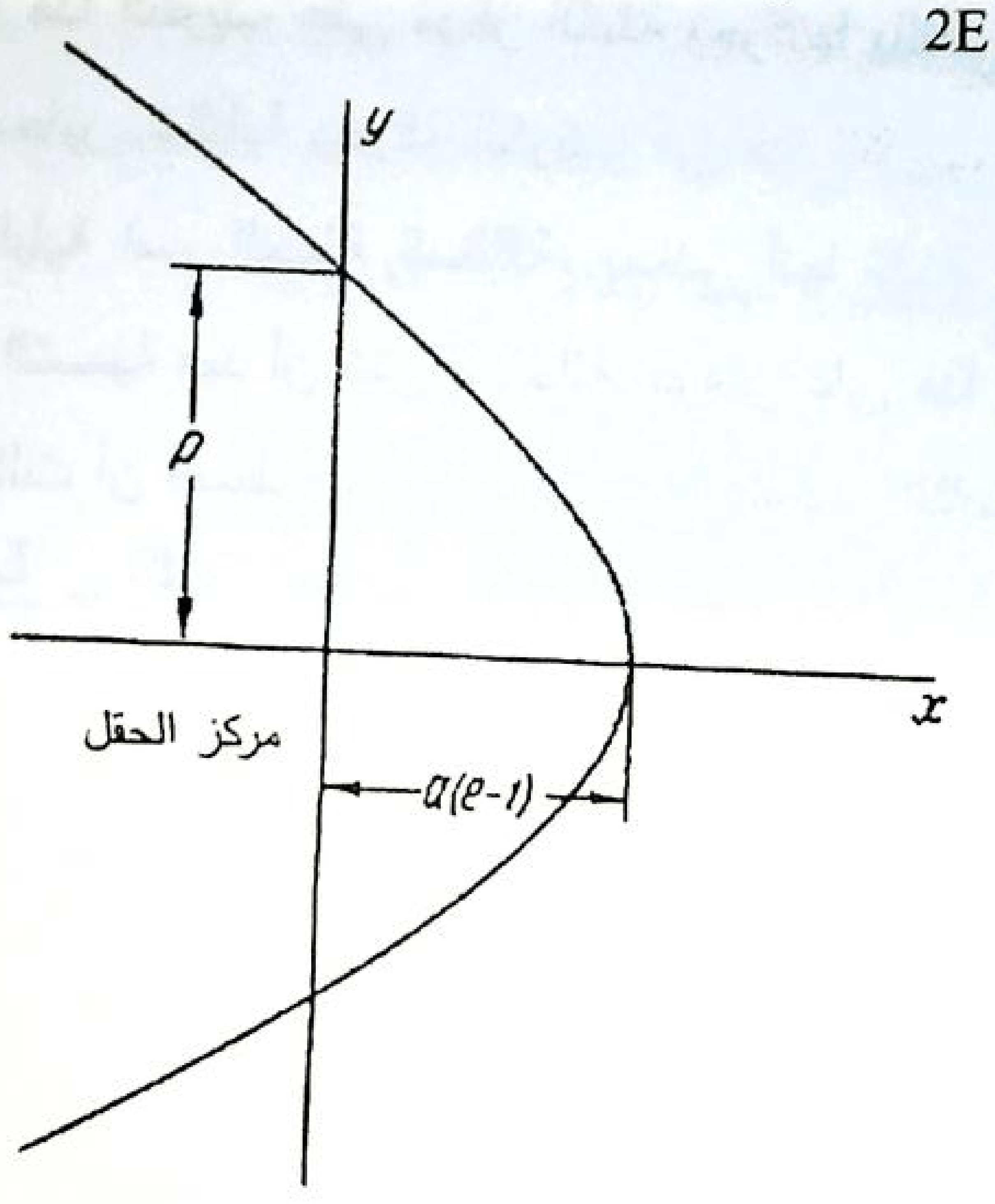
$$T = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{Gm_1m_2}} \qquad (4.32)$$

وهو قانون كبلر الثالث.

ملاحظات :

1- إن المدار قطع زائد يحيط بمركز الحقل (البؤرة) من أجل $E > 0$ ، الشكل.27a، بُعد رأس القطع عن البؤرة هو $a(e-1)$ من جهة وهو من جهة ثانية $r_{min} = \frac{p}{1+e}$ $(\varphi = 0)$ ومنه نصف قطر القطع $a = \frac{p}{e^2-1}$ وبتبديل p و e بقيمتيهما : $p = \frac{L_o^2}{Gm_1m_2m}$ و $e^2 - 1$ من (4.31) نجد

$$a = \frac{Gm_1m_2}{2E}$$



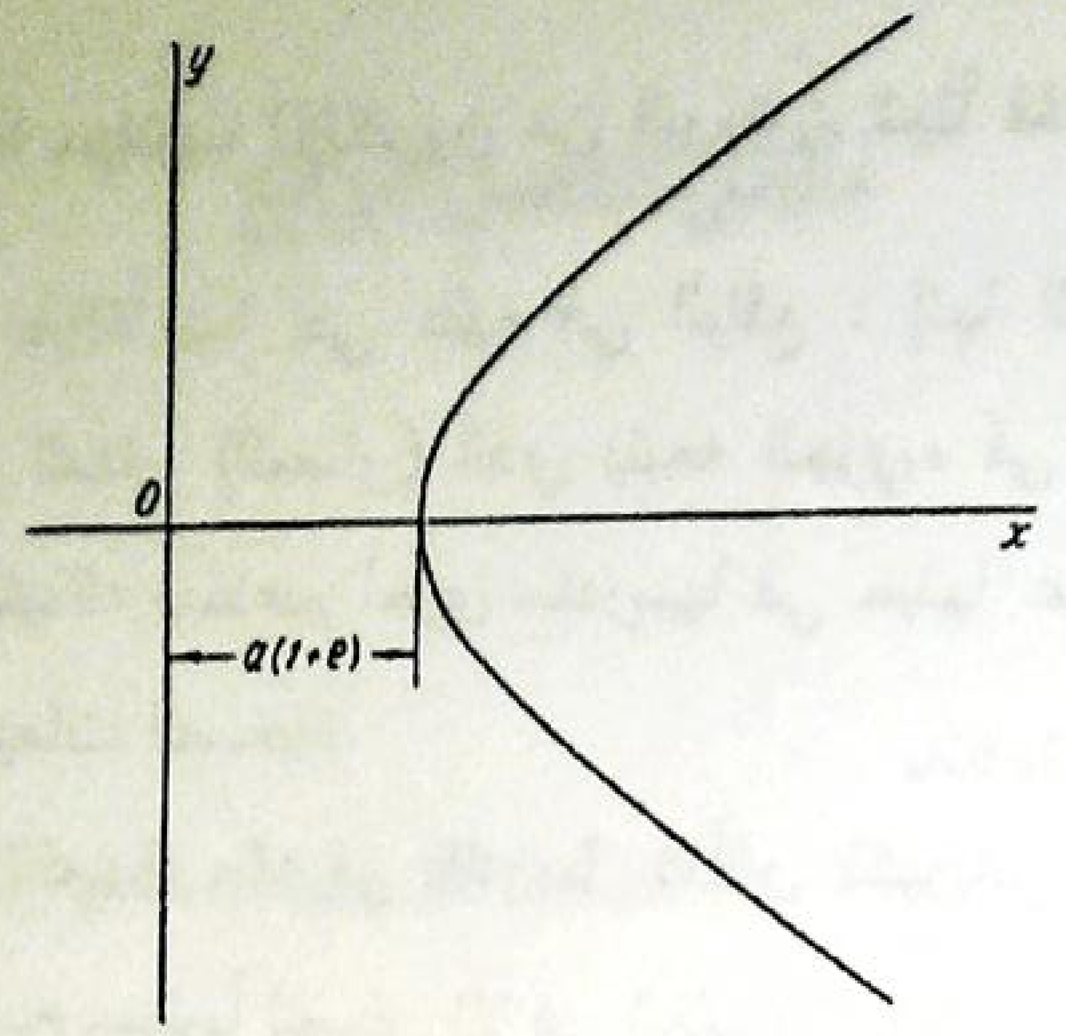
الشكل.27a

والمدار قطع مكافئ من أجل $E = 0$ ، أي من أجل جزيء آت هو أيضاً من اللانهاية ولكن بطاقة معدومة وبعد رأس القطع هنا $r_{min} = \frac{p}{2}$.

2- عندما تكون الحركة في حقل نابذ، نستبدل فيه المقدار $-Gm_1m_2$ بمقدار $\alpha > 0$ ، فإن الكمون الفعال موجب دوماً

$$U_{eff} = \frac{\alpha}{r} + \frac{L_o^2}{2mr^2}$$

وتتراوح قيمته بين ∞ و 0، الحركة على فرع القطع الزائد الآخر ولا يحيط بمركز الحقل وبعد رأس القطع عن مركز الحقل هو $a(e+1) = 2c - a(e-1)$ ، الشكل.27b.



الشكل.27b

3- إن التطابق التام بين الأرصاد الفلكية السابقة واللاحقة لمبدأ الجاذبية الكونية، من تيخو براهة إلى يومنا هذا، وبين معادلات الميكانيك السماوية (4.24) المنطلقة من هذا المبدأ ومن مبدأ (قانون) نيوتن الثاني، وكذا كل التجارب المجراة على سطح الأرض للأجسام المتحركة بفعل الثقالة $mg = \frac{GmM}{r^2}$ تثبت صحة هذين المبدأين وتجعل منهما المرتكز الأساسي لكل الميكانيك التقليدي.

تقوم نظرية النسبية العامة لآنشتاين على التوفيق بين مبدأ الجاذبية الكونية المفسر لحركة الأجسام السماوية وبين نظرية النسبية الخاصة التي تخضع لها الأجسام كبيرة السرعة. وتعدل مبدأ الجاذبية تعديلاً طفيفاً، يُبقي الثابتة الكونية G على حالها، وذلك بإدخال مفهوم الانحناء في حالة التباعد الكبير بين الأجسام منتقلة بذلك من هندسة الفضاء المنبسط الإقليدي الذي ندرس فيه معادلات الحركة حتى الآن إلى هندسة الفضاء الريماني المنحني الذي يزول فيه مفهوم التوازي – كل المستقيمات تتلاقى – ويبقى مفهوم المستقيم كأقصر مسافة بين نقطتين إلا أنه منحن هنا وينطبق على قوس الدائرة الكبرى المارة من هاتين النقطتين.

4- إن التفاعل الكهربائي بين شحنتين كهربائيتين مختلفتي الإشارة، الإلكترون والبروتون مثلاً شبيه بالتجاذب الكوني، يكفي فيه استبدال المقدار Gm_1m_2 في الكمون بالمقدار الموجب $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_1q_2$ -.. إلا أن التشابه بين التفاعلين يقف عند هذا الحد ذلك أنه لا وجود للمدار الإهليليجي في حالة ذرة الهدروجين المؤلفة من البروتون والإلكترون. والعلة في هذا أننا لو قبلنا فرضاً بتحرك الإلكترون حول البروتون، ذي الكتلة المساوية لحوالي 2000 مرة كتلة الإلكترون، كما تتحرك الأرض حول الشمس، فإن الإلكترون سيتسارع ويتباطأ حسب قانون كبلر الثاني وسيشع بكثرة نتيجة اختلاف السرعة، كما سنرى في دراستنا للكهرطيسية. فاقداً في كل دورة جزءاً من طاقته الحركية T. بحيث تصبح طاقة التفاعل الكلية السالبة أكثر سلبية ويتناقص بالتالي قطر القطع الناقص المعرف بـ $\frac{\beta}{-E} = \frac{1}{-4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{E}$ بين دورة 1 وأخرى 2 :

$E_1 > E_2$، $\frac{\beta}{|E_1|} > \frac{\beta}{|E_2|}$ وهكذا سيقترب الإلكترون من البروتون شيئاً فشيئاً إلى أن يسقط عليه وستكون ذرة الهيدروجين غير مستقرة خلافاً لما هي عليه في الواقع : إنها الذرة الأكثر استقراراً في الكون. نستخلص من ذلك أن مفهوم المدار (المسار) الذي يتبعه الجزيء في حركته لم يعد مقبولاً في حالة الجسيمات الصغيرة، ينبغي استبداله بمفاهيم أخرى سندرسها في حينها عندما نصل إلى دراسة الميكانيك الكمومي الذي تخضع له الجسيمات الصغيرة.

5– يصل مدى تأثير الجاذبية الكونية، مثله في ذلك مثل التأثير الكهربائي إلى اللانهاية. فالكمون متناسب مع $\frac{1}{r}$ في كلتا الحالتين ولا يصبح مساوياً للصفر إلا في اللانهاية. لابد إذاً من وجود دالة أسّية في الصورة تتناهى بسرعة نحو الصفر في التفاعلات قصيرة المدى، النووية وتحت النووية، من الشكل $U = \frac{e^{\frac{\lambda}{r}}}{r}$.

ملحق الفصل الرابع

1. القطوع المخروطية

معادلة القطعين الناقص والزائد

إنهما القطعان اللذان لهما مركز، نأخذه مبدأ للإحداثيات الديكارتية، ونرمز لإحداثيي البؤرتين (x, y) بـ $(\pm c, 0)$، تكتب معادلتهما على الشكل

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \qquad (1)$$

، حيث $(\pm a, 0)$ هما إحداثيا الرأسين

تكتب هذه المعادلة بدليل المقدار $e = \frac{c}{a}$، المسمى التباعد المركزي، على الشكل التالي

$$x^2\left(1 - e^2\right) + y^2 = a^2\left(1 - e^2\right) \qquad (1)'$$

كما تكتب بالإحداثيات القطبية، حيث القطب هو مبدأ الإحداثيات الديكارتية على الشكل

$$\rho = \frac{a\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2\cos^2\theta}}$$

أما إذا رمزنا للمقدار $a^2 - c^2$ بـ b^2، $a^2 - c^2 = b^2$ إذا كان $a > c$ وبـ $a^2 - c^2 = -b^2$ إذا كان $a < c$، أي إذا كان التباعد المركزي $e < 1$ أو $e > 1$ على الترتيب، فتأخذ المعادلة أحد الشكلين

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2)$$

وهي معادلة القطع الناقص

أو

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (3)$$

وهي معادلة القطع الزائد

نقول عن القطع الزائد إنه قائم أو متساوي الساقين عندما تكون $a = b$، وتكتب معادلة القطع في هذه الحالة في جملة إحداثيات متعامدة تصنع مع الجملة الأصلية زاوية تساوي $45°$ درجة على الشكل $xy = \frac{a^2}{2}$.

نعرف *الدليل* بأنه مستقيم مواز لمحور التراتيب. فاصلته d تحددها العلاقة التالية

$$\frac{\rho}{\Delta} = e \qquad (4)_1$$

حيث ρ المسافة بين نقطة ما على القطع والبؤرة القريبة من الدليل و Δ المسافة بينها وبين الدليل: $\Delta = d - x$، أي أن d تحقق العلاقة

$$y^2 + (x - c)^2 = e^2(d - x)^2$$

نرى بسهولة بكتابة y^2 بدليل a^2، e^2، x^2 في $(1)'$ مثلاً وجعل مثل x مساوياً لـ a أن

$$|d| = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c} \quad (4)_2 \qquad \text{و} \qquad d = \pm\frac{a^2}{c}$$

معادلة القطع المكافئ

نأخذ نقطة الرأس كمبدأ للإحداثيات ونكتب المعادلة

$$y^2 = 2px \qquad (5)$$

نسمي النقطة التي فاصلتها $c = \frac{p}{2}$ بؤرة القطع المكافئ ونُعرف الدليل كما في الحالتين السابقتين مع $e = 1$ لنجد هنا أيضاً

$$2px + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = (x + d)^2$$

أو

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = (x + |d|)^2$$

$$|d| = \frac{p}{2} \quad (6) \qquad \text{و} \qquad d = -\frac{p}{2} = -c$$

يمكن كتابة معادلة القطعين الناقص والزائد بأخذ مبدأ الإحداثيات في أحد رأسي القطع (كما في حالة القطع المكافئ) وكتابة المعادلة التي تحققها القطوع الثلاثة على الشكل

$$y^2 = 2pX + (e^2 - 1)X^2 \qquad (7)$$

حيث $X = \pm a + x$.

ونجد بالتبديل في $(1)'$ مثلاً أن $p = \frac{b^2}{a}$.

لا تتغير معادلة القطع المكافئ بطبيعة الحال لأن $e = 1$.

يمكن كتابة معادلة القطوع الثلاثة بالإحداثيات القطبية التي مبدؤها البؤرة ومحور الفواصل فيها هو المحور البؤري، انطلاقاً من العلاقة $(4)_1$ حيث $\Delta = d - (x + c)$، على الشكل

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \qquad (8)$$

ومعادلة الدليل على الشكل

$$\rho = \frac{p}{e\cos\theta}$$

نسمي المحور الذي يصل بين البؤرتين، محور الفواصل حتى الآن، المحور العرضاني كما نسمي الوتر المار بالبؤرة وتراً بؤروياً، وإذا كان عمودياً على المحور العرضاني فيسمى بالضلع القائم Latus Rectum. تبين العلاقة (8) أن طول الضلع القائم هو 2p أي أنه $\frac{2b^2}{a}$ من أجل القطعين الناقص والزائد وأربعة أمثال فاصلة البؤرة – البعد البؤري – في حالة القطع المكافئ.

الأقطار والأقطار المترافقة

ليكن لدينا قطع ذو مركز معين بإحدى المعادلتين (2) أو(3)، وليكن Δ وتراً معين الاتجاه لهذا القطع – ليكن α و β جيوب تمام الاتجاه المذكور، $M(\xi, \eta)$ نقطة على الوتر. إن إحداثيي أي نقطة P تبعد عن M المسافة $MP = \rho$ على الوتر هما ($x = \xi + \alpha\rho$ ، $y = \eta + \beta\rho$). تتعين قيمتا ρ المقابلتان لتقاطع الوتر مع القطع بجذري المعادلة من الدرجة الثانية (ρ_2, ρ_1) :

$$\frac{(\xi + \alpha\rho)^2}{a^2} \pm \frac{(\eta + \beta\rho)^2}{b^2} = 1 \qquad (9)$$

إن الشرط اللازم والكافي لكي تقع M وسط الوتر $(\rho_2 = -\rho_1)$، أي ليكون مجموع الجذرين معدوماً هو

$$\frac{\alpha\xi}{a^2} \pm \frac{\beta\eta}{b^2} = 0 \qquad (10)$$

إن هذه المعادلة بالمتحولين (ξ, η) هي معادلة مستقيم يمر بمركز القطع وينصف الوتر، نسميه القطر المرافق للأوتار المتوازية المعينة بالاتجاه (α, β).

ترينا المعادلة (10) أننا إذا سمينا m ميل الوتر $m = \frac{\beta}{\alpha}$ فإن ميل القطر المرافق ولنسمه m'، هو $m' = \frac{\eta}{\xi} = \mp \frac{b^2}{a^2 m}$. وهكذا فإذا حقق قطران العلاقة $mm' = \mp \frac{b^2}{a^2}$ فإن كلاً منهما قطر مرافق للأوتار الموازية للقطر الآخر : إنهما قطران مترافقان.

تصبح المعادلة (9) في حالة القطع المكافئ المعين بالمعادلة (5)

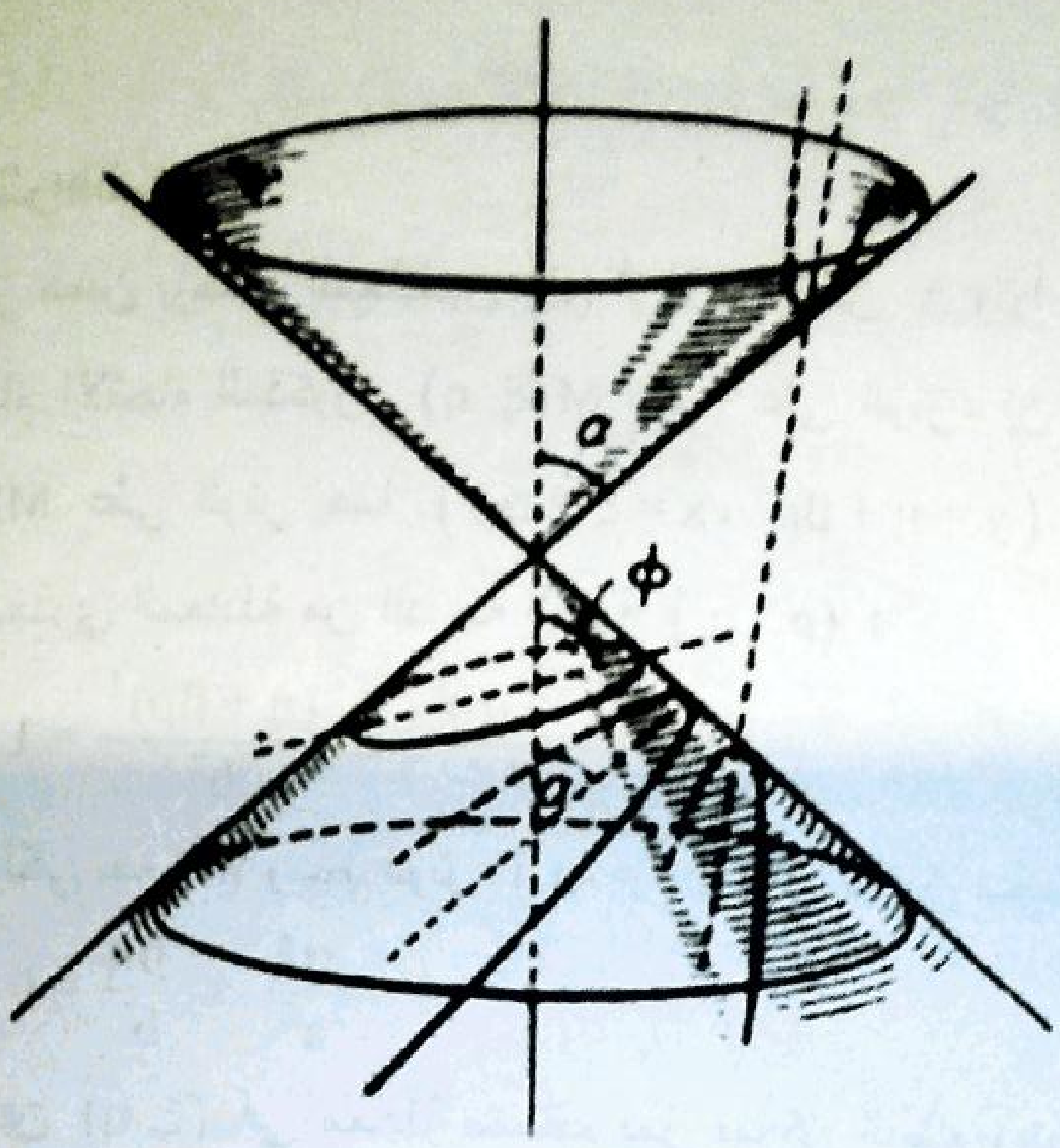
$$(\eta + \beta\rho)^2 = 2p(\xi + \alpha\rho) \qquad (9)'$$

و تأخذ المعادلة (10) المقابلة لانعدام مجموع الجذرين الشكل

$$\eta = \frac{\alpha}{\beta} p \qquad (10)'$$

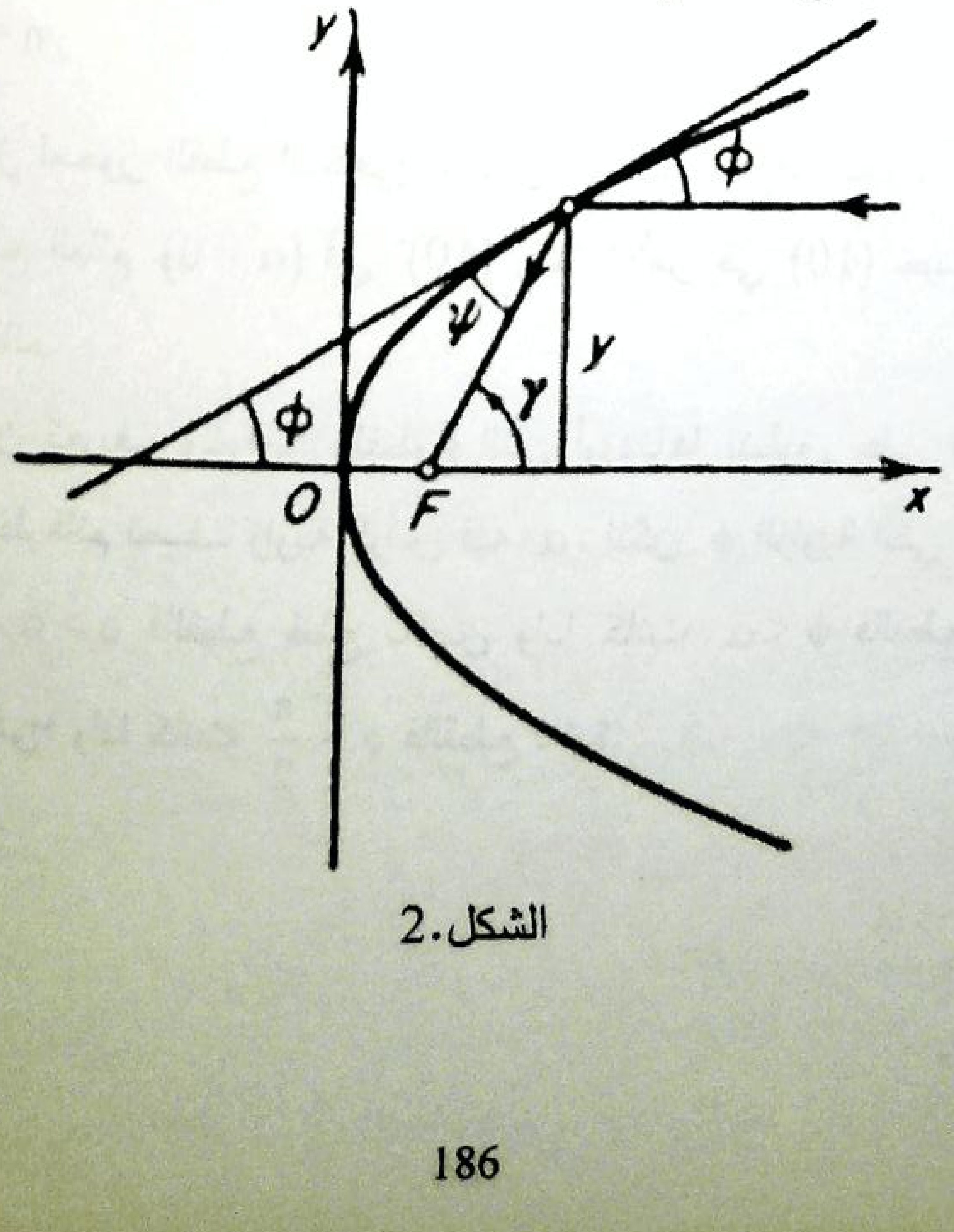
وهي معادلة مستقيم مواز لمحور القطع المكافئ، أي أن الأقطار المرافقة للأوتار توازي المحور. والمحور هو القطر المرافق للضلع القائم ($\alpha = 0$) في '(10) وكذا الأمر في (10) حيث المحور العرضاني هو القطر المرافق للضلع القائم.

برهن دندلان (1822) أن تعريف وخواص القطوع التي أوردناها تنطبق على التعريف اليوناني للقطوع كتقاطع لمستو مع مخروط قائم نصف زاوية الرأس فيه α. لتكن ϕ الزاوية التي يصنعها المستوي القاطع مع المحور؛ إذا كانت $\alpha < \phi$ فالقطع قطع ناقص وإذا كانت $\alpha > \phi$ فالقطع قطع زائد، وإذا كانت $\phi = \alpha$ فالقطع قطع مكافئ؛ وإذا كانت $\phi = \frac{\pi}{2}$ فالقطع دائرة.



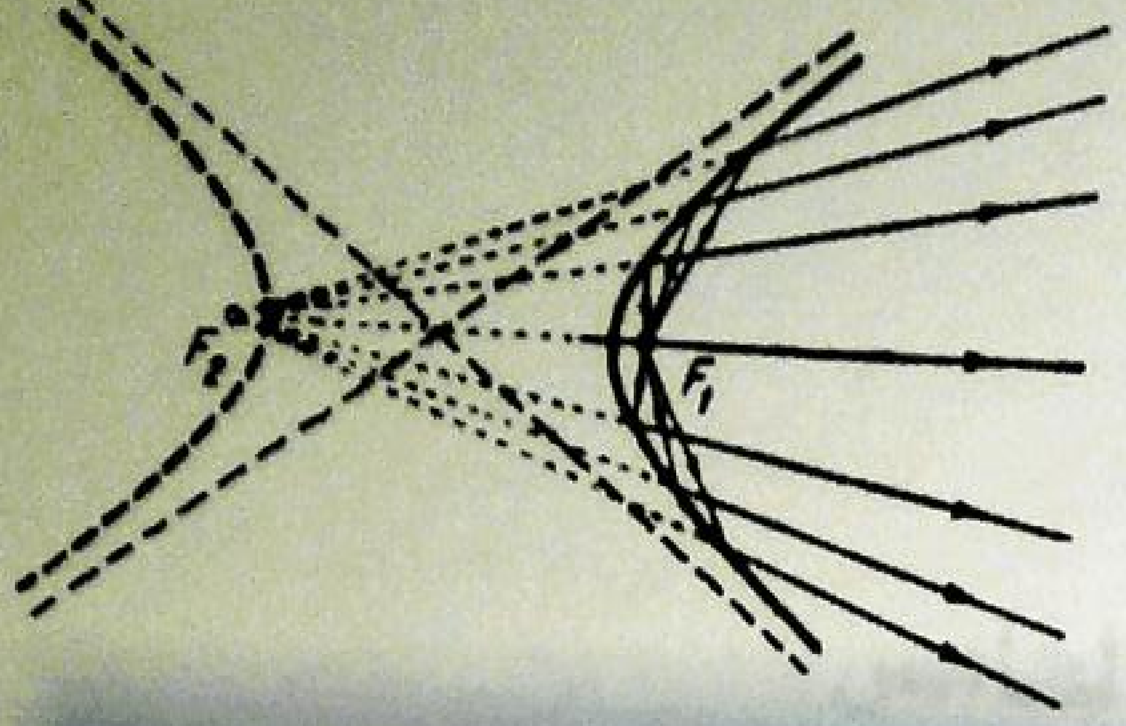
الشكل.1

إن الميل الزاوي لمماس القطع المكافئ في نقطة منه M هو، حسب (5)، $tg\,\phi = \frac{p}{y}$. لدينا $tg\,2\phi = \frac{y}{x - \frac{p}{2}}$ ولكن هذا هو مماس الزاوية القطبية γ أي أن $\gamma = 2\phi$. إن هذه الزاوية هي الزاوية الخارجية للمثلث FMI حيث I نقطة تقاطع المماس مع محور الفصول $\gamma = \phi + \psi$ و $\phi = \psi$: تصنع الأشعة الواردة من اللانهاية الموازية لمحور الفصول الزاوية ϕ مع المماس وبالتالي تنعكس نحو البؤرة. والعكس صحيح حسب مبدأ الرجوع العكسي.

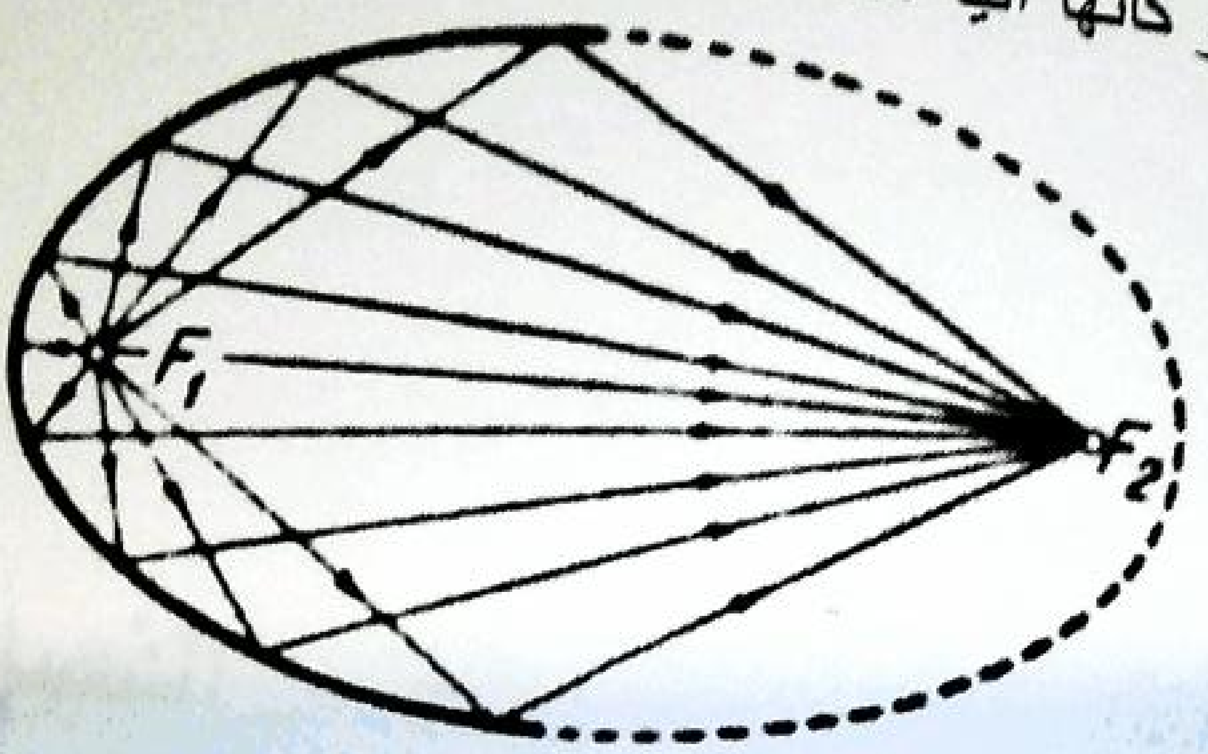


الشكل.2

يمكن أن نبرهن بنفس الشكل أن الأشعة الواردة من أحد قطبي القطع الناقص تنعكس نحو القطب الأخر وأن الأشعة الواردة من قطب أحد فرعي القطع الزائد تنعكس عليه وتتقاطع كلها في قطب الفرع الثاني، تبدو كأنها آتية منه



الشكل.4



الشكل.3

اختزال معادلة من الدرجة الثانية بمتحولين x و y إلى الشكل القانوني

إن الشكل العام لهذه المعادلة هو

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

إن اختزالها إلى الشكل القانوني هو القيام بتحولات نتخلص بواسطتها من الحد المستطيل (أي من xy) (لنلاحظ أن الجبر الخطي يمكننا من تحويل أي علاقة خطية من الدرجة الثانية بـ n متحولاً $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ إلى الشكل القانوني $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i^2$) لتصبح المعادلة على أحد الأشكال التسعة الآتية :

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ قطع ناقص
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ قطع ناقص تخيلي
3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ نقطة (خطان تخيليان يتقاطعان في نقطة حقيقية)
4. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ قطع زائد
5. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ خطان متقاطعان
6. $y^2 - 2px = 0$ قطع مكافئ
7. $x^2 - a^2 = 0$ خطان متوازيان
8. $x^2 + a^2 = 0$ خطان تخيليان متوازيان
9. $x^2 = 0$ خطان متطابقان

الفصل الخامس

ديناميك الجسم الصلب والحركة في جملة محاور غير غاليلية

1. الانسحابات والدورانات 189
2. طاقة الجسم الصلب الحركية 200
3. عزم الجسم الصلب الزاوي ومعادلات الحركة 217
4. الحركة النسبية 227

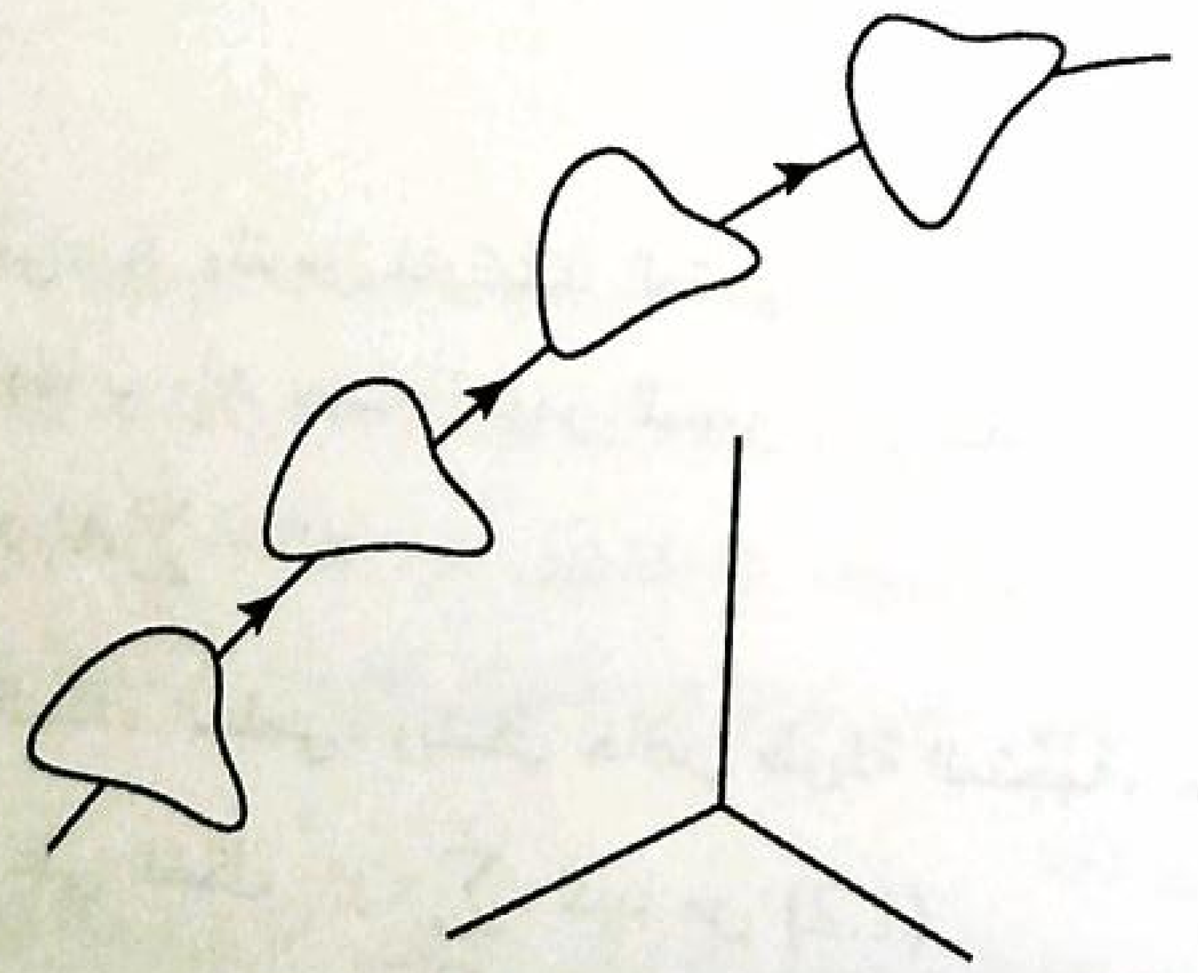
الفصل الخامس: ديناميك الجسم الصلب والحركة في جملة محاور غير غاليلية

1. الانسحابات والدورانات

1.1- حركة الجسم الصلب :

نعرف الجسم الصلب بأنه الجسم غير القابل للتشويه أي أن المسافة بين نقاطه تبقى ثابتة، سواء أكان الجسم الصلب مؤلفاً من نقط منفصلة (جزئيات منفصلة عندما ننظر إلى التركيب الذري للجسم الصلب، أو كرات متباعدة ننظر إليها وكأن كل كتلتها أو شحنتها مركزة في نقطة واحدة هي مركز الكرة)، أو كان متصلاً عندما ننظر إليه من وجهة النظر الجهرية، الماكروسكوبية. وهكذا فإن حركة الجسم تحافظ على هذه المسافات الثابتة ولذا فإنها تخضع لموضوعة الحركة في الفضاء الإقليدي وتتركب بالتالي من انسحابات ودورانات، الشكل.1 : الانسحاب ينقل الجسم الصلب ككل من وضع إلى آخر بحيث تبقى المتجهة بين نقطتين ما بعد الانتقال مساوية وموازية لوضعها الأول $\overline{OP} = \overline{O'P'}$: $\overline{OP} \parallel \overline{O'P'}$.

لنفرض أن الجسم الصلب يدور بعد ذلك حول النقطة 'O أي أننا ثبتنا مثلاً النقطة 'O بحيث تنتقل المتجهة من الوضع $\overline{O'P'}$ إلى الوضع $\overline{O'P''}$.

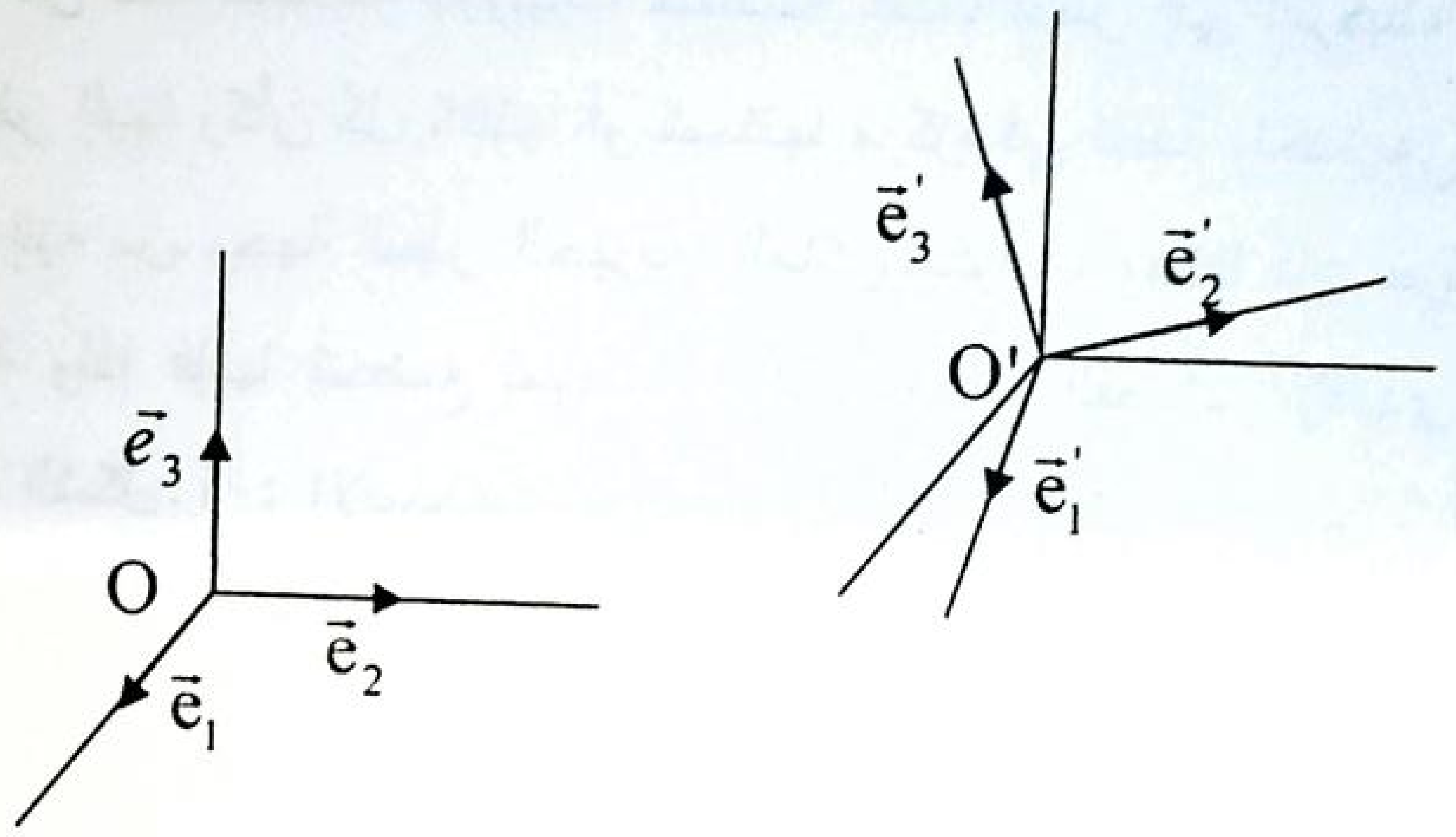


الشكل.1

يتحدد الانسحاب بإعطاء المتجهة $\vec{a} = \overline{OO'}$ التي تنقل أي نقطة P إلى النقطة المقابلة لها P'، كما يتحدد الدوران بمعرفة التطبيق الخطي الذي ينقل المتجهة $\overline{O'P'}$ إلى $\overline{O'P''}$. لنرمز بـ $\vec{x}$ للمتجهة $\overline{O'P'}$ وبـ $\vec{x}'$ للمتجهة $\overline{O'P''}$ وبـ A للمؤثر الخطي ونكتب

$$\vec{x}' = A\vec{x} \tag{1.1}$$

وبما أنه يمكن النظر إلى مقرن ما، إلى جملة محاور ما، كجسم صلب مؤلف من ثلاث مساطر صلبة ومتعامدة فإننا نرى أن الانتقال من جملة غير غاليلية (مقرن) إلى جملة غير غاليلية أخرى هو انسحاب تحدده المتجهة $\vec{a} = \overline{OO'}$، الذي لم تعد فيه السرعة $\frac{d\vec{a}}{dt}$ ثابتة بالضرورة، يليه دوران تنتقل فيه كل متجهة حسب العلاقة (1.1)، الشكل.2



الشكل.2

2.1- زمرة الدورانات :

لندرس خواص المؤثر الخطي A ولنرمز لمركبات المتجهة x بـ x^1, x^2, x^3. نكتب A على شكل مصفوفة 3×3، نرمز لعناصرها بـ A^i_j حيث i ترمز للسطر و j للعمود، تحددها العلاقة

$$x''^i = \sum_{j=1}^{3} A^i_j\, x^j \tag{1.2}$$

يجب أن تحفظ هذه العلاقة الجداء السلمي؛ وبشكل خاص طويلة المتجهة، جذر جداء المتجهة السلمي بذاتها. لنكتب الجداء السلمي على الشكل $\sum_{i=j}^{3} x^i y^i$. لدينا من (1.2)

$$\sum_i x''^i y''^i = \sum_{i,j,k} A^i_j\, x^j\, A^i_k\, y^k \tag{1.3}$$

يجب أن يكون هذا الجداء مساوياً $\sum_j x'^j y'^j$ (أهملنا الإشارة إلى أن الجمع هو من 1 إلى 3) يجب إذاً أن يكون لدينا

$$\sum_i A^i_j A^i_k = \delta_{jk} = \delta_{kj} \qquad (1.4)$$

رمزنا بـ δ_{jk}، رمز كرونيكر، إلى المقدار الذي يساوي الصفر من أجل $j \neq k$ و 1 من أجل $j = k$ بحيث لا يبقى في الطرف الثاني من الجموع الثلاثة في (1.3) إلا الجمع على j. يبقى الجداء السلمي عندئذ ثابتاً $\sum_j x'^j y'^j = \sum_i x''^i y''^i$. تكافئ العلاقة (1.4) ست علاقات حسب القيم التي يأخذها الزوج (j,k) : $(1,1)$، $(1,2)$، $(1,3)$، $(2,2)$، $(2,3)$، $(3,3)$. هذا يعني أنه لا يوجد إلا ثلاثة عناصر، من عناصر المصفوفة التسعة، مستقلة عن بعضها بعضاً، نلاحظ من جهة أخرى، أننا إذا أخذنا منقول المصفوفة A – نرمز للمنقول بـ $\tilde{A}$ – فإن العنصر A^i_j هو العنصر $\tilde{A}^j_i$. وهكذا يأخذ الجداء (1.4) الشكل

$$\sum_i \tilde{A}^j_i A^i_k = \delta_{jk}$$

أي أن جداء السطر j $(j = 1,2,3)$، في $\tilde{A}$، بالعمود k في A يساوي الصفر إلا إذا كان العمود في المصفوفة الأولى يقابل السطر في المصفوفة الثانية ويصبح الجداء مساوياً للواحد. ولكن هذا تعريفاً هو جداء مصفوفة بمقلوبها A^{-1}، ومنه

$$\tilde{A}A = A\tilde{A} = AA^{-1} = I \qquad (1.5)$$

ولكن جداء المصفوفة بمنقولها يساوي لمربع معين المصفوفة أي أن معين المصفوفة يساوي ± 1.

نقول عن الدوران إنه مباشر إذا كان هذا المعين يساوي 1 ومنه.

<u>مبرهنة 1</u> :

يتعين دوران الجسم الصلب أو جملة المحاور المباشرة بإعطاء مصفوفة 3×3 تعينها ثلاثة عناصر مستقلة عن بعضها، معينها يساوي 1. نرمز لمجموعة هذه المصفوفات بـ SO(3) : S للتعبير عن الحالة الخاصة للمعين المساوي للواحد Special، O للتعبير عن انحفاظ الجداء السلمي في في الإحداثيات المتعامدة orthogonal و 3 للتعبير عن كوننا في فضاء الفيزياء التقليدية الإقليدي ذي الأبعاد الثلاثة. تشكل الدورانات SO(3) زمرة لأننا

1- ننتقل من $\vec{x}$ إلى $\vec{x}'$ بواسطة المصفوفة A ومن $\vec{x}'$ إلى $\vec{x}''$ بواسطة المصفوفة B التي تحقق نفس الشرطين (1.4) و(1.5) ولدينا

$$x''^k = \sum_i B^k_i x'^i = \sum_{i,j} B^k_i A^i_j x^j$$
$$= \sum_j C^k_j x^j$$

حيث كتبنا $C_j^k = \sum_i B^k{}_i A^i_j$، إن C_j^k هو عنصر جداء السطر k من المصفوفة B بالعمود j من المصفوفة A أي أن $C = BA$ هو جداء المصفوفة B بالمصفوفة A المعبر عن قانون تركيب التطبيقين $x \xrightarrow{A} x' \xrightarrow{B} x''$: $B(Ax) = x'' = (B \circ A)(x)$. إن معين C يساوي الواحد لأن منقول BA هو $\widetilde{BA} = \tilde{A}\tilde{B}$ ، وبالتالي

$$C\tilde{C} = BA\tilde{A}\tilde{B} = B\tilde{B} = I$$

وقانون التركيب، قانون ضرب المصفوفات تجميعي.

2- يوجد عنصر حيادي $x = Ix$

و3- لدينا أيضاً $x' \xrightarrow{A^{-1}} x$: $x = A^{-1}(x') = A^{-1}A(x)$ ، $A^{-1}A = I$: من أجل كل مصفوفة، أي أن لكل عنصر مقلوب.

إن جداء المصفوفات غير تبادلي $AB \neq BA$ ، وبالتالي فإن زمرة الدورانات زمرة غير تبادلية.

3.1- محور الدوران الآني :

لنبحث الآن عن المتجهات الخاصة والقيم الخاصة للمؤثر A أي عن المتجهات $\vec{\omega}$ التي تحقق العلاقة

$$A\vec{\omega}_i = \lambda_i \vec{\omega}_i \quad (1.6)$$

أو

$$(A - \lambda_i I)\vec{\omega}_i = 0$$

لكي يكون لهذه المعادلة الخطية حل مختلف عن الصفر، يجب أن يكون معين المؤثر $(A - \lambda_i I)$ مساوياً للصفر أي

$$\begin{vmatrix} A_1^1 - \lambda & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 - \lambda & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + \lambda^2 \, TrA + \lambda \ldots + \det A$$

حيث $A_1^1 + A_2^2 + A_3^3 = TrA$ هو أثر المصفوفة تعريفاً.

لدينا هنا كثير حدود من الدرجة الثالثة وعوامله حقيقية، فله على الأقل جذر حقيقي (ذلك أن الجذرين الآخرين إن كانا عقديين فهما مترافقان) ثم إن القيمة المطلقة لهذه الجذور تساوي الواحد لأن معين A يساوي 1 وهكذا فالحلول الثلاثة هي $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = e^{i\theta}$ و $\lambda_3 = e^{-i\theta}$ ولدينا جداء الجذور $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1 = \det A$، الحد الثابت في كثير الحدود

$$A\vec{\omega} = 1\vec{\omega} \quad ; \quad A\vec{\omega} = e^{\pm i\theta}\omega \quad (1.7)$$

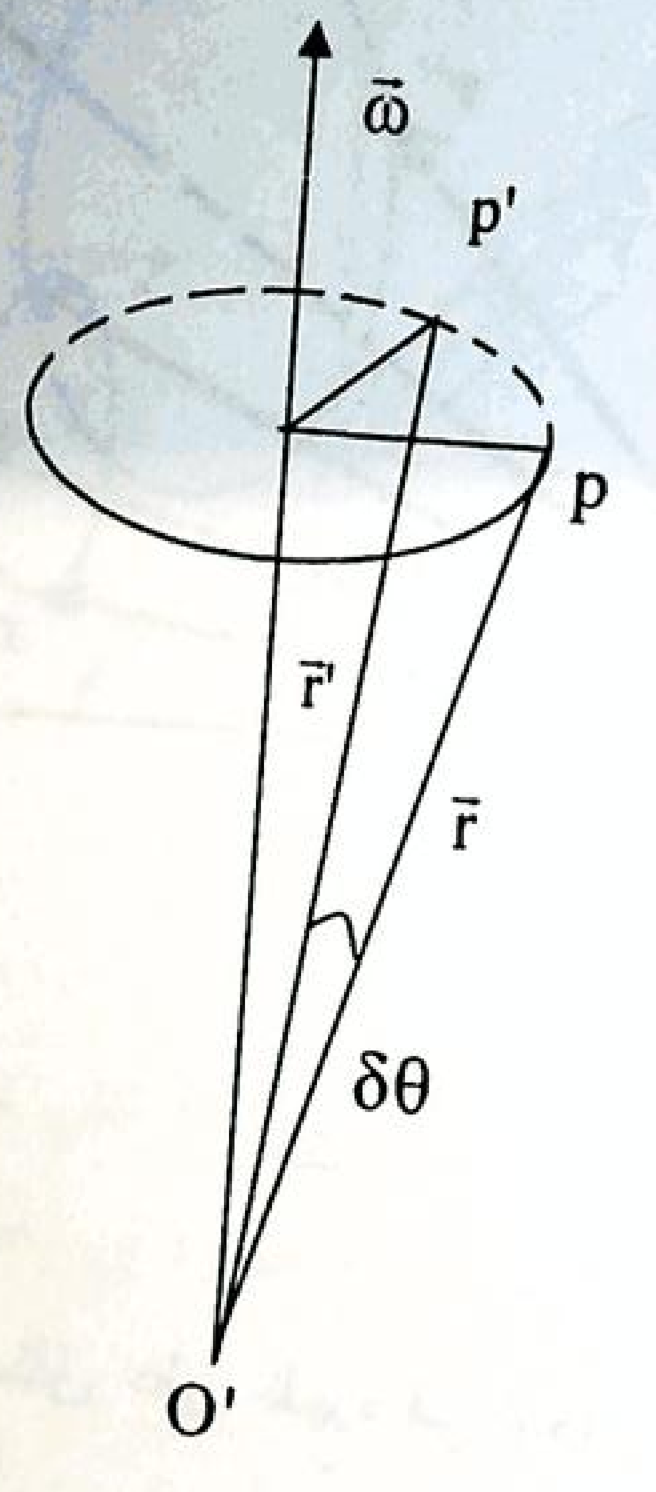
مبرهنة 2 :

مبرهنة أولر Euler : إن كل انتقال لجسم صلب فيه نقطة ثابتة هو دوران حول محور ثابت يمر من هذه النقطة، نسميه المحور الآني للدوران نرمز للمتجهة التي تعينه بـ $\vec{\omega}$. ولدينا

$$A\vec{\omega} = \vec{\omega} \qquad (1.7)'$$

إن وجود محور للدوران في لحظة ما يعني أن حركة النقطة P، أن دوران المتجهة $\vec{r}$ التي تعين وضع النقطة P في الجسم الصلب يحقق العلاقة $\vec{\omega} \times \vec{r}$ وأن $\vec{r}$ ينتقل في هذه اللحظة من $\vec{r}$ إلى $\vec{r}\,'$ المجاورة، الشكل.3 :

$$\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (1.8)$$



الشكل.3

ملاحظات :

1- لنلاحظ أن الانتقال الزاوي أو متجهة السرعة الزاوية $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$ ليست متجهة حقيقية وإنما شبه متجهة بحيث يعطي جداؤها المتجه بمتجهة حقيقية متجهة حقيقية.

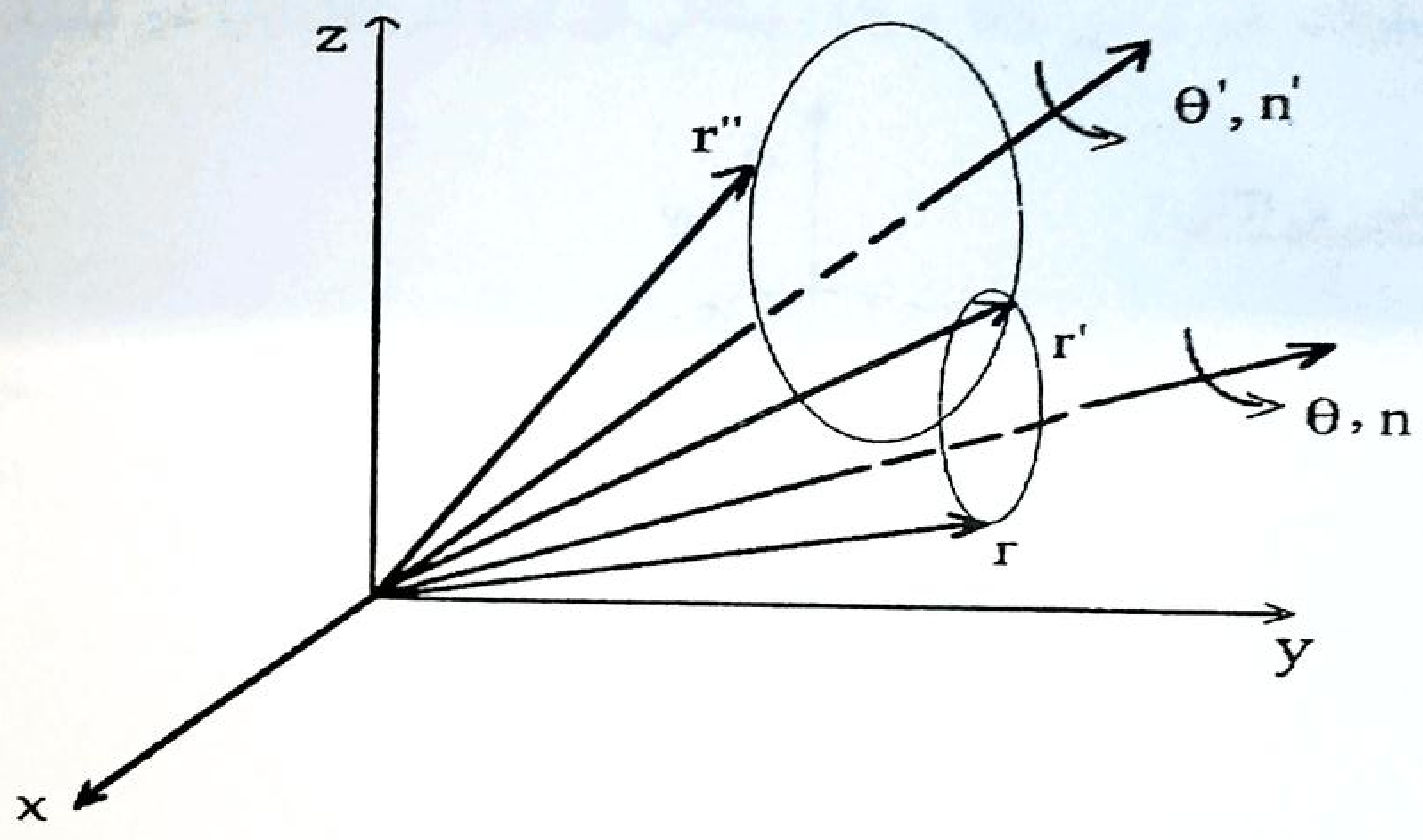
2- لنلاحظ أيضاً أن العلاقة (1.8) تبين لنا مباشرة عدم تبادلية زمرة الدورانات : ننتقل من $\vec{r}$ إلى $\vec{r}\,'$ بالدوران حول المحور $\vec{\omega}$ ذي المتجهة الواحدية $\vec{n}$ بزاوية $\delta\theta$ محمولة على $\vec{n}$

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{n}\delta\theta \times \vec{r}$$

ثم من $\vec{r}'$ إلى $\vec{r}''$ بالدوران حول المحور $\vec{\omega}'$ ذي المتجهة الواحدية $\vec{n}'$ بزاوية محمولة عليه مقدارها $\delta\theta'$، الشكل.4، لدينا

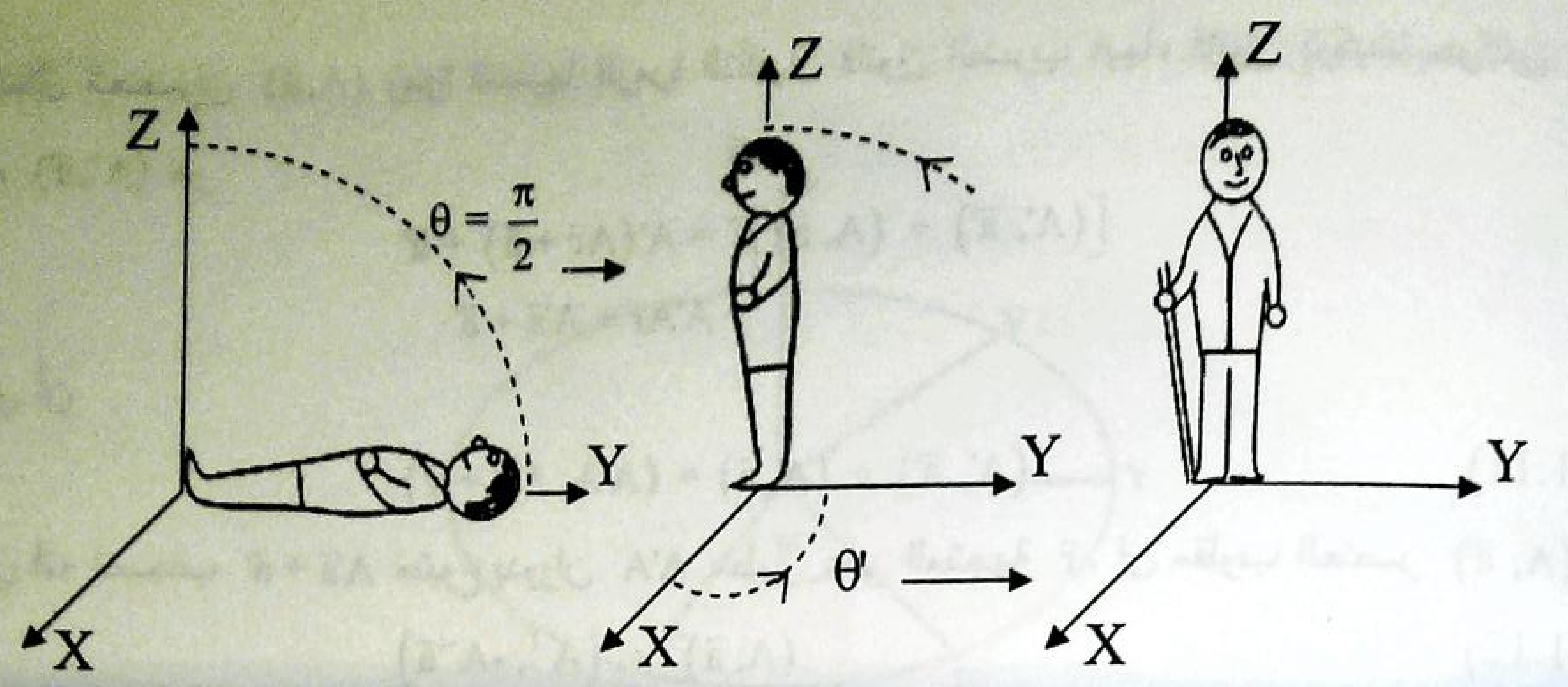
$$\begin{aligned}\vec{r}'' &= \vec{r}' + \vec{n}'\,\delta\theta' \times \vec{r}' \\ &= \vec{r} + (\vec{n} \times \vec{r})\delta\theta + \delta\theta'\,\vec{n}' \times (\vec{r} + \vec{n}\delta\theta \times \vec{r}) \\ &= \vec{r} + (\vec{n}\delta\theta + \vec{n}'\delta\theta') \times \vec{r} + \delta\theta'\delta\theta\,\vec{n}' \times (\vec{n} \times \vec{r})\end{aligned}$$

إن القيام بهذين الدورانين المتواليين تبادلي إذا اقتصرنا على الحد من الدرجة الأولى بـ $\delta\theta$ و $\delta\theta'$ ولكنه يصبح غير تبادلي حالما ننتقل إلى الحد من الدرجة الثانية $\vec{n}' \times (\vec{n} \times \vec{r}) \neq \vec{n} \times (\vec{n}' \times \vec{r})$: لا يتساوى الدوران حول $\vec{n}$ ثم حول $\vec{n}'$ مع الدوران حول $\vec{n}'$ ثم حول $\vec{n}$ كما بينا مرات عديدة.

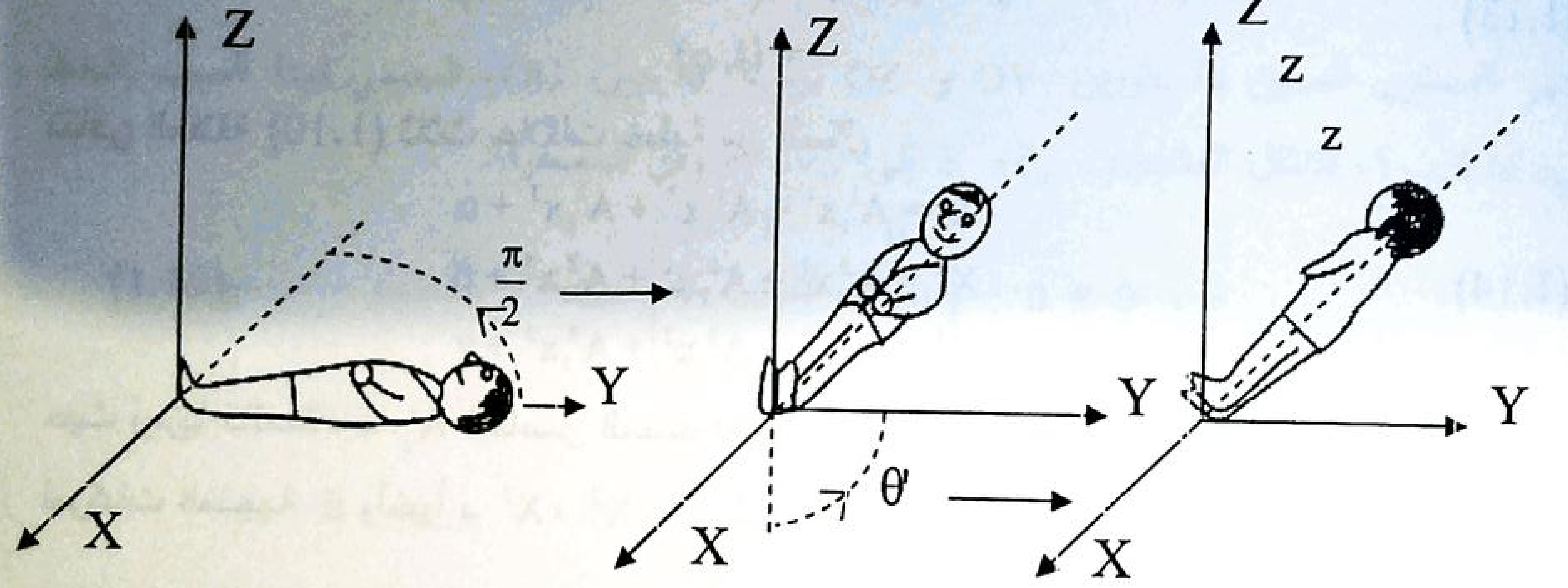


الشكل.4

لنأخذ لتوضيح ذلك دوران شخص مستلق على ظهره في اتجاه Oy بزاوية $\theta = \frac{\pi}{2}$ في الاتجاه المباشر حول Ox ثم بزاوية $\theta' = \frac{\pi}{2}$ حول Oz في الاتجاه المباشر دوماً، الشكل.4'a. تختلف النتيجة إذا بدأنا الدوران حول Oz ومن بعده حول Ox بنفس الزاويتين والاتجاهين، الشكل.4'b.



الشكل. 4'a



الشكل. 4'b

3- إن مبرهنة أولر نتيجة مباشرة لعلاقات التعامد (1.4) التي تخفض عدد المتحولات المستقلة في الدوران من 9 – عدد عناصر المصفوفة – إلى ثلاثة فقط : إن إعطاء ثلاثة أعداد حقيقية يكافئ إعطاء متجهة في الفضاء الإقليدي.

4.1- الزمرة التآلفية :

إن كل انتقال لجسم صلب، كل حركة لجملة محاور غاليلية على سبيل المثال، هي انسحاب $\bar{a} = \overline{OO'}$ تبقى فيه المتجهات موازية لوضعها البدائي وثابتة الطويلة يتبعه دوران حول النقطة 'O تمثله المصفوفة A ∈ SO(3)، المنتمية إلى زمرة الدورانات وهكذا ومن أجل أي نقطة P من الجسم الصلب، أي متجهة $\bar{r}$ فإن حركتها الكلية تتمثل بـ

$$A\bar{r} + \bar{a} \qquad (1.10)$$

يشكل العنصران $(A,\vec{a})$ زمرة نسميها الزمرة التآلفية. قانون الضرب فيها، قانون تركيب حركتين $(A,\vec{a})$ ثم $(A',\vec{a}')$ هو

$$\left[(A',\vec{a}') \circ (A,\vec{a})\right]\vec{r} = A'(A\vec{r}+\vec{a}) + \vec{a}'$$
$$= A'A\vec{r} + A'\vec{a} + \vec{a}'$$

أي أن

$$(A',\vec{a}') \circ (A,\vec{a}) = (A'A, A'\vec{a}+\vec{a}') \quad (1.11)$$

أي أنه انسحاب $A'\vec{a}+\vec{a}'$ متبوع بدوران $A'A$ مطبق على المتجهة $\vec{r}$. إن مقلوب العنصر $(A,\vec{a})$ هو

$$(A,\vec{a})^{-1} = (A^{-1}, -A^{-1}\vec{a}) \quad (1.12)$$

لأن العلاقة (1.11) تعطينا في هذه الحالة

$$(A^{-1}, -A^{-1}\vec{a}) \circ (A,\vec{a}) = (A^{-1}A, A^{-1}\vec{a} - A^{-1}\vec{a}) = (I, o) \quad (1.13)$$

تكافئ العلاقة (1.10) ثلاث علاقات خطية من الشكل

$$\begin{aligned} X^1 &= A^1_1x^1 + A^1_2x^2 + A^1_3x^3 + \alpha \\ X^2 &= A^2_1x^1 + A^2_2x^2 + A^2_3x^3 + \beta \\ X^3 &= A^3_1x^1 + A^3_2x^2 + A^3_3x^3 + \gamma \end{aligned} \quad (1.14)$$

حيث رمزنا كالمعتاد بـ A^i_j لعناصر المصفوفة A، بـ x^3، x^2، x^1 لمركبات المتجهة $\vec{r}$، بـ α، β، γ لمركبات المتجهة $\vec{a}$ وأخيراً بـ X^3، X^2، X^1 لمركبات المتجهة الناتجة عن الحركة[1].

5.1- زوايا أولر :

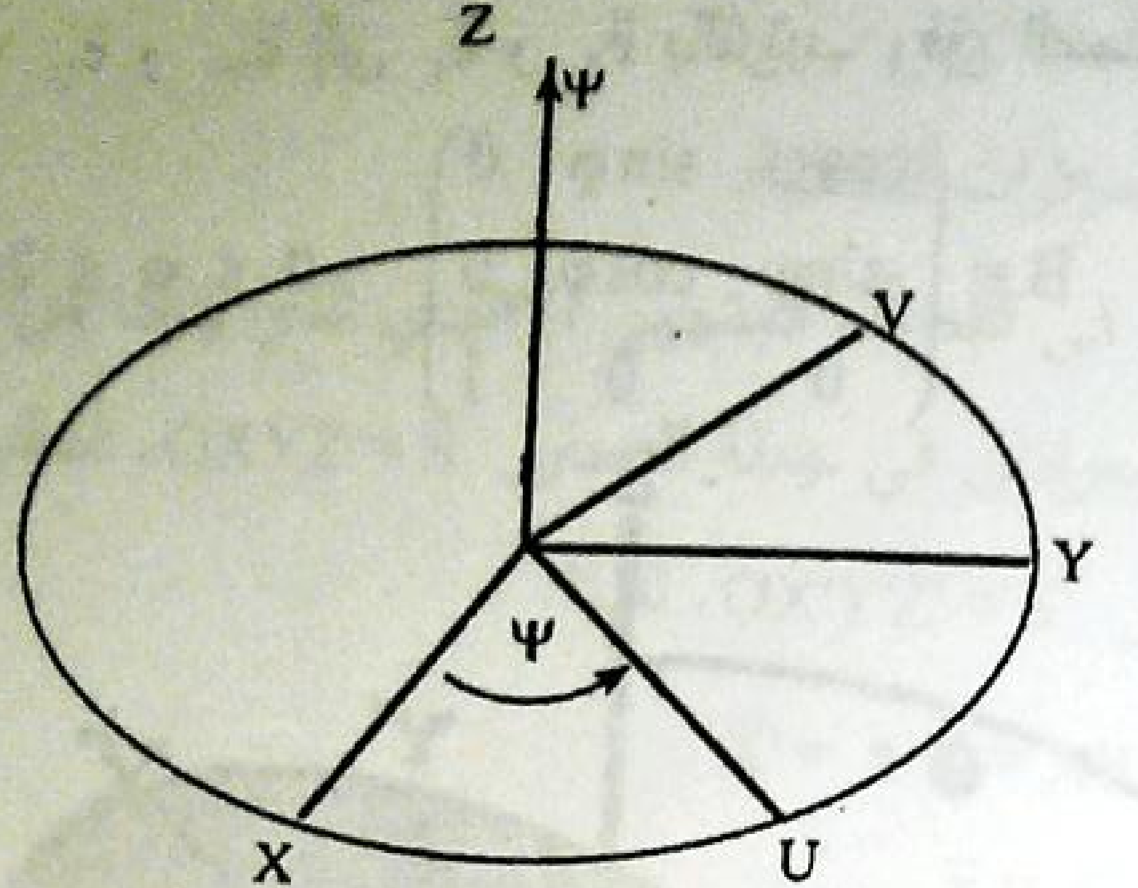
لنحدد أحد أشكال الدورانات الواجب القيام بها للانتقال من جملة متعامدة OXYZ، نرمز لمتجهات القاعدة فيها بـ $\vec{e}_i$ $i = 1,2,3$، إلى جملة أخرى متعامدة OX'Y'Z' متجهات القاعدة فيها $\vec{e}'_i$. إنها بالضرورة ثلاث دورانات كما أشرنا في الملاحظة 3.

1- نبدأ بدوران حول OZ بزاوية ψ، الشكل.5_1. ينتقل فيها المحوران OX، OY إلى OU، OV. إن المصفوفة التي تنقلنا من المتجهتين $\vec{e}_1$، $\vec{e}_2$ إلى $\vec{e}_U$ و $\vec{e}_V$ هي

$$D = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad o \le \psi \le 2\pi \quad (1.15)_1$$

[1] وضعنا في آخر هذا الفصل ملحقاً يوجز مبتدآت نظرية الزمر والفضاء التآلفي اللازمة لنا هنا.

$\vec{\psi}' = \frac{d\vec{\psi}}{dt}$ محمولة على OZ.

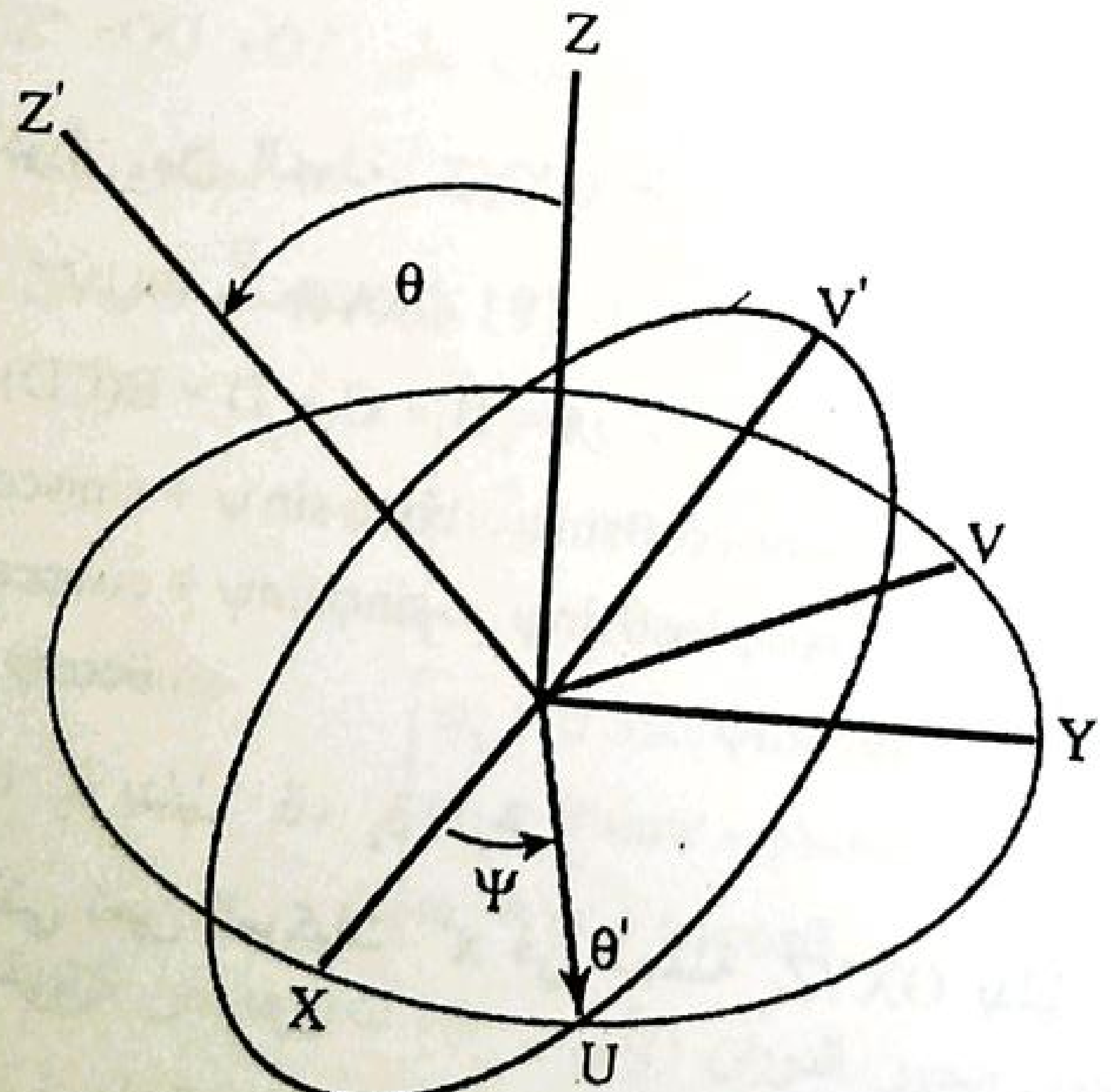


الشكل.5_1

2- ندير المستوى المعين بالمحورين OV و OZ بزاوية θ حول OU، المسمى لهذا السبب بالخط العقدي، الشكل.5_2، فتنتقل المتجهات $\bar{e}_V$، $\bar{e}_3$ إلى $\bar{e}_{V'}$، $\bar{e}'_3$ وفق المصفوفة

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad 0 \leq \theta \leq \pi \qquad (1.15)_2$$

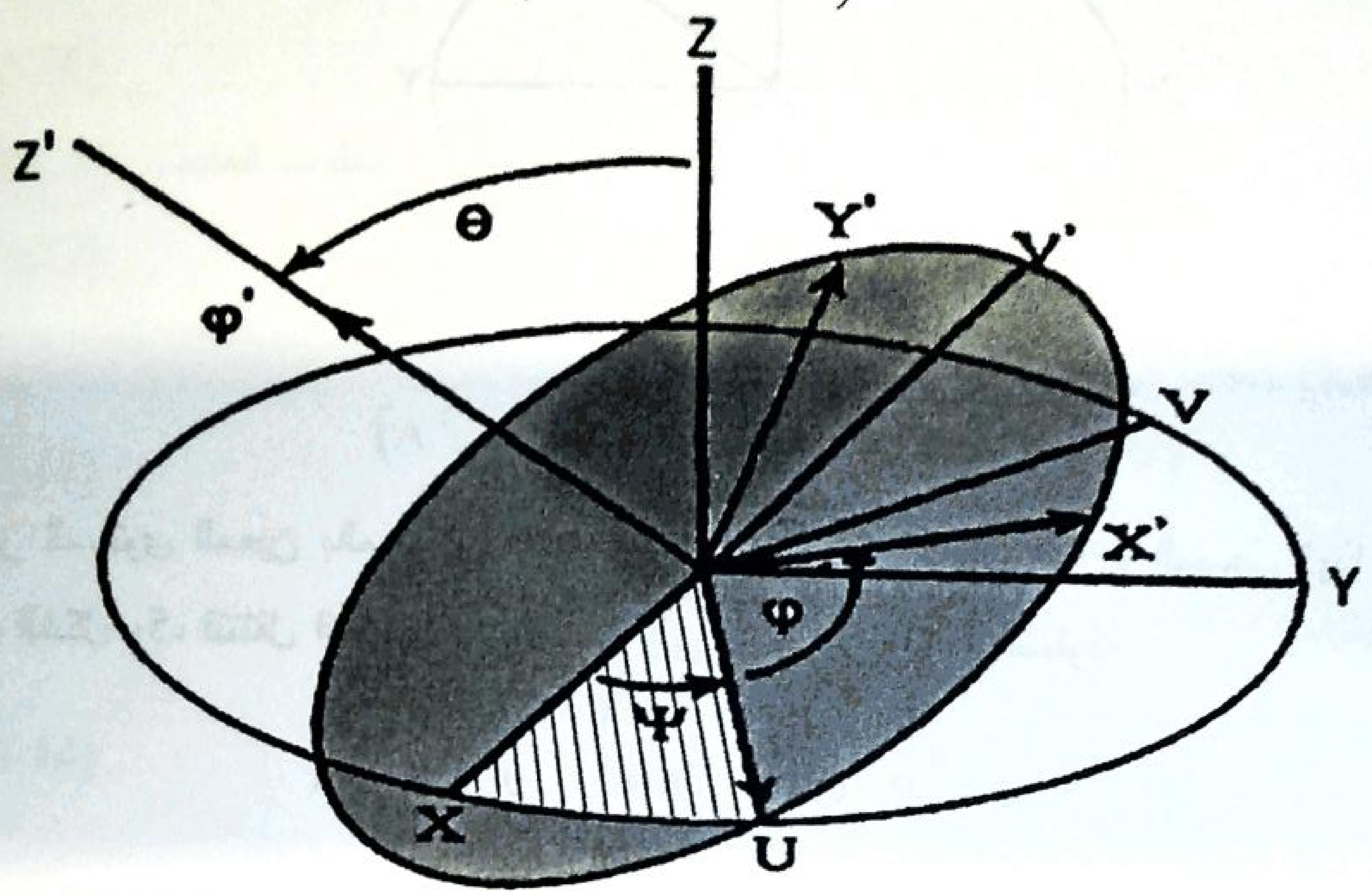
θ' محمولة على OU.



الشكل.5_2

3- ندير أخيراً المستوي OUV' بزاوية φ حول OZ' لنطبق OU على OX' و OV' على OY'، الشكل.5_3. فتنتقل المتجهات $\vec{e}_U$ و $\vec{e}_{V'}$ إلى $\vec{e}'_1$ و $\vec{e}'_2$ بالترتيب وفق المصفوفة

$$B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi \qquad (1.15)_3$$



الشكل.5_3

ونكون بذلك قد أتممنا الدوران من الجملة $OXYZ$ إلى الجملة $OX'Y'Z'$: وحصيلة الدوران هي

$$OXYZ \xrightarrow{D} OUVZ \xrightarrow{C} OUV'Z' \xrightarrow{B} OX'Y'Z'$$

$$\mathcal{A} = B \circ C \circ D = B(CD) \qquad (1.16)$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi & \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\theta\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta \\ -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\cos\theta\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi & \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & -\sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (1.17)$$

تعين $\mathcal{A}$ المتجهات $\vec{e}'_1$، $\vec{e}'_2$، $\vec{e}'_3$ بدليل $\vec{e}_1$، $\vec{e}_2$، $\vec{e}_3$.

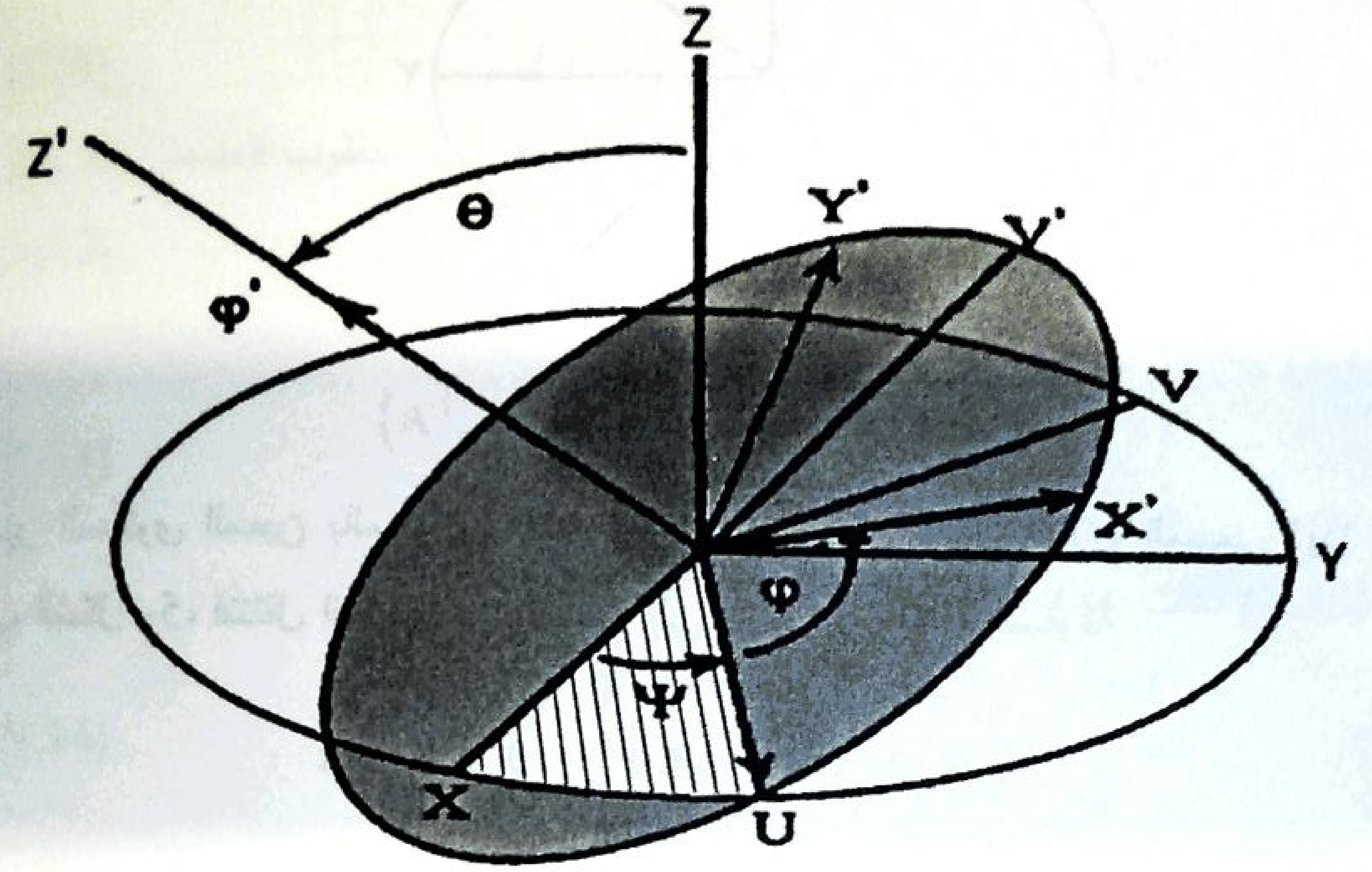
لننظر الآن إلى المصفوفة التي تعين المركبات x^i في الجملة $OXYZ$ بدليل المركبات x'^i في الجملة $OX'Y'Z'$ لدينا

$$\sum_i x^i\vec{e}_i = \sum_j x'^j\vec{e}'_j = \sum_{i,j} x'^j \mathcal{A}_j{}^i\vec{e}_i \qquad (1.18)$$

حيث $\mathcal{A}_j{}^i$ هو عنصر السطر j والعمود i و $\vec{e}'_j = \mathcal{A}_j{}^i\vec{e}_i$ ونكون قد عينا كالمعتاد الحد $\vec{e}'_j$ بعناصر السطر j. وقد كتبناها على هذا الشكل لنبين أن الجمع يتم بالنسبة لكل العناصر التي تتكرر في الأعلى والأسفل : $x^i\vec{e}_i = x'^j\mathcal{A}_j{}^i\vec{e}_i$ مستغنين على هذا النحو من وضع رموز الجمع Σ. أي أن

3- ندير أخيراً المستوي OUV' بزاوية φ حول OZ' لنطبق OU على OX' و OV' على OY'، الشكل.5_3. فتنتقل المتجهات $\vec{e}_U$ و $\vec{e}_{V'}$ إلى $\vec{e}'_1$ و $\vec{e}'_2$ بالترتيب وفق المصفوفة

$$B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi \qquad (1.15)_3$$



الشكل.5_3

ونكون بذلك قد أتممنا الدوران من الجملة OXYZ إلى الجملة OX'Y'Z' : وحصيلة الدوران هي

$$OXYZ \overset{D}{\rightarrow} OUVZ \overset{C}{\rightarrow} OUV'Z' \overset{B}{\rightarrow} OX'Y'Z'$$

$$\mathcal{A} = B \circ C \circ D = B(CD) \qquad (1.16)$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi & \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\theta\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta \\ -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\cos\theta\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi & \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & -\sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (1.17)$$

تعين $\mathcal{A}$ المتجهات $\vec{e}'_1$، $\vec{e}'_2$، $\vec{e}'_3$ بدليل $\vec{e}_1$، $\vec{e}_2$، $\vec{e}_3$.

لننظر الآن إلى المصفوفة التي تعين المركبات x^i في الجملة OXYZ بدليل المركبات x'^i في الجملة OX'Y'Z' لدينا

$$\sum_i x^i\vec{e}_i = \sum_j x'^j\vec{e}'_j = \sum_{i,j} x'^j\mathcal{A}_j^{\ i}\vec{e}_i \qquad (1.18)$$

حيث $\mathcal{A}_j^{\ i}$ هو عنصر السطر j والعمود i و $\vec{e}'_j = \mathcal{A}_j^{\ i}\vec{e}_i$ ونكون قد عينا كالمعتاد الحد $\vec{e}'_j$ بعناصر السطر j. وقد كتبناها على هذا الشكل لنبين أن الجمع يتم بالنسبة لكل العناصر التي تتكرر في الأعلى والأسفل : $x^i\vec{e}_i = x'^j\mathcal{A}_j^{\ i}\vec{e}_i$ مستغنين على هذا النحو من وضع رموز الجمع Σ. أي أن

$$x^i = \mathcal{A}_j{}^i x'^j$$

أو بعبارة أخرى

$$x^i = \tilde{\mathcal{A}}^i{}_j x'^j \qquad (1.19)$$

لننظر كذلك إلى كيفية تحول المؤثرات الخطية.

ليكن لدينا المؤثر الخطي B في الفضاء المتجهي الإقليدي الذي ينقلنا من المتجهة $\vec{x}$ إلى المتجهة $\vec{X}$ حيث $\vec{X} = B\vec{x}$ و $\vec{X}$ و $\vec{x}$ معرفتان في جملة المحاور OXYZ = S. لننظر إلى كيفية تحول المؤثر B عندما ننتقل إلى جملة المحاور OX'Y'Z' = S'. لدينا :

$$\vec{X}' = \mathcal{A}\,\vec{X} = \mathcal{A}B\,\vec{x}$$

لكن

$$\vec{x} = \mathcal{A}^{-1}\vec{x}'$$

ومنه

$$\vec{X}' = \mathcal{A}\,B\,\mathcal{A}^{-1}\,\vec{x}'$$

أي أن شكل المؤثر في جملة المحاور الجديدة هو

$$B' = \mathcal{A}\,B\,\mathcal{A}^{-1} \qquad (1.20)$$

لنفرض الآن أن B دوران حول محور ثابت أي أن B مستقل عن جملة المحاور : B' = B، لدينا $B\vec{x} = \vec{X}$ و $B\vec{x}' = \vec{X}'$ أي أن

$$B\,\mathcal{A}\,\vec{x} = \mathcal{A}\,B\,\vec{x} \quad ; \quad B\,\mathcal{A} = \mathcal{A}\,B = I \qquad (1.21)$$

$$B = \mathcal{A}^{-1} = \tilde{\mathcal{A}}$$

و B هو تدوير لجملة المحاور في الاتجاه المعاكس.

تعني هذه العلاقة أن تدوير متجهة ما $\vec{x}$ بالمؤثر B هو تدوير لجملة المحاور في الاتجاه المعاكس.

يمكننا الآن انطلاقاً من ψ'، θ'، φ' المحمولة بالترتيب على OZ، OU، OZ' حساب مركبات المتجهة الشبيهة $\vec{\omega}$ على المحاور S' = OX'Y'Z' و S = OXYZ إما مباشرة بأخذ مساقطها أو انطلاقاً من المصفوفات D، C، B، $\mathcal{A}$ والعلاقات (1.18)، (1.19) فنحصل على :

$$\begin{cases} \omega_{x'} = \psi'\sin\theta\,\sin\varphi + \theta'\cos\varphi \\ \omega_{y'} = \psi'\sin\theta\,\cos\varphi - \theta'\sin\varphi \\ \omega_{z'} = \psi'\cos\theta + \varphi' \end{cases} \qquad (1.22)$$

$$\begin{cases} \omega_x = \theta'\cos\psi + \varphi'\sin\theta\,\sin\psi \\ \omega_y = \theta'\sin\psi - \varphi'\sin\theta\cos\psi \\ \omega_z = \psi' + \varphi'\cos\theta \end{cases} \qquad (1.23)$$

لنرمز إلى زاوية الدوران حول محور الدوران الآني بـ Θ، لتمييزها عن الزاوية θ، زاوية الدوران حول الخط العقدي. لما كانت القيم الخاصة هي 1، $e^{i\Theta}$، $e^{-i\Theta}$ فإن مجموع القيم الخاصة يساوي لأثر المصفوفة $\mathcal{A}$

$$1 + e^{i\Theta} + e^{-i\Theta} = \mathcal{A}^1_1 + \mathcal{A}^2_2 + \mathcal{A}^3_3 \quad \text{أي} \quad 1 + 2\cos\Theta$$

لدينا من (1.17)

$$1 + 2\cos\Theta = \cos\theta\left(1 + \cos\varphi\,\cos\psi - \sin\varphi\,\sin\psi\right) + \cos\varphi\,\cos\psi - \sin\varphi\,\sin\psi \qquad (1.24)$$
$$= \cos\theta\left(1 + \cos(\varphi + \psi)\right) + \cos(\varphi + \psi)$$

أي أن

$$4\cos^2\frac{\Theta}{2} - 1 = 2\cos\theta\cos^2\frac{\varphi+\psi}{2} + 2\cos^2\frac{\varphi+\psi}{2} - 1$$

ومنه

$$2\cos^2\frac{\Theta}{2} = \cos^2\frac{\varphi+\psi}{2}(1+\cos\theta)$$

$$= 2\cos^2\frac{\varphi+\psi}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}$$

وبأخذنا الجذر الموجب في هذه المعادلة، لأن $\pi \leq \Theta$ و $\cos\frac{\Theta}{2}$ موجب دوماً نجد

$$\cos\frac{\Theta}{2} = \cos\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2} \tag{1.24'}$$

2. طاقة الجسم الصلب الحركية

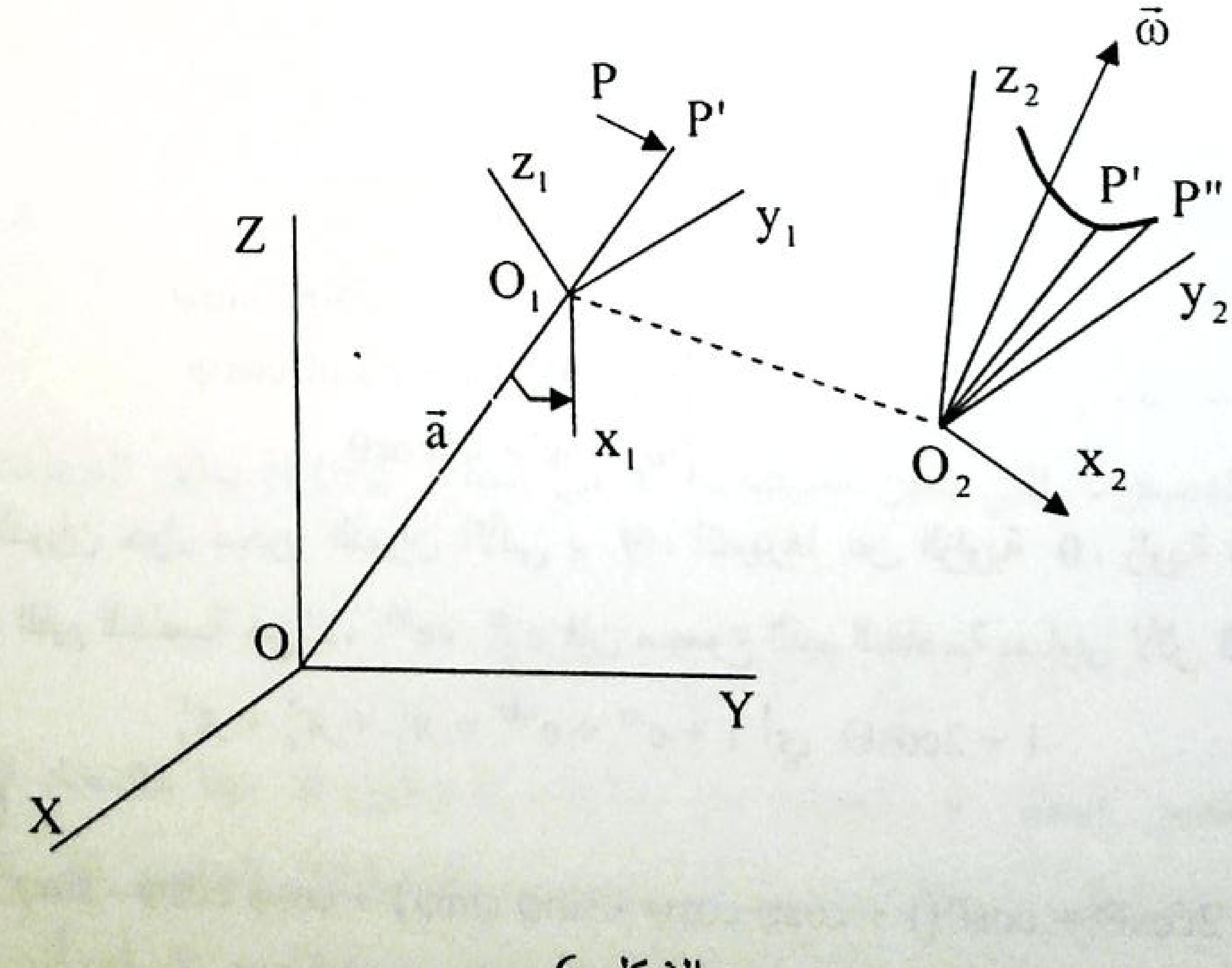
1.2– التركيب العام للسرعة :

لنكتب انتقال أي نقطة P، بالنسبة لجملة محاور ثابتة OXYZ على شكل انتقال بالنسبة لجملة محاور متحركة $O_1x_1y_1z_1$ وانتقال هذه الجملة ككل بفعل عنصر من الزمرة التآليفية، أي نتيجة انسحاب ودوران يجعلها على الشكل $O_2x_2y_2z_2$، الشكل.6.

لنكتب هذا الانتقال على الشكل التالي

$$\overline{\Delta P} = \overline{OP'} - \overline{OP}$$

$$= \left(\overline{OO_1} + \overline{O_1O_2} + \overline{O_2P''}\right) - \left(\overline{OO_1} + \overline{O_1P}\right)$$



الشكل.6

نضيف ونطرح من الطرف الثاني المتجهة $\overline{O_1P'}$ التي تعين انتقال P بالنسبة لجملة المحاور المتحركة بحيث يصبح $\overline{\Delta P}$

$$\overline{\Delta P} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_1P'} - \overline{O_1P} + \overline{O_2P''} - \overline{O_1P'}$$

نبدل في الحد الأخير $\overline{O_1P'}$ بـ $\overline{O_2P'}$ المساوي له لإننا قمنا بانسحاب $O_1x_1y_1z_1$ إلى $O_2x_1y_1z_1$ قبل القيام بالدوران الذي يأخذ المتجهة $\overline{O_2P'}$ إلى $\overline{O_2P''}$. ونكتب عندما تتناهى $\overline{\Delta P}$ نحو الصفر مع تناهي زمن الانتقال Δt إلى الصفر.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d'\overline{P}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (2.1)$$

حيث $\vec{\omega}$ هي السرعة الزاوية المحمولة على محور الدوران الآني، $\vec{r}$ هي المتجهة $\overline{O_2P'} = \overline{O_1P'}$، وحيث $\frac{d'\overline{P}}{dt}$ هو مشتق المتجهة $\overline{O_1P}$ بالنسبة لجملة المحاور المتحركة $O_1x_1y_1z_1$ $\frac{d'\overline{P}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left(\overline{O_1P'} - \overline{O_1P}\right)}{\Delta t}$

وهكذا فإن سرعة النقطة P بالنسبة لجملة المحاور الغاليلية الثابتة، OXYZ، ولنسمها السرعة المطلقة $\vec{V}_a$، مؤلفة من السرعة النسبية بالنسبة لجملة المحاور المتحركة $\vec{V}_r = \frac{d'\overline{P}}{dt}$ مضافاً إليها سرعة هذه الجملة الصلبة، ونسميها سرعة الجر $\vec{V}_e$، وهي مجموع السرعة الانسحابية والسرعة الدورانية ونكتب (2.1) على الشكل

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r = \frac{d\vec{a}}{dt} + \vec{\omega} \times r + \frac{d'\overline{P}}{dt} \qquad (2.1)$$

يمكننا كتابة هذا التركيب بالعودة إلى الإحداثيات وكتابة $\vec{r}$ في جملة الإحداثيات $O_1x_1y_1z_1$ أو $(O_2x_1y_1z_1)$ على الشكل $x^i\vec{e}_i = \vec{r}$ حيث $\vec{e}_i$ $(i = 1,2,3)$ هي المتجهات الواحدية على هذه المحاور و x^i هي المركبات (x, y, z) $\overline{OP} = \overline{OO_1} + x^i\vec{e}_i$

$$\frac{d\overline{P}}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} + x'^i\vec{e}_i + x^i\vec{e}'_i \qquad (2.1)'$$

لكن مشتق المتجهة $\vec{e}_i$ في الحركة الدورانية هو $\frac{\overline{de_i}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}_i$، أي أن الحد الأخير في الطرف الثاني هو $\vec{\omega} \times \vec{r}$ والحد $x'^i\vec{e}_i$ هو $\frac{d\vec{r}}{dt}$ في جملة المحاور المتحركة $O_1x_1y_1z_1$. والخلاصة إن $\frac{d'\overline{P}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

ونجد من جديد (2.1)

$$\frac{d\overline{P}}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r} + \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (2.1)''$$

<u>درجات الحرية</u>

عندما تكون P نقطة من جسم صلب فإن مركبات $\vec{r}$ ثابتة بالنسبة للجملة المرتبطة بالجسم وتصبح حركة النقطة حركة جر بحت. هذا يعني أن وضع الجسم الصلب، وضع جملة المحاور المرتبطة به

يتعين بإعطاء ستة وسطاء، ثلاثة منها تعين وضع نقطة ما منه، النقطة O_1 التي يعينها الانسحاب $\overline{OO_1} = \vec{a}$، وثلاثة أخرى هي وسطاء الدوران التي تختزل إليها مصفوفة الدوران، إنها زوايا أولر على سبيل المثال. ولذا نقول إن للجسم الصلب ست درجات حرية.

توجد في كثير من الأحيان شروط تقيد حركة الجسم الصلب، تقيد حركته، بأن نلزم الكرة مثلاً بالبقاء مماسة لسطح معين، لمستو ثابت، بالبقاء على سطح الأرض. يتعين وضع التماس بوسيطين فقط، بدرجتي حرية عوضاً عن ثلاثة. وقد يتعين بوسيط واحد إذا لزم على مركز الكرة أن يبقى على منحن محدد والوسيط في هذه الحالة هو الفاصلة المنحنية للنقطة – وضع المركز بالنسبة لنقطة مختارة كمبدأ على المنحني. كما تختزل وسطاء الدوران الثلاثة إلى واحدة إذا فرض على الجسم الدوران حول محور ثابت الخ.

تسمى الشروط التي تقيد حرية الحركة وتنقص عدد درجات الحرية بالصلات.

ملاحظة :

لنعد إلى سرعة النقطة P من الجسم الصلب التي أصبحت سرعة جر فقط ونكتب

$$\vec{V}_P = \vec{V}_e = \frac{d\vec{a}}{dt} + \vec{\omega} \times r = V_{O_1} + \vec{\omega} \times r \qquad (2.1)'''$$

إن متجهة السرعة الزاوية $\vec{\omega}$ مستقلة عن جملة المحاور المختارة : لنفرض أننا اخترنا نقطة أخرى O'_1 عوضاً عن O_1 تبعد عنها المسافة الثابتة ℓ (لأن الجملتين مرتبطتان بالجسم الصلب)؛ $\vec{\ell} = \overline{O'_1O_1}$ وليكن $\vec{r}'$ نصف القطر المتجه الذي يعين P بالنسبة لـ O'_1 و $\vec{\omega}'$ متجهة السرعة الزاوية للجملة الجديدة $O'_1x'_1y'_1z'_1$ بالنسبة للجملة الثابتة. لدينا من جهة $\vec{r}' = \vec{\ell} + \vec{r}$

$$\vec{V}_P = \vec{V}_{O'_1} + \vec{\omega}' \times \vec{r}' = \vec{V}_{O'_1} + \vec{\omega}' \times (\vec{\ell} + \vec{r})$$

ومن جهة أخرى

$$\vec{V}_P = \vec{V}_{O_1} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

تظهر المقارنة بين هذين التعبيرين المتساويين، حيث $\vec{V}_{O'_1} = V_{O_1} - \vec{\omega}' \times \vec{\ell}$، أن $\vec{\omega} = \vec{\omega}'$ والسرعة الزاوية $\vec{\omega}$ مستقلة إذاً عن جملة المحاور : تدور كل الجمل في لحظة معينة حول محاور متوازية فيما بينها وبنفس السرعة الزاوية. بينما لا تتمتع السرعة الانسحابية بهذه الميزة المطلقة. إن

$$\vec{V}_{O_1} = \vec{V}_{O'_1} + \vec{\omega} \times \vec{\ell} \qquad (2.2)$$

والصفة المميزة الوحيدة هي أنه إذا وقع $\vec{V}_{O_1}$ و $\vec{\omega} \times \vec{\ell}$ في مستو واحد، أي إذا كان $\vec{\omega}$ عمودياً على $\vec{V}_{O_1}$ في لحظة معينة، فإن هذا هو حال $\vec{V}_{O'_1}$ أيضاً : $\vec{\omega} \perp \vec{V}_{O_1} \Leftarrow \vec{\omega} \perp \vec{V}_{O'_1}$. هذا يعني أن حركة كل النقاط P واقعة في مستو واحد عمودي على محور الدوران. إنه من الممكن دوماً اختيار النقطة O'_1 بحيث يكون الانسحاب $\vec{V}_{O'_1}$ مساوياً للصفر. يكفي لتحقيق ذلك اختيار المتجهة $\vec{\ell}$ الواقعة في المستوى

العمودي على محور الدوران بحيث يكون $|\ell| = \frac{|V_{o_1}|}{|\omega|}$، هكذا تصبح حركة الجسم الصلب حركة دورانية صرفة حول محور دوران آني.

أما في الحالة العامة حيث لا يقع $\vec{V}_{o_1}$ و $\vec{\ell} \times \vec{\omega}$ في مستو واحد فإن الجداء $\vec{V}_{o_1} \cdot \vec{\omega} = \vec{V}_{o_1} \cdot \vec{\omega}$ في كل الأحوال والفرق بينهما هو الفرق بين المسقطين العموديين على $\vec{\omega}$: $\vec{V}_{o_{1\perp}} - \vec{V}_{o_{1\perp}}$ وهذا الفرق هو تحديداً $\vec{\ell} \times \vec{\omega}$. وهكذا يمكننا اختيار النقطة O_1 كما في الحالة السابقة $|\ell| = \frac{|V_{o_{1\perp}}|}{|\omega|}$ بحيث تكون السرعة الانسحابية $\vec{V}_{o_1}$ موازية لمحور الدوران $\vec{V}_{o_{1\perp}} = 0$. ونسمي في هذه الحالة المحور المار من O_1 المحور المركزي : $\vec{V}_{o_1} \parallel \vec{\omega}$.

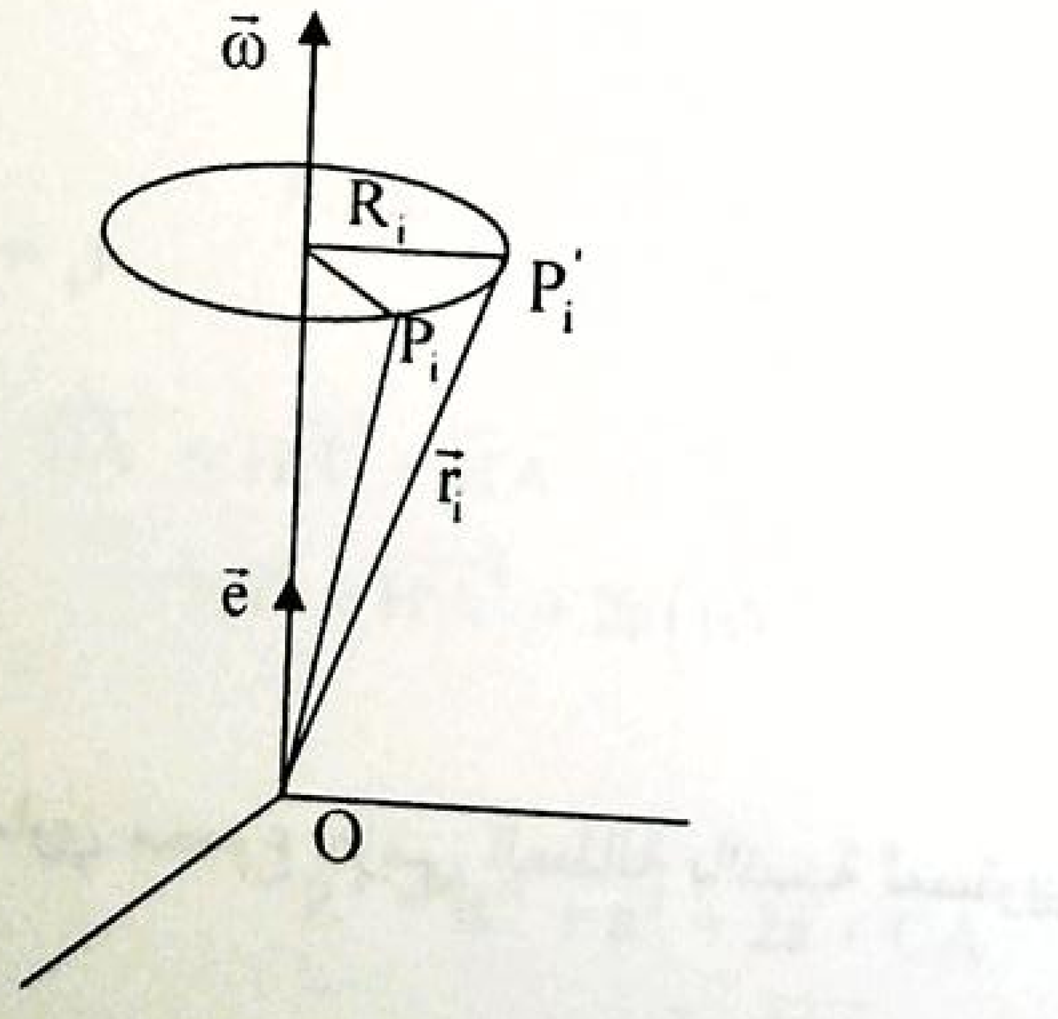
2.2- عزم العطالة :

إن السرعة الدورانية لنقطة ما P_i من الجسم الصلب المعين وضعها بالمتجهة $\vec{r}_i = O\vec{P}_i$، الشكل.7، هي حسب (2.1)

$$\left|\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right| = \left|\vec{\omega} \times \vec{R}_i\right| = \omega R_i \qquad (2.2)$$

حيث R_i نصف قطر الدائرة التي ترسمها النقطة P_i في حركتها حول محور الدوران. وبالتالي فإن الطاقة الحركية الدورانية لمجموع النقاط P_i، ذات الكتل m_i، التي يتألف منها الجسم الصلب هي

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \, \omega^2 R_i^2 \qquad (2.3)$$



الشكل.7

تعريف 1 :

نسمي عزم عطالة الجسم الصلب بالنسبة لمحور الدوران المقدار

$$I = \sum_i m_i R_i^2 \qquad (2.4)$$

ونكتب (2.3) على الشكل

$$T_{rot} = \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad (2.5)$$

عندما يكون توزيع الكتل متصلاً عندما يحتل الجسم الصلب حيزاً متصلاً من الفضاء، وليكن Ω، فإن عزم العطالة بالنسبة لمحور الدوران يأخذ شكل تكامل ثلاثي عوضاً عن الجمع وتكتب (2.4) على الشكل

$$I = \iiint_\Omega \rho\, R^2 d\tau = \iiint_\Omega R^2 dm \qquad (2.4)'$$

حيث ρ كثافة الكتلة و $d\tau$ عنصر الحجم $d\tau = dxdydz$. يمكن بطبيعة الحال إخراج كثافة الكتلة من تحت إشارة التكامل إذا كانت ثابتة، أي إذا كان الجسم الصلب متجانساً. وهكذا فإن معرفة الطاقة الحركية يتوقف على معرفة عزم العطالة بالنسبة للمحور الذي يدور الجسم الصلب حوله. لنسمي اتجاه هذه المحور OZ بحيث يكتب عزم العطالة بالنسبة له على الشكل

$$I_z = \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) \qquad (2.6)$$

تعريف 2 :

نطلق على المقدار $I_{yz} = \sum_i m_i x_i^2$ اسم عزم العطالة بالنسبة للمستوى yz وكذلك $I_{zx} = \sum_i m_i y_i^2$ عزم العطالة بالنسبة للمستوى zx ومنه

$$I_z = I_{yz} + I_{xz} \qquad (2.6)'$$

وبالتالي

قضية 1 :

إن عزم العطالة بالنسبة لمحور ما يساوي مجموع عزمي العطالة بالنسبة لمستويين متعامدين يقطعان هذا المحور.

تعريف 3 :

نسمي عزم العطالة بالنسبة للنقطة O المقدار

$$I_o = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i \left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

وحسب العلاقة '(2.6)

$$I_o = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y + I_z\right) \qquad (2.7)$$

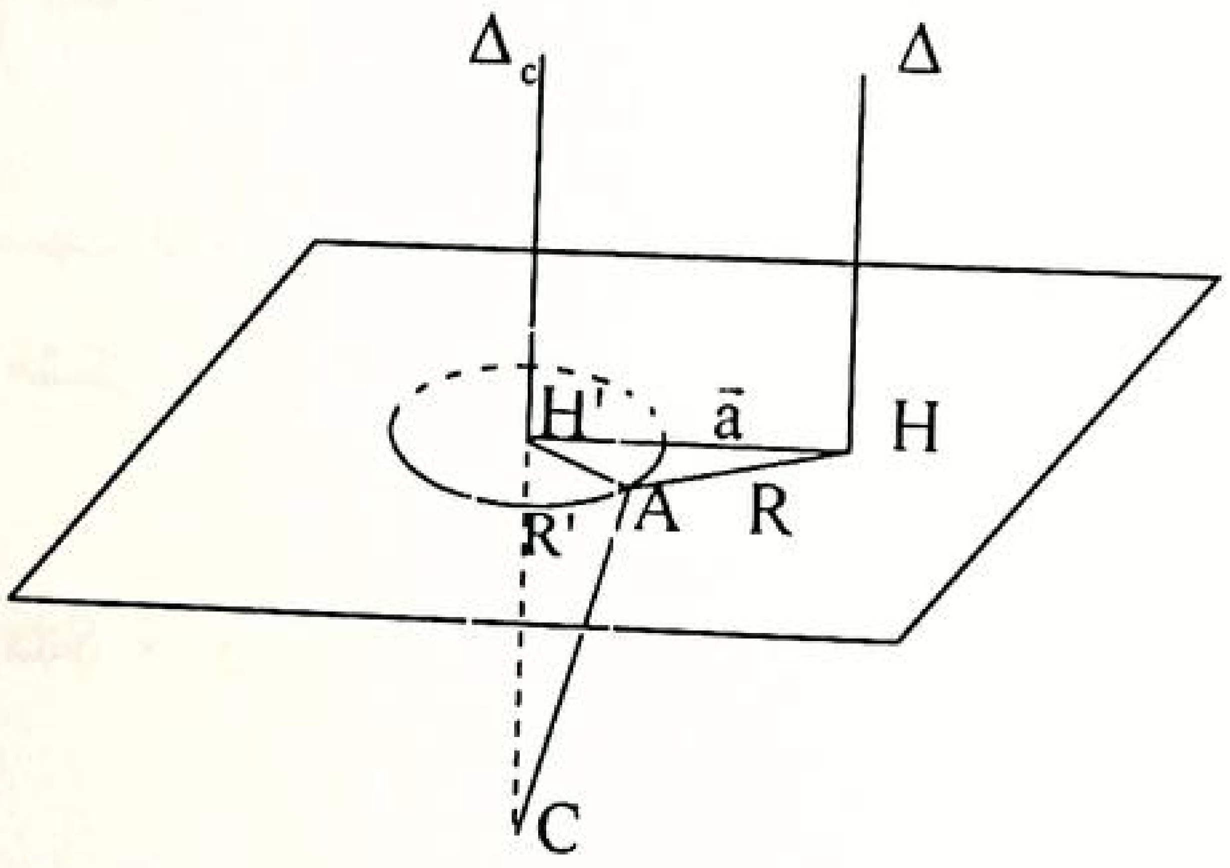
قضية 2 :

إن عزم العطالة بالنسبة لنقطة ما يساوي لنصف مجموع عزوم العطالة بالنسبة لثلاثة محاور متعامدة مارة بهذه النقطة.

لدينا أخيراً القضية التالية :

قضية 3 :

إن عزم عطالة جسم صلب S بالنسبة لمحور ما Δ يساوي لمجموع عزم عطالة هذا الجسم بالنسبة لمحور Δ_C مواز للأول ومار من مركز كتلة الجسم وعزم عطالة الكتلة الكلية المتمركزة في مركز الكتلة بالنسبة لـ Δ. ليكن H و H' مسقطي العمودين المسطقين من النقطة A على Δ و Δ_C. إن المتجهة $\overline{HH'}$ متجهة ثابتة $\vec{a}$ طولها هو المسافة بين المحورين Δ و Δ_C، لدينا، الشكل. 8 :



الشكل.8

$$\overline{HA} = \overline{HH'} + \overline{H'A}$$
$$\overline{HA}^2 = \overline{HH'}^2 + \overline{H'A}^2 + \overline{2H'A} \cdot \overline{HH'}$$
$$= \vec{a}^2 + \overline{H'A}^2 + 2\vec{a}\left(\overline{H'C} + \overline{CA}\right)$$

أي أن

$$R^2 = R'^2 + a^2 + 2\vec{a} \cdot \overline{CA}$$

لأن

$$\vec{a} \cdot \overline{H'C} = 0$$

وبأخذ كل المسافات R_i^2 بالنسبة لكل نقاط الجسم الصلب A_i وضربها بالكتل m_i نحصل على عزم العطالة

$$I = \sum m_i R_i^2 = \sum m_i R_i'^2 + \sum m_i a^2 + 2\vec{a}\sum m_i \overline{CA_i}$$

ولما كانت C هي مركز الكتلة فإن $\sum m_i \overline{CA_i}$ يساوي الصفر تعريفاً

$$I = I_C + Ma^2 \qquad (2.8)$$

حيث $\sum m_i = M$ هي الكتلة الكلية.

نرى من هذه العلاقة أن عزم العطالة، من أجل عدد ما من المحاور المتوازية، يكون أصغرياً وبالتالي تكون الطاقة الحركية أصغرية عندما يمر المحور من مركز الكتلة C.

<u>أمثلة :</u>

1- لنأخذ الجسم الصلب المؤلف من ثلاث نقاط مادية A(30g) B(10g) و C(20g) الموضوعة في رؤوس مثلث قائم الزاوية في B

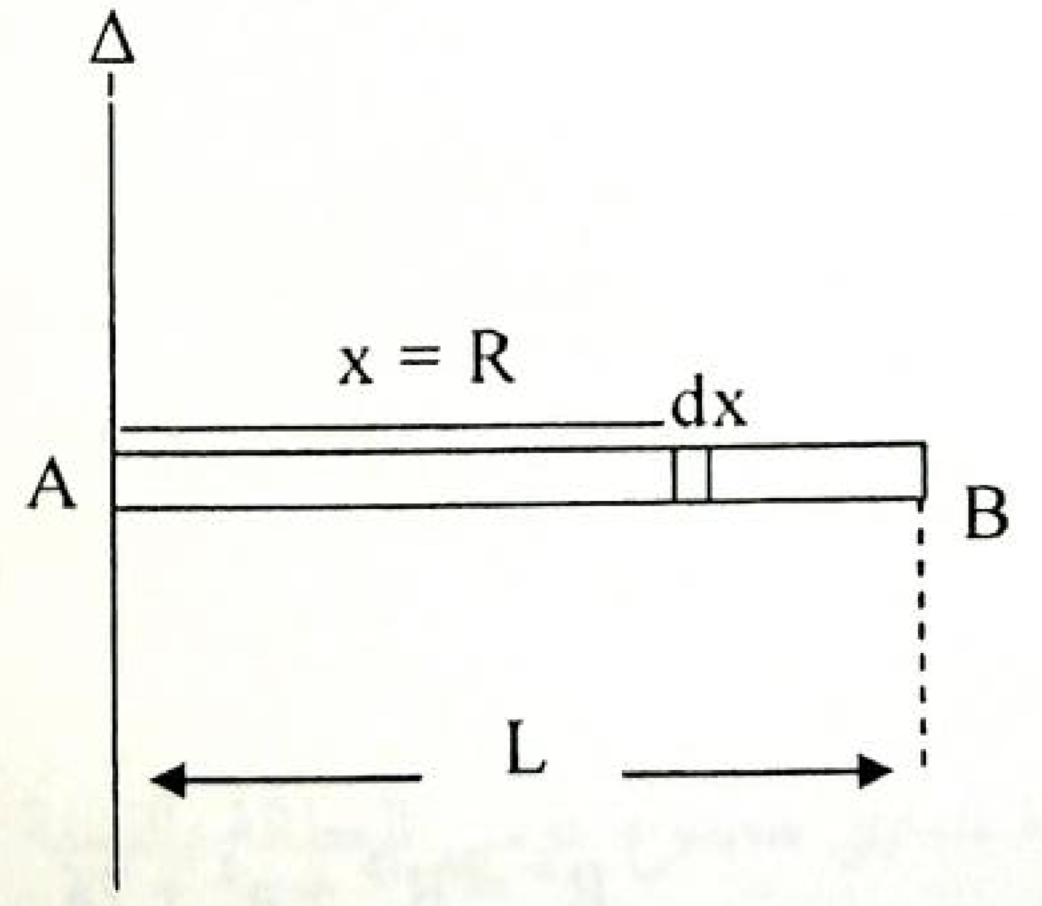
$$CA = 4cm \quad ، \quad BC = 3cm \quad ، \quad AB = 5cm$$

إن عزم العطالة بالنسبة لكل ضلع من أضلاع هذا المثلث يقتصر على حد واحد (فبالنسبة لـ BC مثلاً لدينا $I = mAC^2 = 30 \times 16$ أما بالنسبة لمحور مار من A وعمودي على مستوى المثلث ABC فلدينا:

$$I = 10 \times (5)^2 + 20 \times (4)^2 = 570\ g \times cm^2$$

2- لنحسب عزم عطالة قضيب اسطواني طوله L ومقطعه S بالنسبة لمحور Δ عمودي على القضيب ومار من أحد طرفيه A، الشكل.9؛ إن عزم عطالة عنصر الطول dx الذي يبعد مسافة قدرها x = R عن A هو

$$R^2dm = \rho R^2dv = \rho x^2 \times Sdx$$



الشكل.9

وعزم العطالة الكلي هو

$$I = \int_0^L R^2dm = \rho S\int_0^L x^2dx = \rho S\frac{L^3}{3}$$

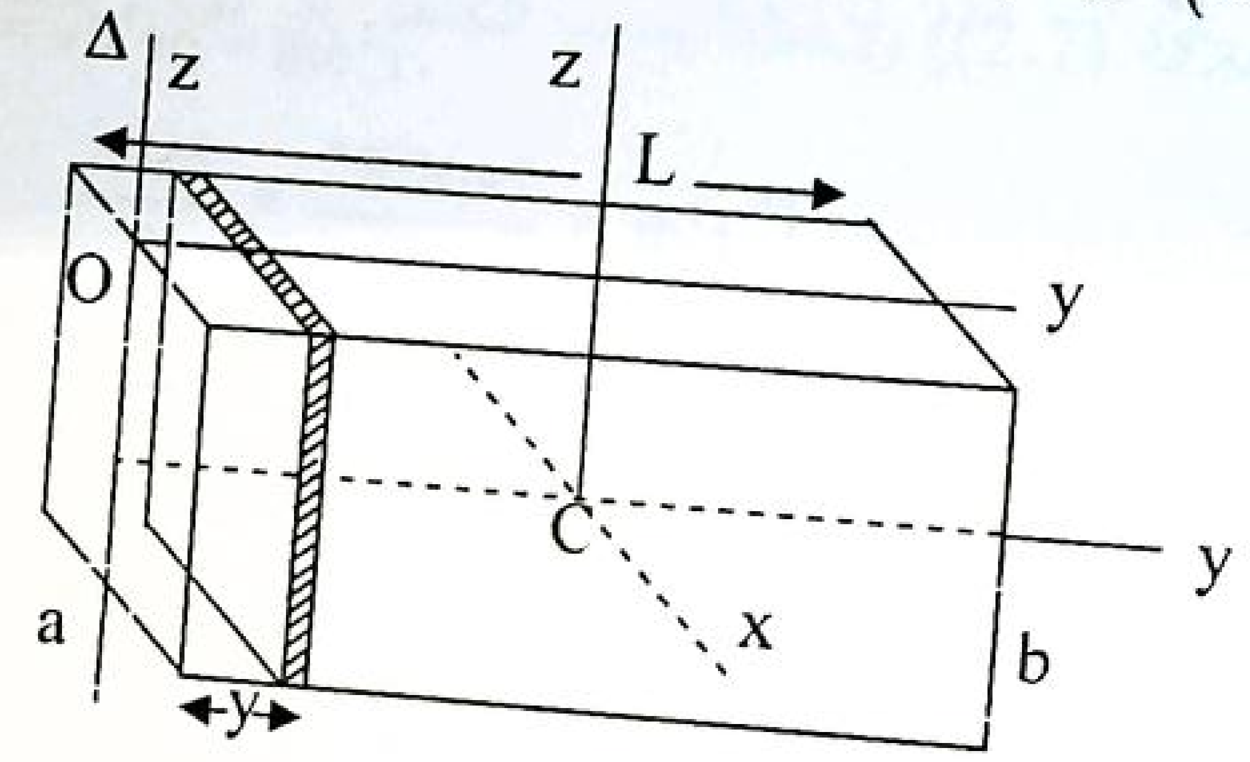
ولما كانت الكتلة الكلية هي $M = \rho SL$ فإن I هو

$$I = \frac{ML^2}{3} \qquad (2.9)$$

أما عزم العطالة I_C النسبة للمحور Δ' الموازي لـ Δ والمار من مركز الكتلة C فهو حسب العلاقة (2.8)

$$I_C = I - M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = M\left(\frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{4}\right) = M\frac{L^2}{12}$$

أما إذا اعتبرنا المقطع S مستطيلاً طوله a وعرضه b والمحور Δ عمودياً على a في منتصفه ومواز لـ b فيجب تطبيق القضية 1 وحساب عزمي العطالة بالنسبة للمستويين المتعامدين zOy و zOx اللذين يتقاطعان حسب المحور $\Delta(Oz)$ لدينا بالنسبة لـ zOx، الشكل.10.



الشكل.10

$$I_{zx} = \int_0^L \rho a b y^2 dy = \frac{\rho a b L^3}{3} = \frac{ML^2}{3}$$

وبالنسبة لـ zOy

$$I_{zy} = 2\int_0^{\frac{a}{2}} \rho b L x^2 dx = \frac{2\rho b L a^3}{3 \cdot 8} = \frac{Ma^2}{12}$$

وكاملنا dx أخذنا شرائح (متوازية مستطيلات كما في الحالة الأولى) قاعدتها هذه المرة bL وارتفاعها dx على كل الشرائح الواقعة على يمين المستوى zOy وعلى يساره.

لدينا إذاً

$$I_\Delta = I_{oz} = I_{zx} + I_{zy} = M\left(\frac{L^2}{3} + \frac{a^2}{12}\right) \qquad (2.10)$$

وبتطبيق العلاقة (2.8) نجد عزم العطالة بالنسبة للمحور Cz الموازي لـ Δ والمار من مركز الكتلة

$$I_{Cz} = M\left(\frac{L^2}{3} + \frac{a^2}{12}\right) - \frac{ML^2}{4} = \frac{M\left(L^2 + a^2\right)}{12} \qquad (2.10)_C$$

نجد بنفس الطريقة أن عزم العطالة بالنسبة لـ Cy هو

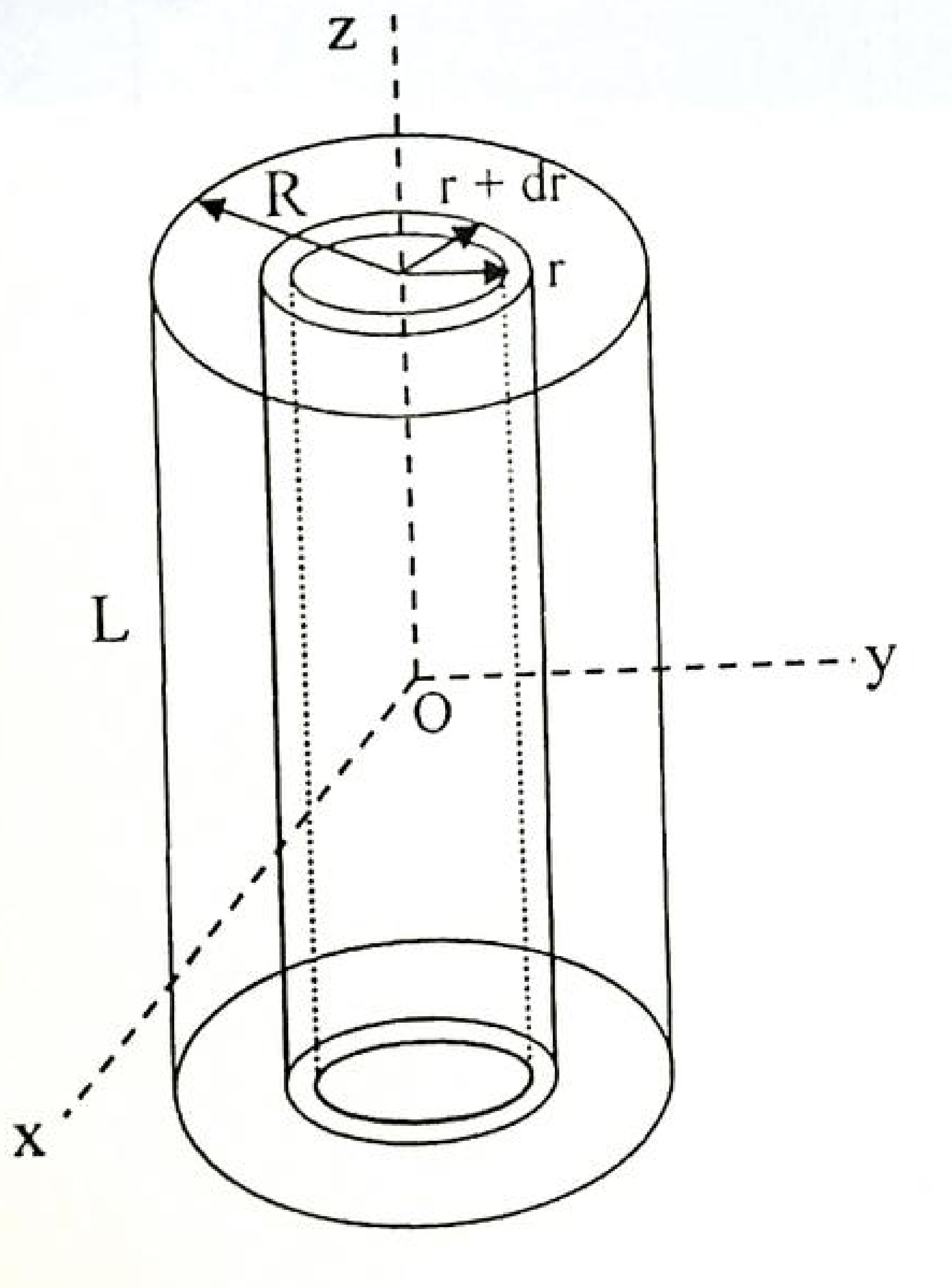
$$I_{Cy} = \frac{M\left(a^2 + b^2\right)}{12}$$

وأخيراً عزم العطالة بالنسبة لـ Cx هو

$$I_{Cx} = \frac{M\left(L^2 + b^2\right)}{12}$$

3- عزم عطالة أسطوانة دائرية نصف قطرها R وارتفاعها L بالنسبة لمحور الأسطوانة Oz. نأخذ شريحة فيها : حلقة أسطوانية نصف قطرها الداخلي r ونصف قطرها الخارجي $r + dr$، الشكل.11 ونحسب عزم عطالة هذه الشريحة بالنسبة لـ Oz : إن حجم هذه الشريحة هو $dv = 2\pi\, rdr \cdot L$ وعزم عطالتها $r^2dm = \rho r^2 dv = 2\pi\rho L \cdot r^3dr$.

$$I_z = \int_o^R r^2dm = 2\pi\rho L \int_o^R r^3dr = \frac{2\pi\rho L R^4}{4} = \frac{MR^2}{2} \qquad (2.11)$$



الشكل.11

إن العزم بالنسبة للمستوى zOx أو بالنسبة لـ zOy هو حسب القضية 1 نصف العزم I_z أما العزم بالنسبة لـ xOy فهو

$$I_{xy} = 2\rho\int_o^{\frac{L}{2}} \pi R^2 z^2 dz = \frac{ML^2}{12} \qquad (2.12)$$

وأخيراً إن عزم العطالة بالنسبة لمحور ما من المستوى xOy مثلاً هو

$$I = I_{xy} + I_{zx} = \frac{ML^2}{12} + \frac{MR^2}{4} \qquad (2.13)$$

4- عزم عطالة كرة نصف قطرها R بالنسبة لمركزها : إن حجم الطبقة الكروية المحصورة بين الكرتين ذاتي نصف القطر r و r + dr هو $4\pi r^2 dr$، الشكل. 12، وبالتالي فإن عزم العطالة بالنسبة للمركز O هو

$$I_o = \int_o^R r^2 dm = \int_o^R r^2 \cdot \rho \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi\rho R^5}{5}$$

ولما كانت الكتلة الكلية هي $M = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho$ فإن

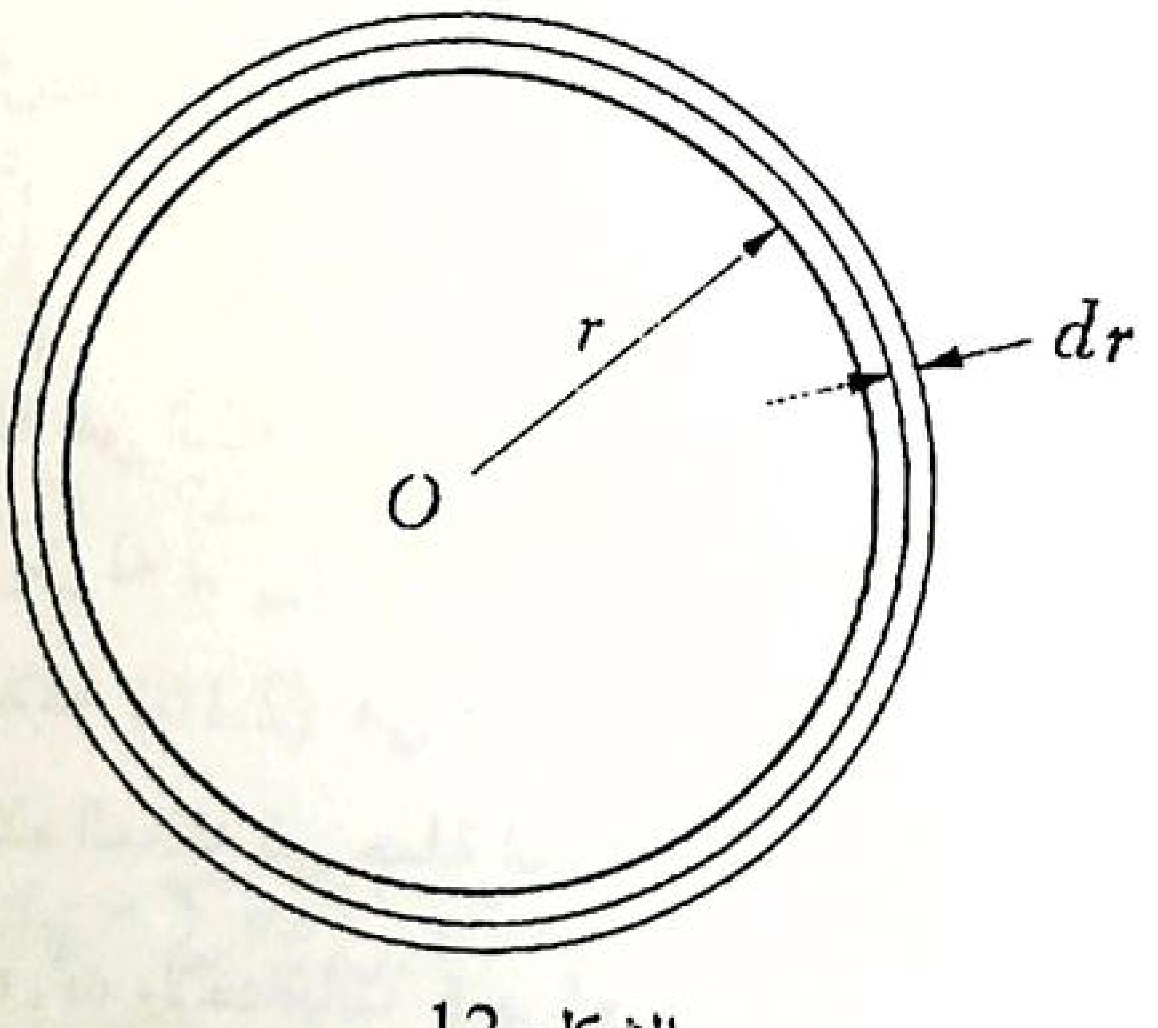
$$I_o = \frac{3MR^2}{5}$$

فإذا طبقنا الآن القضية 2 (العلاقة (2.7)) ولاحظنا بسبب التناظر أن عزوم العطالة متساوية بالنسبة لكل المحاور المارة من O :

$$I = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z) = \frac{3}{2} I_x$$

ومقارنة العلاقتين الأخيرتين يعطي

$$I_x = \frac{2}{5} MR^2 \qquad (2.14)$$



الشكل.12

3.2- الطاقة الحركية – تانسور العطالة :

لننظر الآن إلى الشكل الذي تأخذه الطاقة الحركية الكلية للجسم الصلب، حيث سرعة النقاط i معطاة بالعلاقة (2.1) مع $\frac{d'P_i}{dt} = 0$ وحيث ينطبق مبدأ الجملة المتحركة O_1 على مركز كتلة الجسم، C

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} (\vec{V}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2$$

سنهمل للتبسيط وضع الأدلة i، نضع $M = \sum m$ ونلاحظ أن $0 = \vec{V}_C \cdot \vec{\omega} \times (\sum m\vec{r})$ حسب تعريف مركز الكتلة، يبقى علينا حساب الجداء السلمي لجدائين متجهين. يمكن كتابة هذا الجداء على شكل جداء مختلط.

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{E}$$

حيث سمينا $\vec{C} \times \vec{D} = \vec{E}$ ليصبح الجداء المزدوج.

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{E} = (\vec{E} \times \vec{A}) \cdot \vec{B}$$

$$= \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{E}) = \vec{A} \cdot [\vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{D})]$$

نكتب الحد داخل المعقوفتين حسب ((2.27).2)

$$= \vec{A}\left[(\vec{B} \cdot \vec{D}) \cdot \vec{C} - (\vec{B} \cdot \vec{C}) \cdot \vec{D}\right]$$

$$= (\vec{A} \cdot \vec{C}) \cdot (\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{B} \cdot \vec{C}) \cdot (\vec{A} \cdot \vec{D}) \qquad (2.15)$$

ومنه

$$(\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \omega^2 \cdot r^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2 \qquad (2.15)'$$

وتصبح الطاقة الحركية الكلية

$$T = \frac{MV_C^2}{2} + \frac{1}{2}\sum m\left[\omega^2 r^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2\right] \qquad (2.16)$$

إن الحد الأول في هذه العلاقة هو الطاقة الحركية لمركز الكتلة الناتجة عن الحركة الانسحابية؛ أما الحد الثاني فهو دوراني صرف، نرمز له بـ T_{rot}، ناتج عن الحركة الدورانية بسرعة زاوية ω حول محور مار من مركز الكتلة C. إن العلاقة (2.16) هي شكل آخر لنظرية كونيغ المعطاة بالعلاقة ((3.11).4).

لنكتب الآن الحد الثاني من هذه العلاقة في جملة المقارنة المرتبطة بالجسم.

نرمز لإحداثيات $\vec{\omega}$ بـ $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ ولإحداثيات $\vec{r}$ بـ x^1, x^2, x^3 أو اختصاراً بـ x^j ، $j = 1,2,3$. إن

$$\omega^2 r^2 = \left(\sum_{i=1}^{3} \omega^{i^2}\right)\left(\sum_{\ell=1}^{3} x^{\ell^2}\right)$$

$$= \sum_{i,\ell} \omega^{i^2} x^{\ell^2} \qquad (2.17)$$

لدينا هنا تسعة حدود في الطرف الثاني تعرف الجداء؛ وعلى نفس النهج، نكتب

$$(\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2 = \left(\sum_i \omega^i x^i\right)^2$$

$$= \sum_{i,j} (\omega^i x^i)(\omega^j x^j) = \sum_{i,j} \omega^i \omega^j x^i x^j \qquad (2.18)$$

وهنا أيضاً لدينا في الطرف الأخير تسعة حدود.

لنكتب في الطرف الأخير من (2.17) ω^i بدليل ω^j على الشكل

$$\omega^i = \delta^i_j \omega^j \tag{2.19}$$

حيث δ^i_j هو رمز كرونكر الذي سبق أن استعملناه : $\delta^i_j = 0$ من أجل $i \neq j$ و $\delta^i_i = 1$ ولنجمع العلاقتين (2.17) و (2.18) بعد الأخذ بـ (2.19) بعين الاعتبار

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum m\left(\sum_{i,j,\ell}\omega^i\omega^j\delta^i_j x^{\ell^2} - \sum_{i,j}\omega^i\omega^j x^i x^j\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\omega^i\omega^j\left[\sum m\left(\sum_{\ell} x^{\ell^2}\delta^i_j - x^i x^j\right)\right]$$

نرمز للحد بين المعقوفتين بـ I_{ij} :

$$I_{ij} = \sum m\left(\sum_{\ell} x^{\ell^2}\delta^i_j - x^i x^j\right) = \sum m\left(r^2\delta^i_j - x^i x^j\right) \tag{2.20}$$

لأن $r^2 = \sum_{\ell} x^{\ell^2}$.

بحيث تصبح الطاقة الحركية الدورانية

$$T_{rot} = \frac{1}{2} I_{ij}\omega^i\omega^j \tag{2.21}$$

والجمع هنا على كل الأدلة $i = 1,2,3$ و $j = 1,2,3$. لنكتب الآن بالتفصيل بعض العناصر I_{ij} التسعة لدينا مثلاً

$$I_{11} = \sum m(\sum_{\ell} x^{\ell^2} - x^1x^1) = \sum m(x^{2^2} + x^{3^2})$$

$$I_{12} = -\sum m x^1 x^2$$

.

.

.

$$I_{33} = \sum m(\sum_{\ell} x^{\ell^2} - x^{3^2}) = \sum m(x^{1^2} + x^{2^2})$$

نكتب هذه العناصر التسعة على شكل مصفوفة 3×3 على الشكل المألوف بالعودة إلى المركبات x, y, z عوضاً عن x^1, x^2, x^3

$$I_{ij} = \begin{pmatrix} \sum m(y^2+z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(x^2+z^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2+y^2) \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

تعريف 4 :

نسمي المصفوفة المعرفة بالعلاقة (2.20)، (2.22) تانسور العطالة.

يتضح لنا من تعريف هذا التانسور (2.20) ومن الكتابة المفصلة لعناصره (2.22) أنه متناظر (مصفوفة متناظرة)

$$I_{ij} = I_{ji} \quad ; \quad I = \tilde{I} \qquad (2.22)'$$

لنلاحظ أنه في حالة جسم مؤلف من عدد لامتناه من النقاط، أي عندما يكون الجسم متصلاً، فإن إشارة الجمع في (2.20) تتحول إلى إشارة تكامل ثلاثي وتتحول الكتل إلى كثافة كتلة (الكتلة في واحدة الحجوم) نرمز لها بـ ρ وتأخذ (2.20) الشكل التالي

$$I_{ij} = \iiint \rho\left(\sum_{\ell} x^{\ell^2}\delta^i_j - x^i x^j\right)d\tau \qquad (2.20)'$$

يمكننا التفتيش عن القيم الخاصة أي كتابة المصفوفة (2.22) على شكل قطري – كل العناصر معدومة ماعدا العناصر I_{ii} – وذلك باختيار نظمة محاور مناسبة.

تعريف 5 :

نسمي محاور العطالة التي تتيح كتابة تانسور العطالة على شكل قطري محاور العطالة الرئيسية ونسمي العناصر $I_i = I_{ii}$ عزوم العطالة الرئيسية.

وتأخذ الطاقة الحركية الدورانية (2.21) الشكل المبسط التالي

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\left[I_1(\omega^1)^2 + I_2(\omega^2)^2 + I_3(\omega^3)^2\right] \qquad (2.23)$$

ملاحظة :

إن العناصر I_{ii} في المصفوفة المكتوبة على شكل قطري وكذلك مركبات المتجهة الخاصة ω مختلفة عن مثيلاتها في العلاقتين (2.21) و (2.22) وكذا الأمر بالنسبة لمركبات $\vec{r}$، وكان من الأفضل لرفع كل التباس كتابتها على الشكل I_{ii} و $x^{i'}$، $\omega^{i'}$ لولا الرغبة بعدم تعقيد المعادلات فاقتضى التنويه. نكتب إذاً المصفوفة القطرية على الشكل

$$I_{ij} = \begin{pmatrix} \sum m(y^2+z^2) & 0 & 0 \\ 0 & \sum m(x^2+z^2) & 0 \\ 0 & 0 & \sum m(x^2+y^2) \end{pmatrix} \qquad (2.24)$$

ونلاحظ بسهولة أنه لا يمكن لمجموع عزمي عطالة رئيسيين أن يكون أصغر من عزم العطالة الرئيسي الثالث.

تعريف 6 :

نسمي دوامة غير متناظرة الجسم الصلب الذي تختلف فيه عزوم العطالة الرئيسية عن بعضها :

$$I_1 \neq I_2 \neq I_3$$

ونسميه دوامة متناظرة إذا تساوى عزما عطالة رئيسيان : $I_1 = I_2 \neq I_3$؛ يمكن عندئذ اختيار أي محورين متعامدين في المستوى Oxy كمحورين رئيسيين (التناظر الدائري). نسمي أخيراً الجسم الصلب الذي تتساوى فيه عزوم العطالة الثلاثة دوامة كروية : $I_1 = I_2 = I_3$؛ يمكن في هذه الحالة النظر إلى أي جملة من ثلاثة محاور متعامدة كجملة محاور عطالة رئيسية.

4.2- مجسم القطع الناقص العطالي :

عندما ننظر إلى الحالة الخاصة التي يدور فيها الجسم حول محور ثابت وليكن Oz : $\omega^1 = \omega^2 = 0$، ولنرمز بـ ω إلى ω_z وبـ I إلى I_{33} : $\sum m\left(x^2+y^2\right)$، فإننا نجد تعريفاً عزم عطالة الجسم الصلب بالنسبة للمحور Oz، العلاقة (2.6). أما عندما يكون محور الدوران Δ لا على التعيين فإن عزم عطالة الجسم الصلب بالنسبة له هو

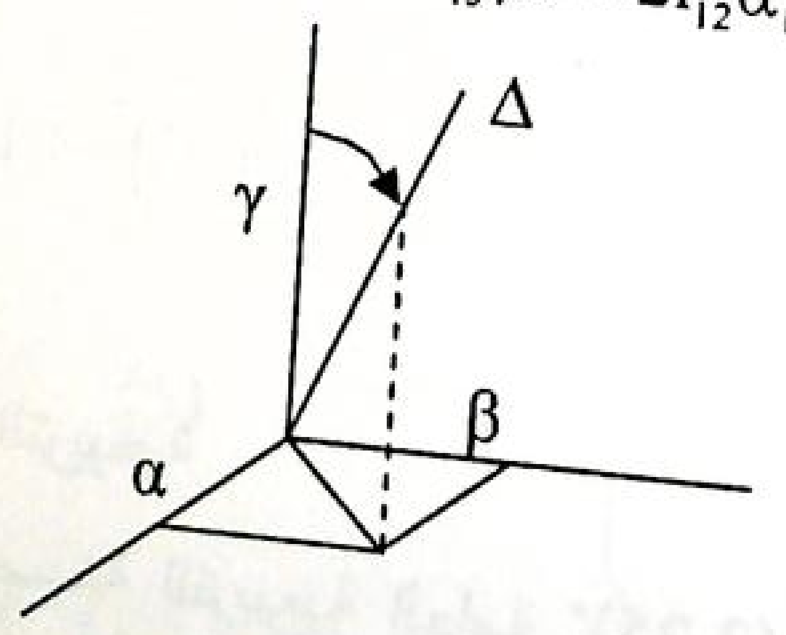
$$I = \sum mR^2 = \sum m\left(\bar{e} \times \bar{r}\right)^2$$

حيث $\bar{e}$ المتجهة الواحدية على المحور Δ. لتكن α، β، γ مساقط $\bar{e}$ على المحاور Ox، Oy، Oz على الترتيب، تسمى هذه المساقط جيوب التمام الموجهة. لدينا بتطبيق '(2.15)

$$I = \sum m\left(y^2+z^2\right)\alpha^2 + \sum m\left(z^2+x^2\right)\beta^2 + \sum m\left(x^2+y^2\right)\gamma^2$$
$$-2\sum myz\beta\gamma - 2\sum mzx\gamma\alpha - 2\sum mxy\alpha\beta$$

نكتب هذا العزم بدليل عناصر تانسور العطالة الستة ليأخذ الشكل التالي

$$I = I_{11}\alpha^2 + I_{22}\beta^2 + I_{33}\gamma^2 + 2I_{13}\gamma\alpha + 2I_{12}\alpha\beta + 2I_{23}\beta\gamma \qquad (2.25)'$$



وبتقسيم طرفي المعادلة على I نحصل على معادلة من الدرجة الثانية بالمجاهيل الثلاثة : $x = \frac{\alpha}{\sqrt{I}}$، $y = \frac{\beta}{\sqrt{I}}$، $z = \frac{\gamma}{\sqrt{I}}$. تعبر هذه المعادلة عن وجود النقطة M، ذات الإحداثيات x، y، z والواقعة على المحور Δ، على السطح من الدرجة الثانية ذي المعادلة

$$I = I_{11}x^2 + I_{22}y^2 + I_{33}z^2 + 2I_{13}zx + 2I_{12}xy + 2I_{23}yz \qquad (2.25)''$$

وهو سطح مجسم قطع ناقص مركزه O – يطلق عليه اسم مجسم القطع الناقص العطالي – ذلك أن طويلة المتجهة $\overline{OM}$: $\frac{1}{I} = \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{I} = \left|\overline{OM}\right|^2$ منتهية دوماً.

تتيح معرفة هذا المجسم تعيين عزم عطالة الجسم الصلب بالنسبة لأي محور يمر بالنقطة O

$$I = \frac{1}{\overline{OM}^2}$$

وبما أن لمجسم القطع الناقص ثلاث محاور تناظر فإن معادلته بالنسبة لهذه المحاور – حيث إحداثيات M هي X ، Y ، Z – هي

$$I = I_1X^2 + I_2Y^2 + I_3Z^2 \qquad (2.25)'''$$

<u>تعريف '6</u> :

نسمي هنا أيضاً محاور التناظر هذه محاور العطالة الرئيسية.

لنبين الآن أن هذا التعريف يتطابق مع التعريف 4 : لنحسب عزم عطالة الجسم الصلب بالنسبة للمحور Δ ولنعين المتجهة الواحدية عليه $\vec{e}$ بمساقطها a ، b ، c. يكفي أن نأخذ في العلاقة السابقة $X = \frac{a}{\sqrt{I}}$، $Y = \frac{b}{\sqrt{I}}$ ، $Z = \frac{c}{\sqrt{I}}$ لنجد أن هذا العزم هو

$$I = I_1a^2 + I_2b^2 + I_3c^2 \qquad (2.26)$$

وبما أن $\vec{\omega}$ محمول على Δ فإن مركباته هي $\omega^1 = \omega a$ ، $\omega^2 = \omega b$ ، $\omega^3 = \omega c$ وتأخذ الطاقة الحركية الشكل (2.5)

$$T_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(I_1a^2 + I_2b^2 + I_3c^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}\left(I_1a^2\omega^2 + I_2b^2\omega^2 + I_3c^2\omega^2\right)$$

أي الشكل (2.23)

$$= \frac{1}{2}\left[I_1\left(\omega^1\right)^2 + I_2\left(\omega^2\right)^2 + I_3\left(\omega^3\right)^2\right]$$

<u>ملاحظة 1</u> : الشكل القانوني للصيغ التربيعية

إن كل ما فعلناه هو الانتقال من الصيغة التربيعية العامة "(2.25) بثلاث متغيرات (حيث توجد حدود "مستطيلة" من الشكل xy ، الخ.) إلى الصيغة الخاصة '"(2.25) حيث حذفت الحدود المستطيلة ولم يبق إلا الحدود المربعة X^2 ، Y^2 ، Z^2. يكافئ هذا الانتقال وضع المصفوفة المتناظرة I_{ij} على شكل قطري :

تكتب الصيغة التربيعية عادة على الشكل

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Ezx + 2Fyz + G = 0$$

إنها من الشكل

$$\varphi(x^1, x^2, x^3) = \sum_{i,k} a_{ik} x^i x^k$$

إن $a_{ik} = a_{ki}$، والمصفوفة $A = (a_{ik})$ مصفوفة متناظرة كتبنا فيها دليل السطر والعمود في الأسفل. لنكتب المتجهة x^1, x^2, x^3 بدليل المتجهة X^1, X^2, X^3 بتطبيق المصفوفة العمودية B ($\tilde{B} = B^{-1}$) عليها

$$x^i = B^i_j\, X^j$$

فتصبح الصيغة φ

$$\varphi = \sum a_{ik} B^i_j X^j B^k_\ell X^\ell \qquad (1)$$

الجمع على كل الأدلة i، k، j، ℓ من 1 إلى 3. لنكتب φ على الشكل

$$\varphi = \sum C_{j\ell} X^j X^\ell \qquad (2)$$

حيث $C = (C_{j\ell})$ مصفوفة متناظرة نريد كتابتها على شكل قطري. لدينا بمقارنة (1) و (2)

$$C_{j\ell} = \left(a_{ik} B^k_\ell\right) B^i_j \qquad (3)$$

إن الحد بين القوسين، والجمع فيه على كل الحدود k، ليس إلا الحد في السطر i والعمود ℓ للجداء AB. إنه

$$(AB)^i_\ell$$

نكتب الحد الأخير على الشكل $\tilde{B}^j_i$ ونجمع من أجل كل الحدود i ليصبح $C_{j\ell}$ في (3) على الشكل

$$C_{j\ell} = \tilde{B}^j_i (AB)^i_\ell$$

وبالتالي فالمصفوفة C هي

$$C = \tilde{B}(AB) \qquad (4)$$

إنها متناظرة لأن $\tilde{A} = A$، ولأن

$$\tilde{C} = (\widetilde{AB})\,\tilde{\tilde{B}} = \tilde{B}\tilde{A}\;\; B = \tilde{B}\, AB = C$$

يمكن إذاً وضعها على شكل قطري

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

نكتب العلاقة (4) بضرب طرفيها على اليسار بـ B ($\tilde{B}^{-1} = B$) $AB = BC$ (حيث C قطرية ($C^\ell_k = 0$، $C^k_k = \lambda_k$)).

أو

$$\sum a_{ij} B^j_k = B^i_\ell\, C^\ell_k = \lambda_k B^i_k \qquad (6)$$

لنرمز لعناصر العمود k في المصفوفة B بمتجهة $\vec{x}^k = \begin{pmatrix} B_k^1 \\ B_k^2 \\ B_k^3 \end{pmatrix}$ بحيث تصبح المعادلة (6) من أجل كل عمود معادلة المتجهة الخاصة $\vec{x}^k$ والقيمة الخاصة λ_k

$$A\,\vec{x}^k = \lambda_k \vec{x}^k \quad ; \quad \text{والمعين } |A - \lambda I| = 0$$ هو كثير الحدود المميز.

وهكذا فإن البحث عن القيم الخاصة، وضع المصفوفة على شكل قطري والحصول على محاور العطالة الرئيسية يكافئ تماماً وضع الصيغة التربيعية على شكلها القانوني – بمربعات فقط – أو الحصول على محاور التناظر في مجسم القطع الناقص بفضل المصفوفة B.

لنلاحظ مادمنا قد تقدمنا إلى حد ما في دراسة المؤثرات الخطية أن ما قلناه هنا ينطبق على الفضاءات الإقليدية أياً كانت أبعادها، R^n، حيث لدينا المصفوفات العمودية $SO(n)$ والمصفوفات المتناظرة $(n \times n)$ $A = \tilde{A}$ التي هي حالة خاصة من المصفوفات ذاتية الترافق $A = \bar{\tilde{A}}$ $(A = A^{\dagger})$ عندما يكون الفضاء المتجهي معرفاً على الحقل العقدي. إن القيم الخاصة لهذه المؤثرات حقيقية دوماً.

<u>ملاحظة 2</u> :

لنبين طريقة تتيح إيجاد محاور العطالة الرئيسية بدون اللجوء إلى الشكل القانوني للصيغة التربيعية، مبتدئين بالتعريف التالي:

<u>تعريف 7</u> :

نقول عن مجسم القطع الناقص العطالي إنه مركزي عندما نأخذ مركز كتلة الجسم مبدأ لجملة المحاور.

لتكن C مركز الكتلة و I_C عزم العطالة بالنسبة لمحور Δ، الذي تعينه مساقط المتجهة الواحدية عليه $\vec{e}$ على المحاور الثلاثة (c, b, a)، المعرف بالعلاقة (2.26). إن عزم العطالة بالنسبة لمحور Δ' موازٍ له مارٍ بالنقطة $O(X, Y, Z)$ هو حسب (2.8) :

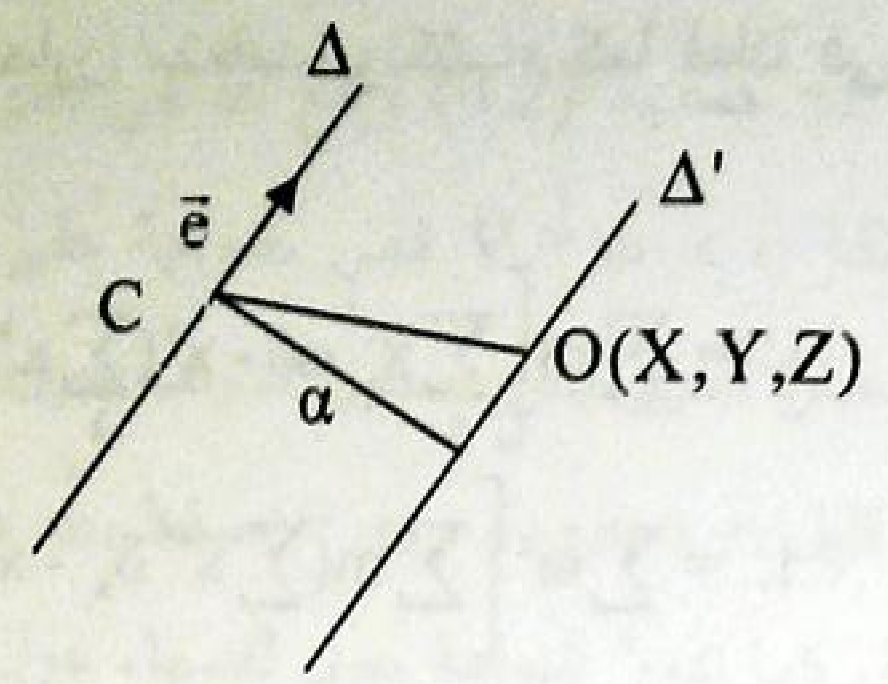
$$I_o = I_C + M\alpha^2$$

حيث α، المسافة بين Δ و Δ' تحددها العلاقة

$$\alpha^2 = \left(\overline{CO} \times \vec{e}\right)^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 - (aX + bY + cZ)^2$$

التي كتبناها بدليل '(2.15) فنحصل على

$$I_o = \left[I_1 + M\left(Y^2 + Z^2\right)\right]a^2 + \left[I_2 + M\left(Z^2 + X^2\right)\right]b^2$$
$$+ \left[I_3 + M\left(X^2 + Y^2\right)\right]c^2 - 2MYZbc - 2MZXca - 2MXYab$$



ليست هذه الصيغة التربيعية قانونية – الحدود المستطيلة فيها ليست منعدمة في الحالة العامة – ولكنها تصبح قانونية إذا انعدم إحداثيان من إحداثيات O الثلاث، أي إذا وقعت O على أحد المحاور الرئيسية CX، CY، CZ. ويصبح هذا المحور محور عطالة رئيسي بالنسبة لكل نقطة من نقاطه، كما أن لمجسمات القطوع الناقصة العطالية بالنسبة لكل هذه النقاط محاور تناظر متوازية. وهكذا فإذا كان مستقيم ما محوراً عطالياً رئيسياً بالنسبة لنقطتين من نقاطه فإنه يمر من مركز الكتلة.

تسمح لنا هذه الملاحظة بإيجاد محاور العطالة الرئيسية بسهولة : إن كل مستوى تناظر مادي (تناظر هندسي عندما يكون الجسم متجانساً) هو مستوى تناظر لمجسم القطع الناقص العطالي بالنسبة لأي نقطة من نقاط المستوى وبشكل خاص بالنسبة لمركز الكتلة C الواقعة عليه وبالتالي فإن الناظم على هذا المستوى في أي نقطة من نقاطه هو محور عطالة رئيسي.

3. عزم الجسم الصلب الزاوي ومعادلات الحركة

1.3– العزم الزاوي وانحفاظه :

نعلم أن العزم الزاوي لجملة من النقاط يتوقف على النقطة التي نحسب هذا العزم بالنسبة لها؛ سنأخذ هذه النقطة منطبقة على مركز الكتلة، أي أننا سنحسب العزم الزاوي النسبي انطلاقاً من العلاقة (2.1)، حيث $\vec{V}_{O_1} = \vec{V}_C$ و $(\vec{V}_P = \vec{\omega} \times \vec{r})$. C بالنسبة لمركز الكتلة P هي المتجهة التي تعين وضع النقطة $\vec{r}$

$\frac{d'\vec{P}}{dt} = 0$ لأن الجسم جسم صلب)

$$\vec{L} = \sum m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \qquad (3.1)$$

التي تعطينا حسب ((2.27).2)

$$\vec{L} = \sum m\left[r^2\vec{\omega} - \vec{r} \cdot \left(\vec{r} \cdot \vec{\omega}\right)\right]$$

نسقط هذه العلاقة على ثلاثة محاور متعامدة ونكتب، كما فعلنا في حساب تانسور العطالة، على شكل تانسوري

$$L^i = \sum m\left[\sum_\ell x^{\ell^2}\omega^i - x^i(\sum_k x^k\omega^k)\right]$$

$$L^i = \sum_k \omega^k\left[\sum m(\sum_\ell x^{\ell^2}\delta^i_k - x^i x^k)\right]$$

أي حسب (2.20)

$$L^i = \omega^k I_{ki} \qquad (3.2)$$

تصبح هذه العلاقة عندما نختار جملة محاور العطالة الرئيسية

$$L^i = I_i\omega^i \qquad (3.2)'$$

ومنه، في الحالة الخاصة التي يكون الجسم الصلب فيها دوامة كروية $I_1 = I_2 = I_3 = I$

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \qquad (3.3)$$

رأينا أن العزم الزاوي $\vec{L}$ ثابت ((4.3).4) عندما لا يخضع الجسم الصلب لأي قوة خارجية وأن حركة مركز الكتلة حركة مستقيمة منتظمة في هذه الحالة، يمكن اعتبارها مساوية للصفر بأخذ جملة محاور مرتبطة بمركز الكتلة. إضافة إلى ذلك، إذا كان الجسم الصلب دوامة كروية فإن ثبات $\vec{L}$ يعني ثبات $\vec{\omega}$ أيضاً حسب (3.3) ومنه.

<u>قضية 4</u> :

إن الحركة الحرة لدوامة كروية هي حركة دوران منتظمة حول محور ثابت.

أما إذا كان الجسم دواراً Rotator، مؤلفاً من نقاط مادية (جزيئات) كلتها m موزعة على طول مستقيم x^3 فإن

$$I_1 = I_2 = \sum m(x^3)^2 = I \qquad \text{و} \qquad I_3 = 0$$

وللدوار درجتا حرية دورانية فقط إذ لا معنى لدوران مستقيم حول نفسه.

ومنه حسب '(3.2)

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

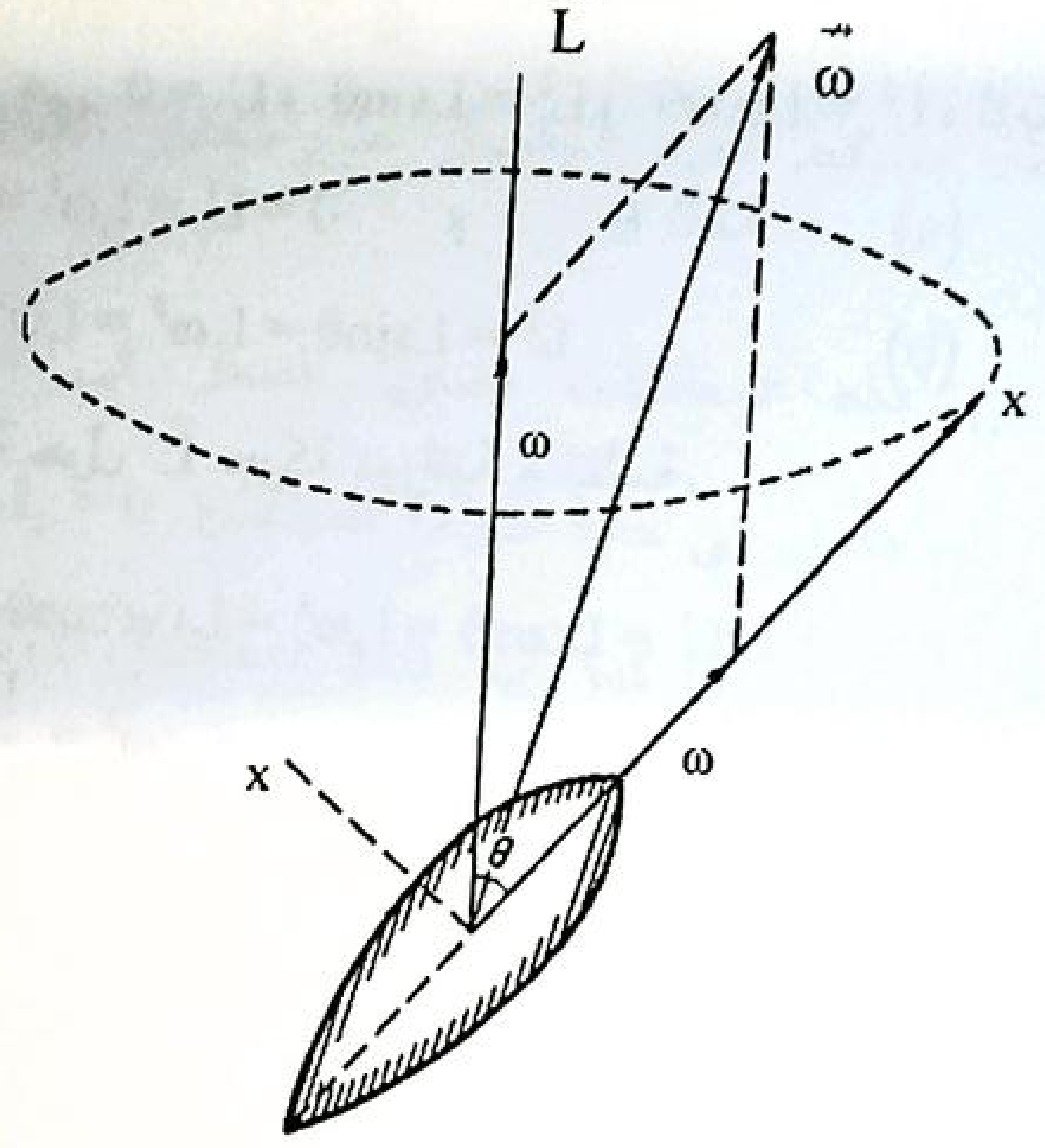
$\vec{L}$ و $\vec{\omega}$ عموديان على محور الدوار ($L^3 = 0$ ، $\omega^3 = 0$) ومنه.

<u>قضية 5</u> :

إن حركة الدوران الحرة للدوار هي حركة دوران منتظمة في مستو حول محور عمودي على هذا المستوي.

وأخيراً فإن الدوران الحر لدوامة متناظرة محور التناظر فيها x^3 هو كالتالي : نختار x^1 عمودياً على المستوى المحدد بالعزم الزاوي الثابت $\vec{L}$ والمحور x^3 ما دمنا نستطيع اختيار المحورين الرئيسيين x^1 و

x^2 كيفما نريد. $L' = 0$ ومعها $\omega' = 0$ حسب $(3.2)'$ وتقع $\vec{\omega}$ في نفس المستوى المحدد بـ $\vec{L}$ و x^3، الشكل.13. أما السرعة المحددة بالعلاقة $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ فهي عمودية على هذا المستوي من أجل كل النقاط الواقعة على محور التناظر x^3. أو بعبارة أخرى يدور محور الدوامة حول المحور $\vec{L}$ راسماً مخروطاً دائرياً بسرعة زاوية ثابتة – كما سنرى بعد قليل – تساوي لـ ω_L – مسقط $\vec{\omega}$ على اتجاه $\vec{L}$. نسمي هذه الحركة بالطواف المنتظم Precession للدوامة. كما تدور الدوامة حول نفسها، حول Ox^3، بسرعة ثابتة كذلك.



الشكل.13

لتكن θ الزاوية بين $\vec{L}$ والمحور x^3.

$$\omega^3 = \frac{L^3}{I_3} = \text{ثابتة} = \frac{L\cos\theta}{I_3}$$

والزاوية θ ثابتة كذلك.

$$\omega^2 = \frac{L^2}{I_2} = \frac{L\sin\theta}{I_2} = \omega_L \sin\theta$$

أي أن

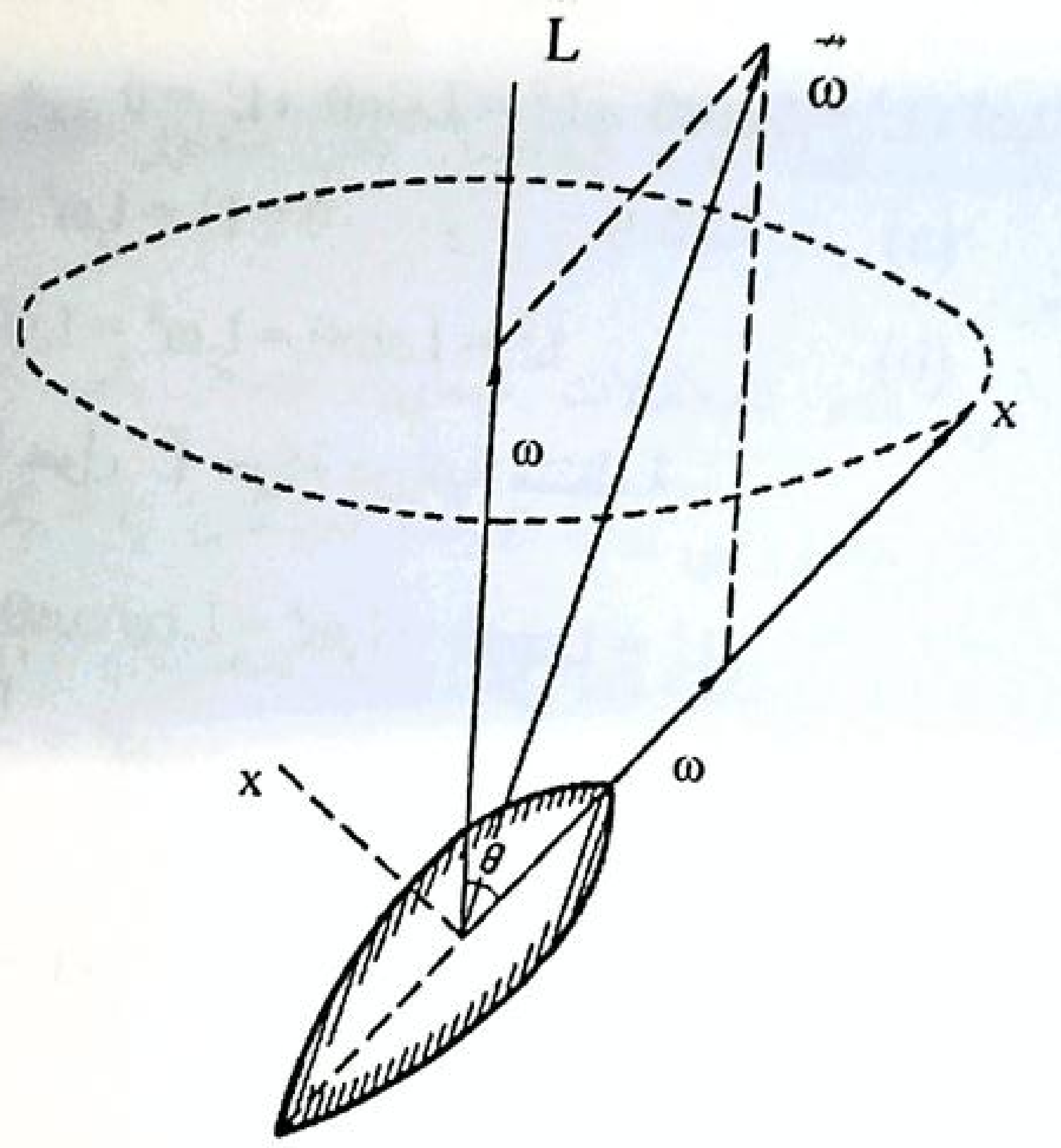
$$\omega_L = \frac{L}{I_2} = \text{ثابتة}$$

ومنه

<u>قضية 6</u> :

تتألف حركة الدوامة المتناظرة الحرة من طواف منتظم حول المحور الحامل للعزم الزاوي ومن دوران منتظم حول محور التناظر.

x^2 كيفما نريد. $L' = 0$ ومعها $\omega' = 0$ حسب '(3.2) وتقع $\vec{\omega}$ في نفس المستوى المحدد بـ $\vec{L}$ و x^3، الشكل.13. أما السرعة المحددة بالعلاقة $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ فهي عمودية على هذا المستوي من أجل كل النقاط الواقعة على محور التناظر x^3. أو بعبارة أخرى يدور محور الدوامة حول المحور $\vec{L}$ راسماً مخروطاً دائرياً بسرعة زاوية ثابتة – كما سنرى بعد قليل – تساوي لـ ω_L – مسقط $\vec{\omega}$ على اتجاه $\vec{L}$. نسمي هذه الحركة بالطواف المنتظم Precession للدوامة. كما تدور الدوامة حول نفسها، حول Ox^3، بسرعة ثابتة كذلك.



الشكل.13

لتكن θ الزاوية بين $\vec{L}$ والمحور x^3.

$$\omega^3 = \frac{L^3}{I_3} = \text{ثابتـــة} = \frac{L\cos\theta}{I_3}$$

والزاوية θ ثابتة كذلك.

$$\omega^2 = \frac{L^2}{I_2} = \frac{L\sin\theta}{I_2} = \omega_L \sin\theta$$

أي أن

$$\omega_L = \frac{L}{I_2} = \text{ثابتـــة}$$

ومنه

<u>قضية 6</u> :

تتألف حركة الدوامة المتناظرة الحرة من طواف منتظم حول المحور الحامل للعزم الزاوي ومن دوران منتظم حول محور التناظر.

يمكننا الوصول إلى هذه النتائج بالعودة إلى زوايا أولر والعلاقة (1.22) : نفرض $\vec{L}$ محمولاً على OZ، ونستغل حرية اختيار x^1 و x^2 المرتبطين بالجسم بجعل x^1 ينطبق على الخط العقدي ON أي $\varphi = 0$ بحيث تصبح مركبات السرعة الزاوية على المحاور الثلاثة المرتبطة بالجسم

$$\omega^1 = \theta'$$

$$\omega^2 = \psi'\sin\theta$$

$$\omega^3 = \psi'\cos\theta + \varphi'$$

ومركبات $\vec{L}$ على هذه المحاور هي $L^1 = 0$ ، $L^2 = L\sin\theta$ ، $L^3 = L\cos\theta$، لدينا إذاً

$$0 = L^1 = I_1\omega^1 = I_1\theta' \quad \text{و} \quad \theta \text{ ثابتة} \qquad (a)$$

$$L^2 = L\sin\theta = I_2\omega^2 = I_1\psi'\sin\theta \qquad (b)$$

ومنها $\psi' = \dfrac{L}{I_1}$ والحركة الدورانية حول $\vec{L}$ حركة دورانية منتظمة.

$$L^3 = L\cos\theta = I_3\omega^3 = I_3(\psi'\cos\theta + \varphi') \qquad (c)$$

ومنها

$$\omega^3 = \frac{L\cos\theta}{I_3}$$

2.3- معادلات الحركة - معادلات أولر :

رأينا أن دراسة حركة الجسم الصلب تتوقف على معرفة ستة وسطاء، ثلاثة وسطاء للحركة الانسحابية : حركة نقطة من الجسم، ولتكن مركز كتلته، بالنسبة لجملة غاليلية ما، وثلاثة وسطاء أخرى لدوران الجسم بالنسبة لهذه الجملة. تحدد المعادلتان التفاضليتان التاليتان هذه الوسطاء. ليكن $\vec{P}$ اندفاع مركز الكتلة و $\vec{L}$ العزم الزاوي للجسم

$$\frac{d\overline{P}}{dt} = M\frac{d^2\overline{OC}}{dt^2} = F_{ext} \qquad (3.4)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{ext} \qquad (3.5)$$

حيث C مركز الكتلة و O مبدأ جملة المحاور الغاليلية الثابتة و M الكتلة الكلية. نكتب الطرفين الأولين مستعينين بالعلاقة (2.1) ونسقط المعادلتين على المحاور المتحركة. لدينا إذا سمينا V^1 ، V^2 ، V^3 مساقط سرعة مركز الكتلة على المحاور المرتبطة بالجسم و F^1 ، F^2 ، F^3 مساقط مجموع القوى الخارجية.

$$\begin{cases} M\left(\dfrac{dV^1}{dt} + \omega^2V^3 - \omega^3V^2\right) = F^1 \\ M\left(\dfrac{dV^2}{dt} + \omega^3V^1 - \omega^1V^3\right) = F^2 \\ M\left(\dfrac{dV^3}{dt} + \omega^1V^2 - \omega^2V^1\right) = F^3 \end{cases} \qquad (3.4)'$$

وباختيار المحاور المرتبطة بالجسم محاور العطالة الرئيسية المحققة لـ '(3.2)، فإن إسقاط (3.5) على هذه المحاور

$$\begin{cases} I_1 \dfrac{d\omega^1}{dt} + (I_3 - I_2)\,\omega^2\omega^3 = \mathcal{M}^1 \\ I_2 \dfrac{d\omega^2}{dt} + (I_1 - I_3)\,\omega^3\omega^1 = \mathcal{M}^2 \\ I_3 \dfrac{d\omega^3}{dt} + (I_2 - I_1)\,\omega^1\omega^2 = \mathcal{M}^3 \end{cases} \qquad (3.5)'$$

حيث $\mathcal{M}^1$، $\mathcal{M}^2$، $\mathcal{M}^3$ مساقط العزم الحاصل على محاور العطالة الرئيسية. تُعرف المعادلات '(3.5) باسم معادلات أولر.

يصبح الطرف الثاني في هذه المعادلات مساوياً للصفر في حالة الدوران الحر ($\vec{\mathcal{M}} = 0$) و ثابتـــة = $\vec{L}$) ولدينا بشكل خاص في حالة الدوامة المتناظرة $I_1 = I_2$، $\dfrac{d\omega^3}{dt} = 0$ و ω^3 ثابتة : تدور الدوامة المتناظرة حول نفسها بسرعة ثابتة كما رأينا. تأخذ المعادلتان الأوليان في '(3.5) الشكل

$$\begin{cases} \dfrac{d\omega^1}{dt} = \omega^{1'} = -\,\omega^3\omega^2\,\dfrac{I_3 - I_2}{I_1} = -\,\alpha\omega^2 \\ \dfrac{d\omega^2}{dt} = \omega^{2'} = \omega^3\omega^1\,\dfrac{I_3 - I_1}{I_2} = \alpha\omega^1 \end{cases} \qquad (3.6)$$

حيث سمينا المقدار الثابت

$$\omega^3\,\frac{I_3 - I_1}{I_2} = \alpha \qquad (I_1 = I_2)$$

نكامل المعادلتين (3.6) بأن نكتبهما على شكل معادلة واحدة ($-\alpha = i^2\alpha$)

$$\frac{d}{dt}(\omega^1 + i\omega^2) = i\alpha(\omega^1 + i\omega^2)$$

ومنه

$$\omega^1 + i\omega^2 = Ae^{i\alpha t} = A\left(\cos\alpha t + i\sin\alpha t\right)$$

حيث A ثابتة تحددها الشروط البدائية. لدينا إذاً

$$\omega^1 = A\cos\alpha t$$

$$\omega^2 = A\sin\alpha t$$

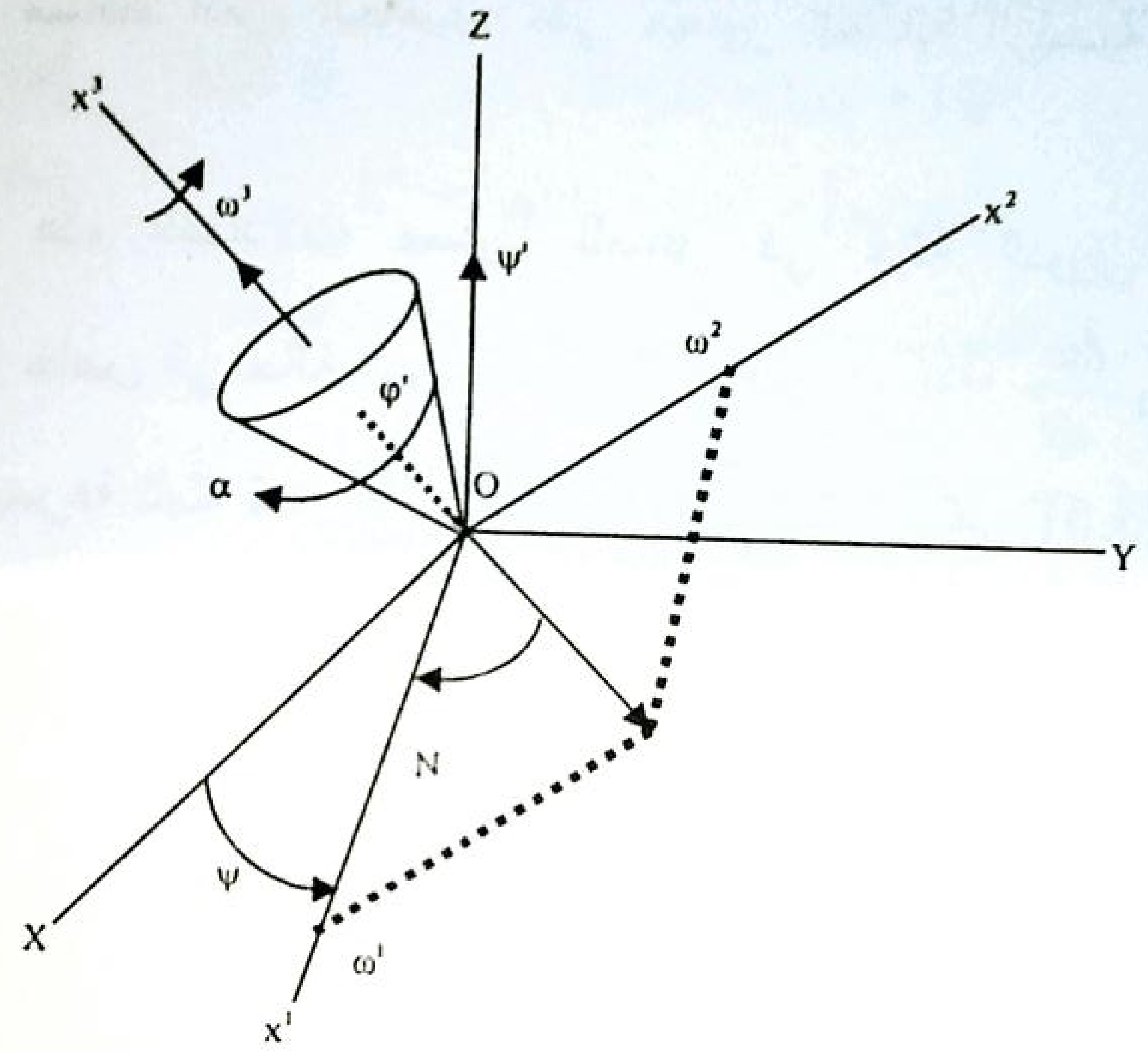
إن مسقط السرعة الزاوية $\vec{\omega}$ على مستو عمودي على محور التناظر يدور في هذا المستوى بسرعة زاوية α ثابتة ويبقى طوله ثابتاً أيضاً $(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 = A^2$، الشكل.14، وبما أن ω^3 ثابت فإن المتجهة $\vec{\omega}$ كلها ذات الطول الثابت تدور بسرعة زاوية ثابتة α حول محور الدوامة وبالنظر إلى '(3.2) فإن $\vec{L}$ يقوم

بنفس الحركة. إن حركة $\vec{L}$ حول Ox^3 تحددها السرعة الزاوية φ'-. لدينا حسبما رأينا في الرقم السابق، العلاقة (c)، ثم (b) : $\omega^3 = \frac{L\cos\theta}{I_3}$ ، $\psi' = \frac{L}{I_1}$

$$\varphi' = \frac{L\cos\theta}{I_3} - \psi'\cos\theta = L\cos\theta\left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1}\right)$$

وبما أن $L^3 = L\cos\theta = I_3\omega^3$ فإن

$$-\varphi' = \omega^3 \frac{I_3 - I_1}{I_1} = \alpha$$



الشكل.14

3.3– الحركة الحرة للدوامة غير المتناظرة – حركة بوانسو Poinsot :

أما إذا كانت الدوامة الحرة غير متناظرة فإنه يمكن تعيين وضع المتجهة الثابتة $\vec{L}$ بالنسبة لوضع محور الدوران $\vec{\omega}$ بطريقة هندسية تُعرف باسم إنشاء بوانسو : لنأخذ على مجسم القطع الناقص العطالي النقطة M (X ، Y ، Z)، نقطة تقاطع محور الدوران معه، أي حسب (2.26) :

$$Z = \frac{\omega^3}{\omega\sqrt{I}} \quad ، \quad Y = \frac{\omega^2}{\omega\sqrt{I}} \quad ، \quad X = \frac{\omega^1}{\omega\sqrt{I}} \qquad (3.7)$$

و $\overrightarrow{OM} = \frac{\vec{\omega}}{\omega\sqrt{I}}$ حيث O مركز المجسم.

ومن جهة أخرى فإن معادلة المستوى المماس لسطح ما $f(X,Y,Z) = 0$ هي

$$\frac{\partial f}{\partial X}dX + \frac{\partial f}{\partial Y}dY + \frac{\partial f}{\partial Z}dZ = 0$$

ومركبات الناظم على المستوي المماس في النقطة M (X ، Y ، Z)، هي غراديان f $\vec{\nabla} f$ ذي المركبات $\frac{\partial f}{\partial X}$ ، $\frac{\partial f}{\partial Y}$ ، $\frac{\partial f}{\partial Z}$ وهي بأخذ (2.26)، (3.7) و'(3.2) بعين الاعتبار

$$\vec{\nabla} f : \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial X} = 2I_1X = \dfrac{2I_1\omega^1}{\omega\sqrt{I}} = \dfrac{2L^1}{\omega\sqrt{I}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial Y} = 2I_2Y = \dfrac{2I_2\omega^2}{\omega\sqrt{I}} = \dfrac{2L^2}{\omega\sqrt{I}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial Z} = 2I_3Z = \dfrac{2I_3\omega^3}{\omega\sqrt{I}} = \dfrac{2L^3}{\omega\sqrt{I}} \end{cases} \quad (3.8)$$

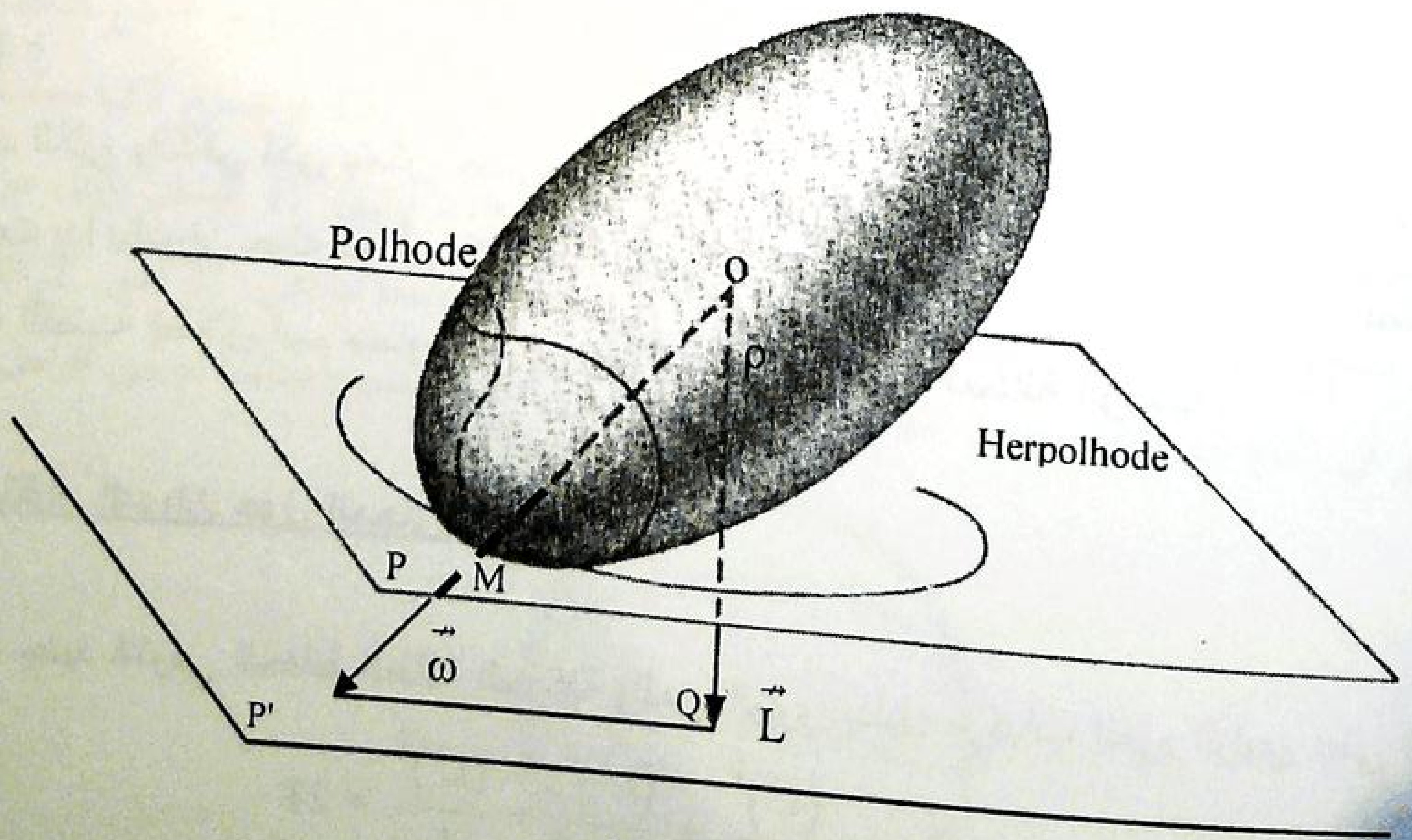
إن مركبات هذه المتجهة متناسبة مع مركبات $\vec{L}$ الثابتة وبالتالي فإن المستوي المماس P لمجسم القطع الناقص العطالي ثابت : يبعد هذا المستوي عن مركز المجسم المسافة

$$\rho = \frac{\overline{OM} \cdot \vec{L}}{|L|} = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{L}}{|L|\omega\sqrt{I}} = \frac{2T}{|L|\sqrt{\omega^2 I}} = \frac{\sqrt{2T}}{|L|}$$

وهي مسافة ثابتة لثبات $|L|$ وثبات الطاقة الحركية T. هذا من جهة، ومن جهة أخرى فإن Q مسقط المتجهة $\vec{\omega}$ على $\vec{L}$ ثابتة لثبات $|L|$ و T أيضاً أي أن نهاية المتجهة $\vec{\omega}$ تقع في مستو P' مواز للمستوي P. ومنه

<u>قضية 7</u> :

تتمثل حركة الجسم الصلب الحرة، الدوامة غير المتناظرة، بحركة مجسم القطع الناقص العطالي الذي يدور ويتدحرج بدون أن ينزلق على المستوي الثابت P الذي يقع على مسافة ثابتة من مركز القطع O. ينتج عدم الانزلاق من كون النقطة M واقعة على محور الدوران الآني وبالتالي لا تنزلق على P، الشكل.15 ومنه



الشكل.15

ترسم النقطة M عندما يتحرك محور الدوران الآني منحنياً على مجسم القطع الناقص العطالي يسمى مسار القطب Polhode كما ترسم على المستوى P منحنيا آخر يسمى Herpolhode[2] : يدور ويتدحرج المنحني الأول بدون أن ينزلق على المنحني الثاني. يتعين وضع واتجاه P بإعطاء الثابتتين T و L كشروط بدائية. وهكذا فإن النقطة الثابتة الوحيدة من مجسم القطع الناقص العطالي هي مركزه O، ولذا يمكن اعتبار حركة الجسم الصلب الحرة حركة حول نقطة ثابتة. تصبح هذه الحركة حركة دوامة متناظرة عندما يتساوى عزمان رئيسيان أي عندما يصبح المجسم العطالي مجسماً دورانياً ويأخذ مسار القطب شكل دائرة حول محور التناظر أي أن اتجاه $\vec{\omega}$ يطوف حول محور التناظر كما رأينا.

لننظر الآن إلى الشروط الواجب تحققها كي تكون الحركة حول محور ثابت : يجب أن تكون النقطة M، نقطة تماس مجسم القطع الناقص العطالي مع المستوي الثابت P ثابتة، أي أن الحركة الدورانية الآنية حركة دوران بدون تدحرج : يتحول المسار القطبي إلى نقطة ثابتة M عمودية على P وينطبق محور الدوران على اتجاه الناظم $\vec{L}$ وهو حسب '(3.2) اتجاه أحد محاور العطالة الرئيسية في هذه الحالة $L^i = I_i\omega^i$ وطويلة $\vec{\omega}$ ثابتة.

يمكن الوصول إلى نفس النتيجة بالعودة إلى معادلات أولر التي تأخذ الشكل التالي نتيجة ثبات طويلة $\vec{\omega}$

$$\begin{cases}(I_3 - I_2)\omega^2\omega^3 = 0\\(I_1 - I_3)\omega^3\omega^1 = 0\\(I_2 - I_1)\omega^1\omega^2 = 0\end{cases} \qquad (3.9)$$

وهي جملة معادلات خطية لا تتحقق (بفرض $I_1 \neq I_2 \neq I_3$) إلا إذا انعدمت مركبتان من مركبات $\vec{\omega}$ الثلاثة. والخلاصة

<u>قضية 8</u> :

إن الشرط اللازم والكافي لكي يتمكن جسم صلب حر، متحرك حول نقطة ثابتة O، من متابعة الدوران حول محور ثابت بدأ بالدوران حوله هو أن يكون هذا المحور أحد محاور العطالة الرئيسية بالنسبة للنقطة O.

تبرر هذه القضية إطلاق اسم محاور الدوران الدائمة على محاور العطالة الرئيسية.

<u>4.3- استقرار الدوران حول المحاور الرئيسية :</u>

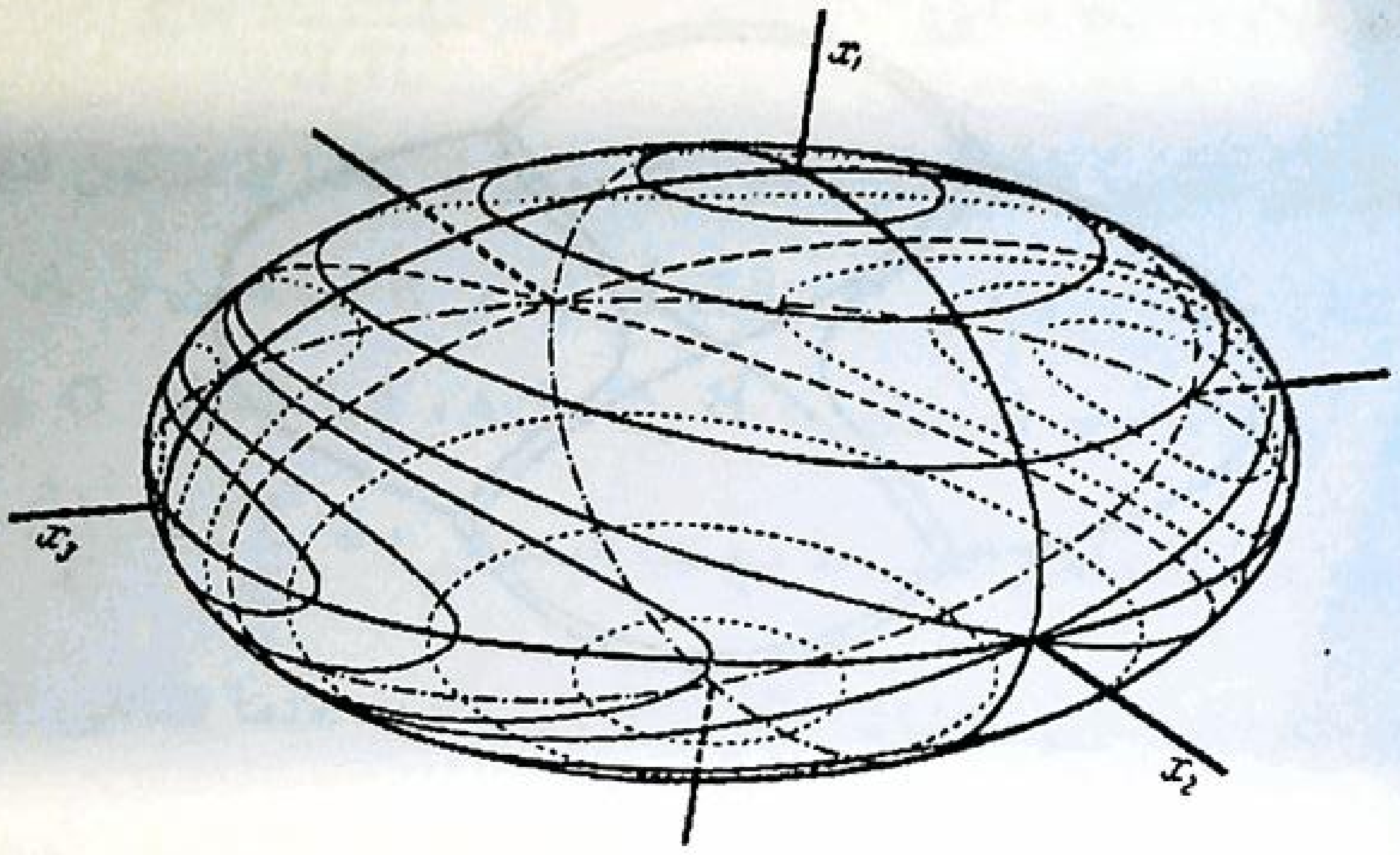
لنكتب من جديد قانوني انحفاظ الطاقة الحركية والعزم الزاوي بدليل مركبات العزم الزاوي على الشكل

$$\frac{(L^1)^2}{I_1} + \frac{(L^2)^2}{I_2} + \frac{(L^3)^2}{I_3} = 2T \qquad (3.10)$$

[2] وتعني Polhode مسار القطب باليونانية؛ ترجمنا Herpolhode إلى مسار القطب المقترن.

$$\left(L^1\right)^2 + \left(L^2\right)^2 + \left(L^3\right)^2 = L^2 \qquad (3.11)$$

ترتب عزوم العطالة على الشكل $I_1 < I_2 < I_3$. إن المعادلة (3.10) هي معادلة مجسم قطع ناقص أطوال أنصاف محاوره هي بالترتيب : $c = \sqrt{2I_1T}$ ، $b = \sqrt{2I_2T}$ ، $a = \sqrt{2I_3T}$. أما (3.11) فهي معادلة كرة نصف قطرها L. عندما يتحرك العزم الزاوي $\vec{L}$ بالنسبة لجملة محاور العطالة الرئيسية فإن نهايته تقع في آن واحد على الكرة (3.11) وعلى مجسم القطع الناقص (3.10). (يمثل الشكل.16 عدداً من تقاطعات مجسم القطع الناقص مع كرات ذات أقطار مختلفة $|L|$).



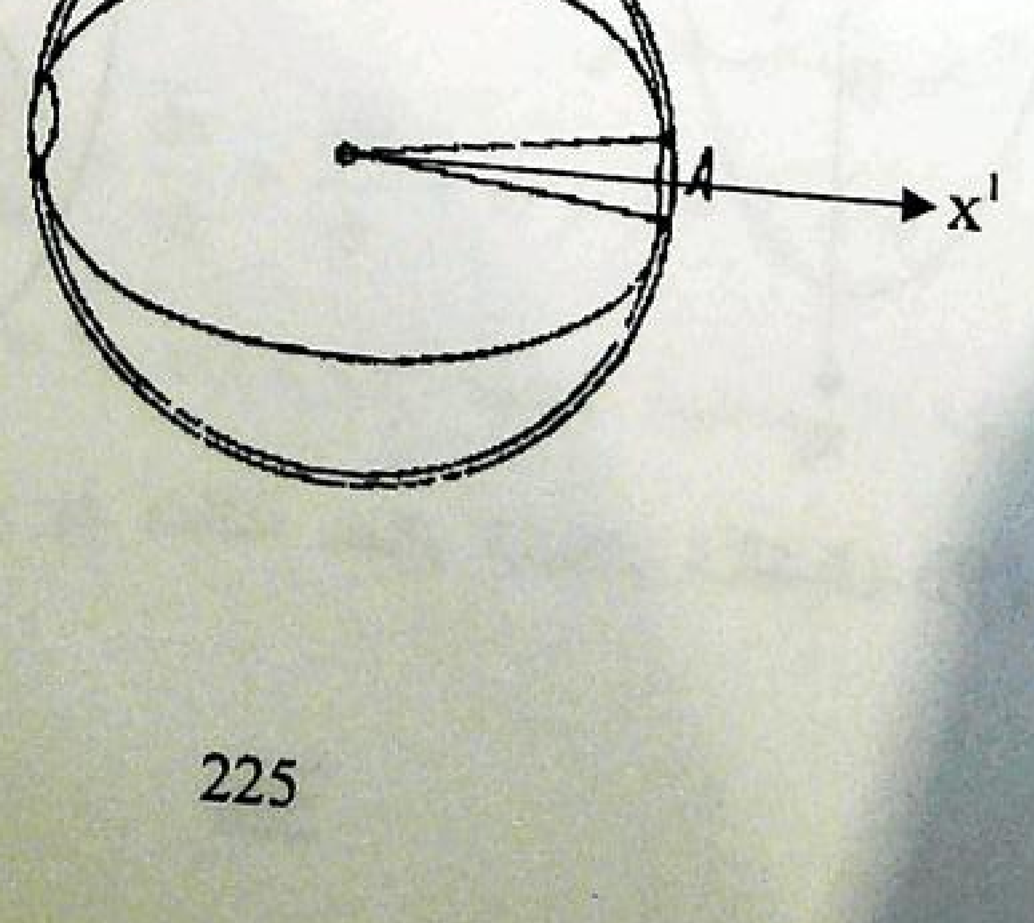
الشكل.16

إن هذا التقاطع ممكن نظراً لأن

$$2I_1T < L^2 < 2I_3T$$

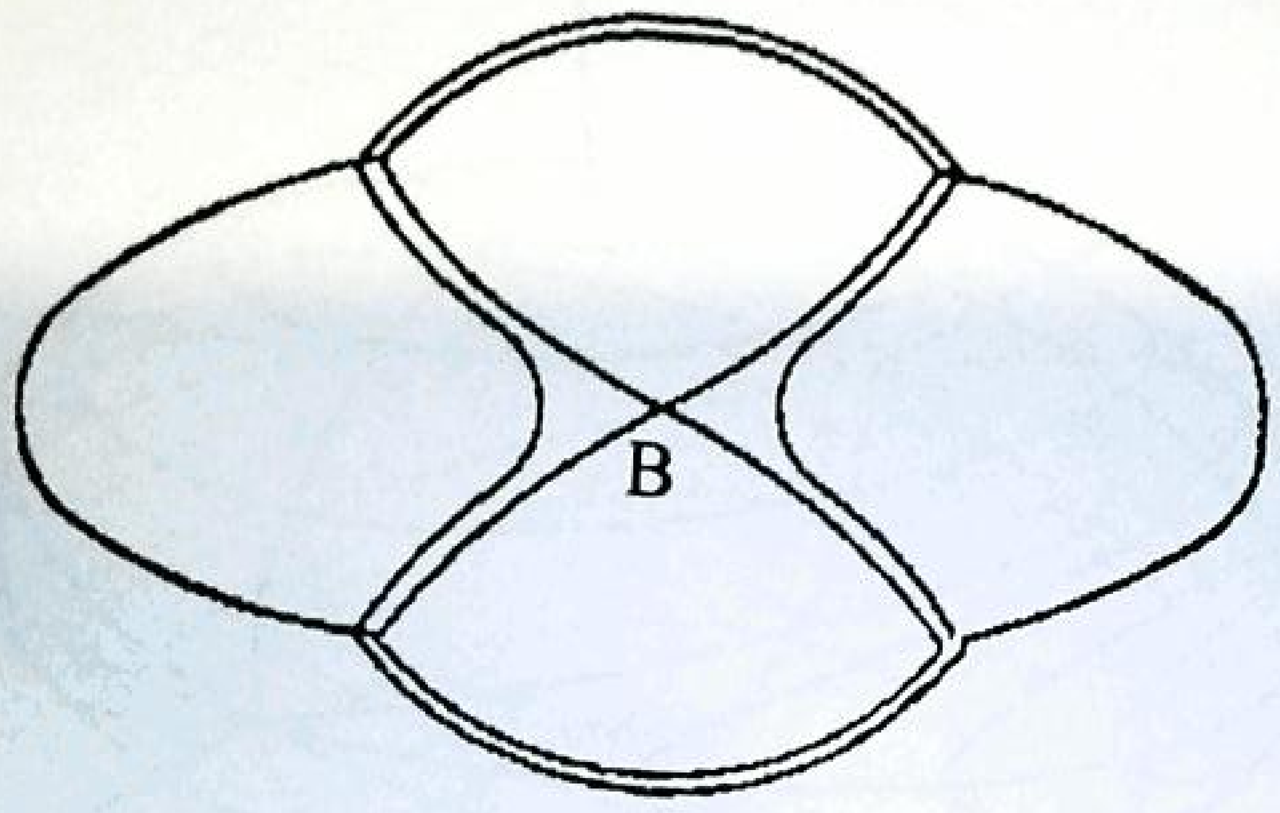
ونصف قطر الكرة محصور بين طول أصغر وأكبر محاور مجسم القطع الناقص.

ترسم نهاية المتجهة $\vec{L}$ على المجسم مساراً يماثل مسار القطب الذي ترسمه نهاية $\vec{\omega}$. عندما يكون L^2 أكبر بقليل من $2I_1T$، طول نصف المحور الأصغر، فإن الكرة تقطع من الخارج مجسم القطع الناقص حسب منحنيين صغيرين مغلقين يحيطان بالمحور Ox^1 في طرفي المجسم، الشكل.17 (وتصبح الكرة مماسة للمجسم في هاتين النقطتين عندما يتناهى L^2 نحو $2I_1T$). وكذلك الأمر عندما يكون L^2 أصغر بقليل من $2I_3T$. نحصل على منحنيين مغلقين يحيطان بـ Ox^3 ويتناهيان إلى نقطتين عندما يتناهى L^2 نحو $2I_3T$، والفارق الوحيد هنا هو أن الكرة تقع داخل مجسم القطع الناقص في البدء وتتناهى لتصبح مماسة له من الداخل.



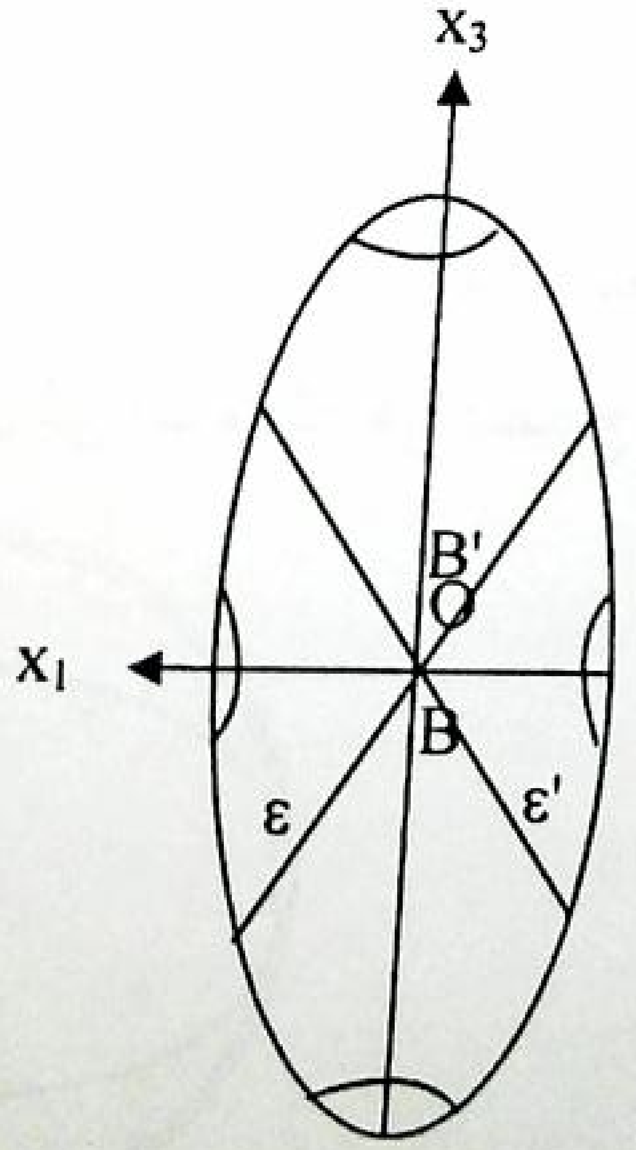
الشكل.17

أما عندما يكون $L^2 = 2TI_2$ فإن تبديل $b^2 = 2TI_2$ بـ L^2 في (3.10) يحدد لنا منحن من الدرجة الرابعة يختزل إلى منحنيين مستويين (قطعين ناقصين) يتقاطعان في طرفي المحور Ox^2، الشكل.18. لنلاحظ أن كون محارك النقطة Q مغلقة يعني أن انتقال المتجهة $\vec{L}$ بالنسبة للجسم الصلب انتقال دوري : ترسم المتجهة $\vec{L}$ خلال الدورة سطحاً مخروطياً.

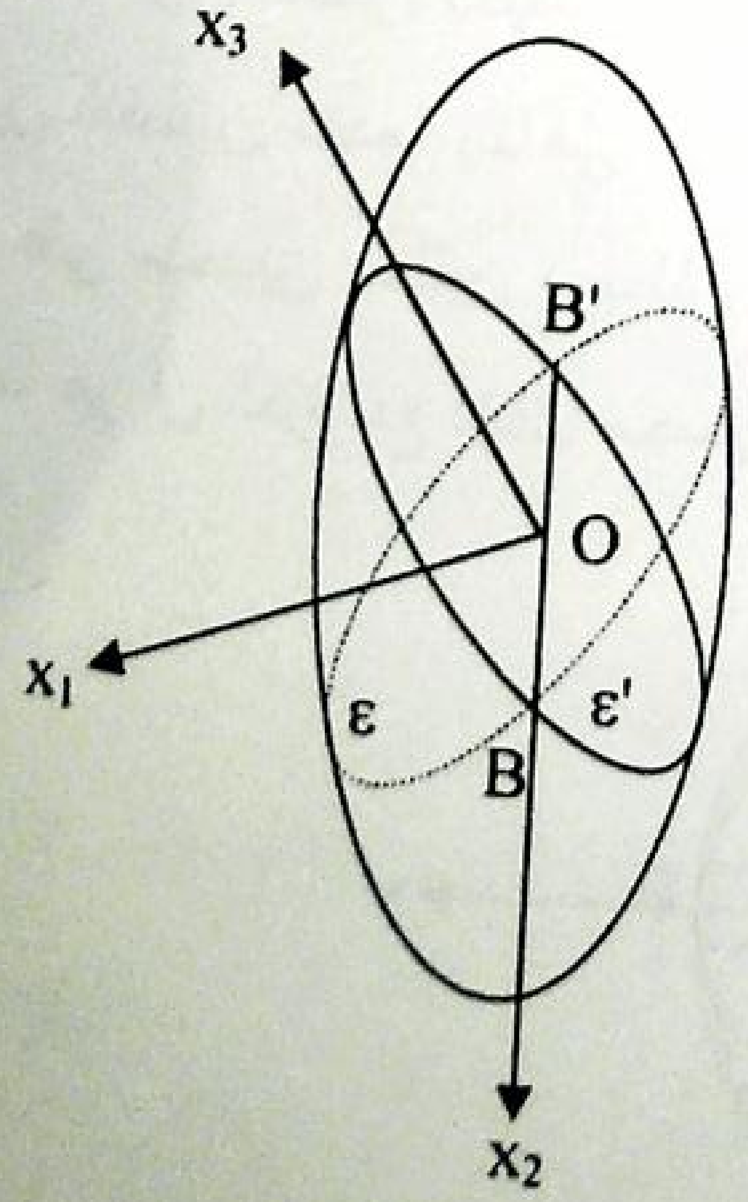


الشكل.18

وهكذا نرى أنه بجوار Ox^1 و Ox^3 حيث المنحنيات صغيرة فإن انزياح $\vec{L}$ انزياحاً ضئيلاً عن المحور لا يجعله يبتعد عنه كثيراً، الشكل.19a. ونقول عندئذ أن الدوران حول هذين المحورين دوران مستقر. أما الدوران حول Ox^2 فهو دوران غير مستقر لأن انزياحاً صغيراً لـ $\vec{L}$ عن اتجاه BOB' – حيث B و B' هما طرفا المحور Ox^2 يجعل النقطة Q تبتعد على أحد منحنيي التقاطع ε و ε' ابتعاداً كبيراً عن الوضع البدائي، الشكل.19b.



الشكل.19a



الشكل.19b

ملاحظة :

يمكن كتابة المعادلتين (3.10) و (3.11) على شكل معادلة واحدة تحدد تقاطع مجسم القطع الناقص والكرة كما يلي :

$$(L^1)^2\left(\frac{1}{2I_1T}-\frac{1}{L^2}\right)+(L^2)^2\left(\frac{1}{2I_2T}-\frac{1}{L^2}\right)+(L^3)^2\left(\frac{1}{2I_3T}-\frac{1}{L^2}\right)=0 \quad (3.12)$$

إنها معادلة من الشكل

$$Ax^2+By^2+Cz^2=0 \quad ; \quad C=\frac{L^2-2I_3T}{2I_3TL^2}<0 \quad (3.13)$$

فهي إذاً معادلة مخروط من الدرجة الثانية سواء كان B موجباً أو سالباً إذ سيكون لدينا في كل الأحوال مثلان A و B من إشارة واحدة موجبة و C سالبة، أو C- و B- موجبتين و A- سالبة. لنفرض أن B موجبة. لدينا من أجل $z=0$ المعادلة $Ax^2+By^2=0$، إنها النقطة O وكل المولدات تمر بالمستوي $z=1$ وتصبح معادلة مقطع المخروط مع هذا المستوي $\frac{Ax^2}{-C}+\frac{By^2}{-C}=1$ أو $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$ وهي معادلة قطع ناقص يتناهى نحو النقطة $y=\pm\sqrt{\frac{-C}{B}}$، $z=1$ عندما تتناهى A نحو الصفر. أما عندما تتناهى B نحو الصفر فإن المعادلة $Ax^2=-Cz^2$ هي معادلة تدني المخروط إلى مستويين تحددها العلاقة $z=\pm\sqrt{\frac{A}{-C}}$. إنها في حالة عودتنا إلى (3.12)

$$L^3=\pm\sqrt{\frac{\frac{1}{2I_1T}-\frac{1}{L^2}}{\frac{1}{L^2}-\frac{1}{2I_3T}}}$$

يقطع هذان المستويان مجسم القطع الناقص العطالي حسب القطعين الناقصين ε و ε'، الشكل.19.

4. الحركة النسبية

1.4- تركيب التسارع – تسارع كوريوليس :

كتبنا في (2.1) متجهة السرعة $\vec{V}_a=\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}$ لنقطة ما P معينة في جملة محاور متحركة على شكل سرعة نسبية وسرعة جر على النحو التالي

$$\vec{V}_a=\frac{d\overrightarrow{P}}{dt}=\frac{d\overrightarrow{a}}{dt}+\frac{d'\overrightarrow{P}}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{r}=\vec{V}_e+\vec{V}_r \quad (4.1)$$

إن الحد الأول هو الحركة الانسحابية للجملة $O_1x_1y_1z_1$، $\frac{d'\overrightarrow{P}}{dt}=\vec{V}_r$ هي سرعة المتجهة $\overrightarrow{O_1P}$ بالنسبة لجملة المحاور $O_1x_1y_1z_1$ المرتبطة بالنقطة والحد الثالث هو دوران المتجهة $\overrightarrow{O_1P}$ الناتج عن دوران

الجملة $O_1x_1y_1z_1$ ككل. لنطبق نفس المحاكمة على المتجهة $(\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{\overline{d'P}}{dt}$ ولنأخذ مشتق (4.1)، أي تسارع النقطة P ونرمز له بـ $\vec{a}_a$:

$$\vec{a}_a = \frac{\overline{d^2P}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{a}}{dt^2} + \frac{d'}{dt}\left[\frac{\overline{d'P}}{dt} + \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)\right] + \vec{\omega} \times \left[\frac{\overline{d'P}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}\right] \quad (4.2)$$

$$= \frac{\overline{d^2a}}{dt^2} + \frac{\overline{d'^2P}}{dt^2} + \frac{d'\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \frac{\overline{d'P}}{dt} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)$$

إن الحد $\frac{\overline{d'^2P}}{dt^2}$ هو التسارع النسبي ونرمز له بـ $\vec{a}_r$

$$\vec{a}_r = \frac{\overline{d'^2P}}{dt^2} \quad (4.3)$$

كما أن المجموع

$$\vec{a}_e = \frac{\overline{d^2a}}{dt^2} + \frac{d'\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) = \frac{d\vec{V}_e}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{a}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}\right) \quad (4.4)$$

هو تسارع الجر، حيث طبقنا العلاقة (4.1) على متجهة سرعة الجر $\vec{V}_e$ معتبرين $\vec{r}$ ثابتة.

ولدينا في النهاية

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c \quad (4.5)$$

حيث سمينا المقدار الإضافي

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r \quad (4.6)$$

تسارع كوريوليس.

يمكننا، كما فعلنا للحصول على '(2.1)، العودة إلى الإحداثيات لاشتقاق (4.1) والوصول إلى (4.2) لنجد

$$\vec{a}_a = \frac{\overline{d^2P}}{dt^2} = \frac{\overline{d^2a}}{dt^2} + x^{i''}\vec{e}_i + 2x^{i'}\vec{e}_i' + x^i\vec{e}_i''$$

إن $\vec{e}_i' = (\vec{\omega} \times \vec{e}_i)$ ومنه $2x^{i'}\vec{e}_i' = 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r$. كما أن $\vec{e}_i'' = \frac{\overline{d^2e_i}}{dt^2} = (\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{e}_i) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{e}_i)$.

ومنه

$$\vec{a}_a = \frac{\overline{d^2a}}{dt^2} + \vec{r}'' + 2\left(\vec{\omega} \times \vec{V}_r\right) + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \quad (4.2)'$$

$$\vec{a}_r = \vec{r}'' = \begin{pmatrix} x^{1''} \\ x^{2''} \\ x^{3''} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{V}_r = \begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix}$$

الجملة $O_1x_1y_1z_1$ ككل. لنطبق نفس المحاكمة على المتجهة $\overline{\frac{d'P}{dt}} + (\vec{\omega} \times \vec{r})$ ولنأخذ مشتق (4.1)، أي تسارع النقطة P ونرمز له بـ $\vec{a}_a$:

$$\vec{a}_a = \overline{\frac{d^2P}{dt^2}} = \frac{d^2\vec{a}}{dt^2} + \frac{d'}{dt}\left[\overline{\frac{d'P}{dt}} + \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)\right] + \vec{\omega} \times \left[\overline{\frac{d'P}{dt}} + \vec{\omega} \times \vec{r}\right] \quad (4.2)$$

$$= \overline{\frac{d^2a}{dt^2}} + \overline{\frac{d'^2P}{dt^2}} + \frac{d'\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \overline{\frac{d'P}{dt}} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)$$

إن الحد $\overline{\frac{d'^2P}{dt^2}}$ هو التسارع النسبي ونرمز له بـ $\vec{a}_r$

$$\vec{a}_r = \overline{\frac{d'^2P}{dt^2}} \quad (4.3)$$

كما أن المجموع

$$\vec{a}_e = \overline{\frac{d^2a}{dt^2}} + \frac{d'\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) = \frac{d\vec{V}_e}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{a}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}\right) \quad (4.4)$$

هو تسارع الجر، حيث طبقنا العلاقة (4.1) على متجهة سرعة الجر $\vec{V}_e$ معتبرين $\vec{r}$ ثابتة.

ولدينا في النهاية

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c \quad (4.5)$$

حيث سمينا المقدار الإضافي

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r \quad (4.6)$$

تسارع كوريوليس.

يمكننا، كما فعلنا للحصول على '(2.1)، العودة إلى الإحداثيات لاشتقاق (4.1) والوصول إلى (4.2) لنجد

$$\vec{a}_a = \overline{\frac{d^2P}{dt^2}} = \overline{\frac{d^2a}{dt^2}} + x^{i''}\vec{e}_i + 2x^{i'}\vec{e}_i' + x^i\vec{e}_i''$$

إن $\vec{e}_i' = (\vec{\omega} \times \vec{e}_i)$ ومنه $2x^{i'}\vec{e}_i' = 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r$. كما أن $\vec{e}_i'' = \overline{\frac{d^2e_i}{dt^2}} = (\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{e}_i) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{e}_i)$.

ومنه

$$\vec{a}_a = \overline{\frac{d^2a}{dt^2}} + \vec{r}'' + 2\left(\vec{\omega} \times \vec{V}_r\right) + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \quad (4.2)'$$

$$\vec{a}_r = \vec{r}'' = \begin{pmatrix} x^{1''} \\ x^{2''} \\ x^{3''} \end{pmatrix} \quad ، \quad \vec{V}_r = \begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix}$$

والسرعة في الجملة الثابتة هي

$$\begin{pmatrix} \theta' r\cos\theta\cos\psi \\ \theta' r\cos\theta\sin\psi \\ -\theta' r\sin\theta \end{pmatrix} \quad (4) \qquad (4.7)$$

أي أنها تعطينا في الجملة الثابتة بإسقاط Ox على OX و OY إحداثيات $\frac{d'\vec{P}}{dt}$، إحداثيات سرعة P على خط الطول كما وجدناها في (ط(3.30).2). تعين الزاوية ψ حركة الجر، حركة الجملة المرتبطة بـ P بالنسبة الجملة الثابتة OXYZ وهي حسب (4.1) $\vec{\psi}' \times \vec{r}$ وتعطينا الحركة على خط العرض كما وجدناها في (ع(3.30).2) :

$$\vec{\psi}' \times \vec{r} = \begin{pmatrix} -\psi' r\sin\theta\sin\psi \\ \psi' r\sin\theta\cos\psi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (4.8)$$

إن التسارع النسبي $\frac{d^2P}{dt^2}$ هو $\vec{a}_{ط}$ وتسارع الجر هو $\vec{\psi} \times \left(\vec{\psi} \times \vec{r}\right) + \vec{\psi} \times \vec{r} + \frac{d'\vec{\psi}}{dt}$ وبما أن اتجاه $\vec{\psi}'$ ثابت فلمشتقه نفس الاتجاه ونحصل من $\vec{\psi}_z' \times \vec{r}$ على الحدين قبل الأخيرين في العلاقات ((3.33).2).

يبقى إذاً تسارع كوريوليس :

$$2\vec{\psi}' \times \vec{V}_r$$

ومركباته حسب (4.7) هي

$$\begin{pmatrix} -2\psi'\theta'\cos\theta\sin\psi \\ 2\psi'\theta'\cos\theta\cos\psi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (4.8)'$$

وهي المركبات التي وجدناها كذلك في ((3.33).2) أي الحدين الأخيرين في المشتقات الثانية.

2.4– القوى الشبيهة :

لنكتب المبدأ الثاني في الميكانيك، قانون نيوتن، من أجل النقطة P ذات الكتلة m في جملة المحاور المرتبطة بها أي في جملة المحاور المتحركة، $O_1x_1y_1z_1$ ولنسمها S'. وليس في جملة المحاور الثابتة OXYZ، كما فعلنا حتى الآن. لدينا في هذه الأخيرة $\vec{F} = m\vec{a}_a = m(\vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c)$. ونكتب في الجملة S'

$$m\vec{a}_r = \vec{F} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c = \vec{F}_{eff} \qquad (4.9)$$

سمينا مجموع هذه القوى القوة الفعالة.

تعني هذه الكتابة أن القانون الأساسي في الميكانيك يحتفظ بشكله في الجملة المتحركة S' : التسارع النسبي متناسب مع القوة، شريطة أن نضيف إلى القوة المؤثرة $\bar{F}$ قوتين إضافيتين وهميتين $-m\bar{a}_e$ و $-m\bar{a}_c$ نسميهما بالترتيب قوة عطالة الجر وقوة العطالة الإضافية – قوة كوريوليس. إنهما قوى عطالة بمعنى أنهما يعيقان حركة النقطة وهما وهميتان لأنهما لا تنتجان عن وجود أجسام أخرى تتفاعل مع الجسيم P. إنهما ناشئتان عن اختيارنا لدراسة حركة P في جملة محاور S' تتسارع وتدور بالنسبة لكل الجمل الغاليلية S الثابتة أو التي تتحرك بحركة مستقيمة منتظمة بالنسبة لبعضها بعضاً : $\overline{\frac{d^2a}{dt^2}} = 0$ و $\bar{\omega} = 0$ و $\bar{a}_e = 0$، $\bar{a}_c = 0$ و $\bar{a}_a$ هي نفسها بالنسبة كل الجمل الغاليلية $\bar{a}_a = \bar{a}_r$. نسمي هذه القوى شبيهة قوى لتمييزها عن القوى الحقيقية – قوى التفاعل التي لا تتوقف على اختيار نظمة المحاور. إن وصف هذه القوى بالوهمية، رغم توضيحنا لما نريد الدلالة عليه بهذا الوصف، مدعاة للبس لأن الأجسام تتأثر بهذه القوى كما تتأثر بالقوى الحقيقية، قوى التفاعل، ولا تفرق بينها. ما الفرق مثلاً بين اندفاعنا نحو الأمام تحت تأثير التوقف المفاجئ – التسارع السالب – للحافلة التي نركب فيها وبين الاندفاع الناتج عن دفع شخص آخر لنا في هذا الاتجاه. هذا أولاً، وثانياً ما هي حقيقة المحاور الغاليلية ؟ وهل هي موجودة فعلاً ؟ أم أنها صورة مثالية لجمل مادية بعيدة بقدر كاف عن المادة الكونية الأخرى بحيث يمكننا اعتبارها جملاً معزولة لا تخضع لأي قوة حقيقية، وأخيراً أليس من الممكن اعتبار التثاقل – إحدى القوى الحقيقية الأربع – شبه قوة ؟* وألم نر تساوي الكتلة العطالية والكتلة التثاقلية ؟ أليس من الممكن والحال هذه اعتبار التسارع الناشئ عن التثاقل ناجماً عن وجود الجسم في جملة محاور متسارعة بانتظام في اتجاه تسارع الجسم بحيث ينعدم تسارعه المطلق فيها. تأخذ المعادلة (4.9) الشكل البسيط التالي :

$$m\bar{a}_r = -m\bar{a}_e$$

وإذا كان الأمر كذلك فلم يعد، فيما يخص حقل التثاقل على الأقل، معنى للحديث عن المحاور الغاليلية أو عن الخطوط المستقيمة فكل الجمل متسارعة بانتظام ولم يعد لمفهوم الخط المستقيم معناه الإقليدي. إن أقرب مسافة بين نقطتين هي قوس الدائرة الكبرى التي تقع عليها النقطتان، الخ. يقع على عاتق نظرية النسبية العامة الإجابة الدقيقة، الرياضية والفيزيائية، عن هذه التساؤلات وتبيان أن الهندسة وحدها هي التي تحدد التثاقل. لا تدخل دراسة هذه النظرية ضمن إطار هذا الكتاب ولذا سنكتفي بالعودة إلى الميكانيك النيوتوني التقليدي كنظرية تقريبية تتيح لنا فهم عدد كبير جداً من الظواهر الطبيعية، وخاصة منها ما يقع على سطح الأرض.

* إن كل أشباه القوى متناسبة مع الكتلة.

تعني هذه الكتابة أن القانون الأساسي في الميكانيك يحتفظ بشكله في الجملة المتحركة S' : التسارع النسبي متناسب مع القوة، شريطة أن نضيف إلى القوة المؤثرة $\vec{F}$ قوتين إضافيتين وهميتين $-m\vec{a}_e$ و $-m\vec{a}_c$ نسميهما بالترتيب قوة عطالة الجر وقوة العطالة الإضافية – قوة كوريوليس. إنهما قوى عطالة بمعنى أنهما يعيقان حركة النقطة وهما وهميتان لأنهما لا تنتجان عن وجود أجسام أخرى تتفاعل مع الجسيم P. إنهما ناشئتان عن اختيارنا لدراسة حركة P في جملة محاور S' تتسارع وتدور بالنسبة لكل الجمل الغاليلية S الثابتة أو التي تتحرك بحركة مستقيمة منتظمة بالنسبة لبعضها بعضاً : $\overline{\frac{d^2a}{dt^2}} = 0$ و $\vec{\omega} = 0$ و $\vec{a}_e = 0$ ، $\vec{a}_c = 0$ و $\vec{a}_a$ هي نفسها بالنسبة كل الجمل الغاليلية $\vec{a}_a = \vec{a}_r$. نسمي هذه القوى شبيهة قوى لتمييزها عن القوى الحقيقية – قوى التفاعل التي لا تتوقف على اختيار نظمة المحاور. إن وصف هذه القوى بالوهمية، رغم توضيحنا لما نريد الدلالة عليه بهذا الوصف، مدعاة للبس لأن الأجسام تتأثر بهذه القوى كما تتأثر بالقوى الحقيقية، قوى التفاعل، ولا تفرق بينها. ما الفرق مثلاً بين اندفاعنا نحو الأمام تحت تأثير التوقف المفاجئ – التسارع السالب – للحافلة التي نركب فيها وبين الاندفاع الناتج عن دفع شخص آخر لنا في هذا الاتجاه. هذا أولاً، وثانياً ما هي حقيقة المحاور الغاليلية ؟ وهل هي موجودة فعلاً ؟ أم أنها صورة مثالية لجمل مادية بعيدة بقدر كاف عن المادة الكونية الأخرى بحيث يمكننا اعتبارها جملاً معزولة لا تخضع لأي قوة حقيقية، وأخيراً أليس من الممكن اعتبار التثاقل – إحدى القوى الحقيقية الأربع – شبه قوة ؟* وألم نر تساوي الكتلة العطالية والكتلة التثاقلية ؟ أليس من الممكن والحال هذه اعتبار التسارع الناشئ عن التثاقل ناجماً عن وجود الجسم في جملة محاور متسارعة بانتظام في اتجاه تسارع الجسم بحيث ينعدم تسارعه المطلق فيها. تأخذ المعادلة (4.9) الشكل البسيط التالي :

$$m\vec{a}_r = -m\vec{a}_e$$

وإذا كان الأمر كذلك فلم يعد، فيما يخص حقل التثاقل على الأقل، معنى للحديث عن المحاور الغاليلية أو عن الخطوط المستقيمة فكل الجمل متسارعة بانتظام ولم يعد لمفهوم الخط المستقيم معناه الإقليدي. إن أقرب مسافة بين نقطتين هي قوس الدائرة الكبرى التي تقع عليها النقطتان، الخ. يقع على عاتق نظرية النسبية العامة الإجابة الدقيقة، الرياضية والفيزيائية، عن هذه التساؤلات وتبيان أن الهندسة وحدها هي التي تحدد التثاقل. لا تدخل دراسة هذه النظرية ضمن إطار هذا الكتاب ولذا سنكتفي بالعودة إلى الميكانيك النيوتوني التقليدي كنظرية تقريبية تتيح لنا فهم عدد كبير جداً من الظواهر الطبيعية، وخاصة منها ما يقع على سطح الأرض.

* إن كل أشباه القوى متناسبة مع الكتلة.

3.4- تطبيق على حركة الأرض الدورانية :

يمكن اعتبار الأرض في مدارها حول الشمس جملة محاور غاليلية لفترة وجيزة، نهمل فيها تسارع الأرض وننظر إلى المسافة المقطوعة على المدار بين نقطتين منه خلال هذه الفترة، على القطع الناقص، كأنها منطبقة مع الوتر بينهما، بحيث تصبح حركة دورانية بحتة بالنسبة لجملة المحاور الغاليلية OXYZ المرتبطة بمركزها.

كما يمكننا في الحالة العامة إدخال تسارع الأرض في تعريف الثقل على الوجه التالي : لنميز القوى التي تؤثر على النقطة المادية P الواقعة على سطح الأرض، قوى جاذبية الأرض والشمس والكواكب الأخرى لها، ونرمز لهذه القوى بـ $\vec{A}$، عن القوى الأخرة المطبقة، ونرمز لها بـ $\vec{F}$ ونكتب العلاقة (4.9) في الجملة Oxyz المتحركة على الشكل

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{A} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c = \vec{F}_{eff} \qquad (4.10)$$

لنفرض الآن أن القوة الوحيدة المطبقة هي توتر خيط علقت في طرفه النقطة P لمنعها من السقوط تحت تأثير ثقلها الذي نرمز له بـ $\vec{P}$ ولنفرض أن النقطة في وضع توازن بالنسبة للأرض بحيث تصبح (4.10) على الشكل

$$0 = -\vec{P} + \vec{A} - m\vec{a}_e \qquad (4.11)$$

(قوة كوريوليس منعدمة لانعدام السرعة النسبية $\vec{a}_r$)، ينتج عن هذه العلاقة أن الثقل هو

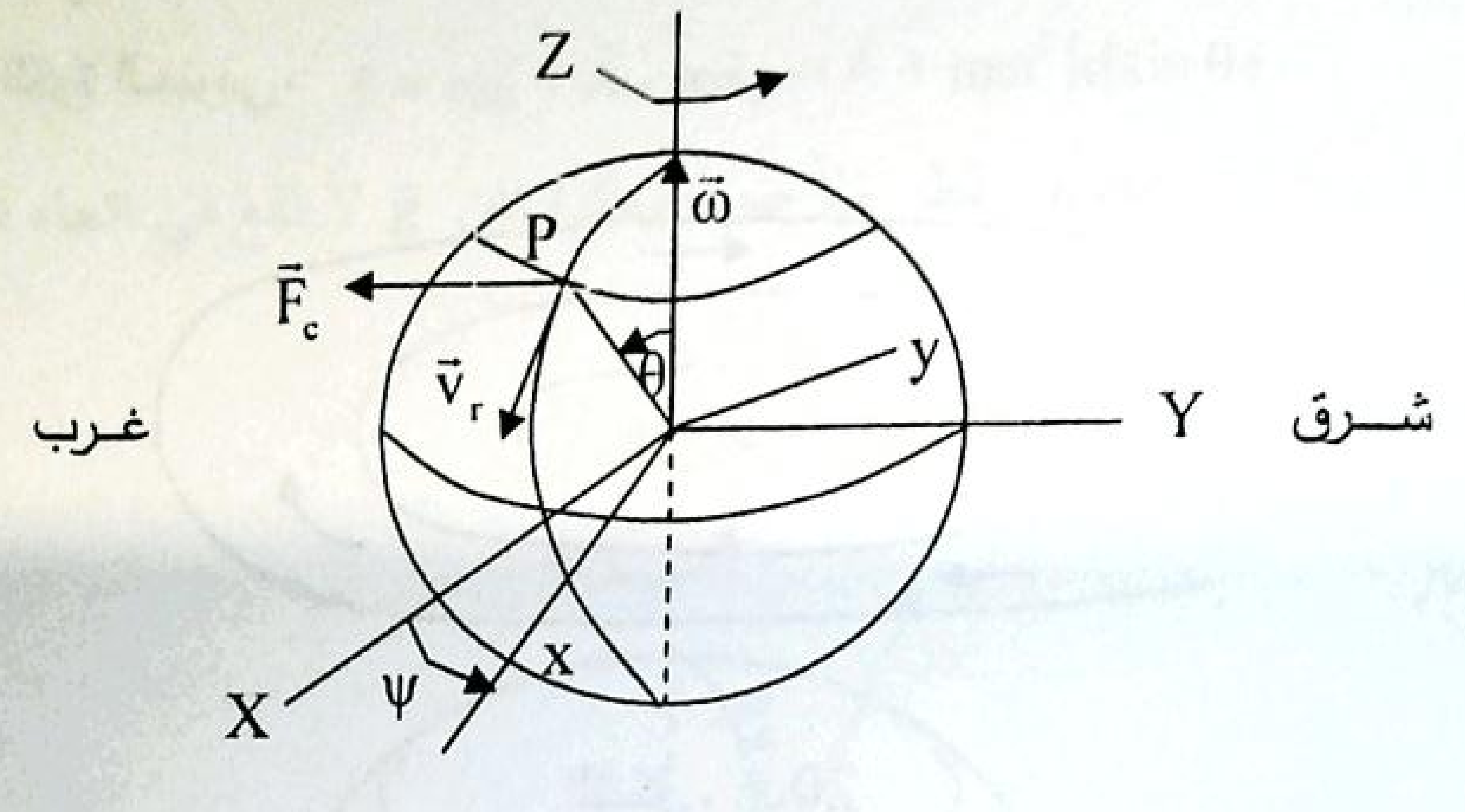
$$\vec{P} = \vec{A} - m\vec{a}_e \qquad (4.11)'$$

ويعبر عن كل قوى الجاذبية – جاذبية الأرض بشكل أساسي – وعن قوة عطالة الجر في آن واحد، بحيث لا يبقى في (4.9) في حركة الجسم بتأثير ثقله إلا قوة كوريوليس كقوة إضافية

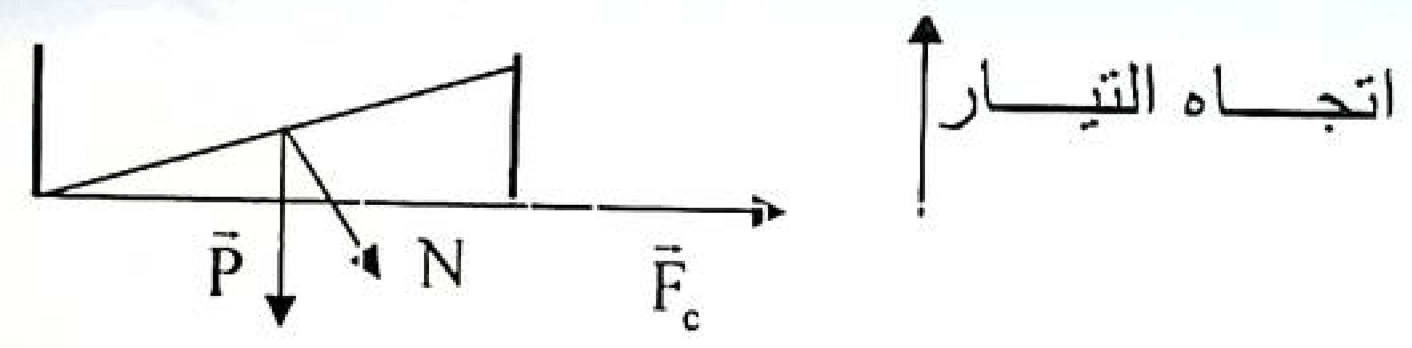
$$m\vec{a}_r = \vec{P} - 2m\vec{\omega} \times \vec{V}_r = \vec{P} + \vec{F}_C = \vec{F}_{eff}$$

لنفرض أن القوة المطبقة تجعل النقطة المادية P تتحرك على أحد خطوط طول الكرة الأرضية ذات القطر R، θ' السرعة الزاوية لهذه الحركة، ولتكن $\vec{\omega} = \vec{\psi}'$ السرعة الزاوية الثابتة لدوران الأرض حول محورها من الغرب نحو الشرق. إن قوة كوريوليس ستجعل P تنحرف عن مسارها، الشكل. 20.a إن اتجاه هذه القوة هو بحيث تكون الثلاثية $(\vec{V}_r, \vec{\omega}, \vec{F}_C)$ مباشرة وطويلتها هي $2mV_r\omega\cos\theta$، وتساوي الصفر على خط الاستواء. أو بشكل أكثر تحديداً : إذا كان اتجاه الحركة $\left(\widehat{\vec{V}_r, \vec{\omega}} = \theta + \frac{\pi}{2}\right)$ من الشمال نحو الجنوب، فإن اتجاه قوة كوريوليس هو من الشرق نحو الغرب في نصف الكرة الشمالي – وينعكس الاتجاه في نصف الكرة الجنوبي؛ وإذا أخذنا عوضاً عن حركة نقطة مادية حركة جملة متصلة من الجسيمات، حركة نهر يسير على منحى خط الطول فإن قوى كوريوليس تجعل مياه النهر تضغط

دوماً على الضفة اليمنى في نصف الكرة الشمالي الشكل. 20.b: من الشرق نحو الغرب إذا كان اتجاه التيار من الشمال نحو الجنوب ومن الغرب نحو الشرق إذا كان اتجاه التيار من الجنوب نحو الشمال والضغط هنا أيضاً على الضفة اليمنى.



الشكل. 20.a



الشكل. 20.b

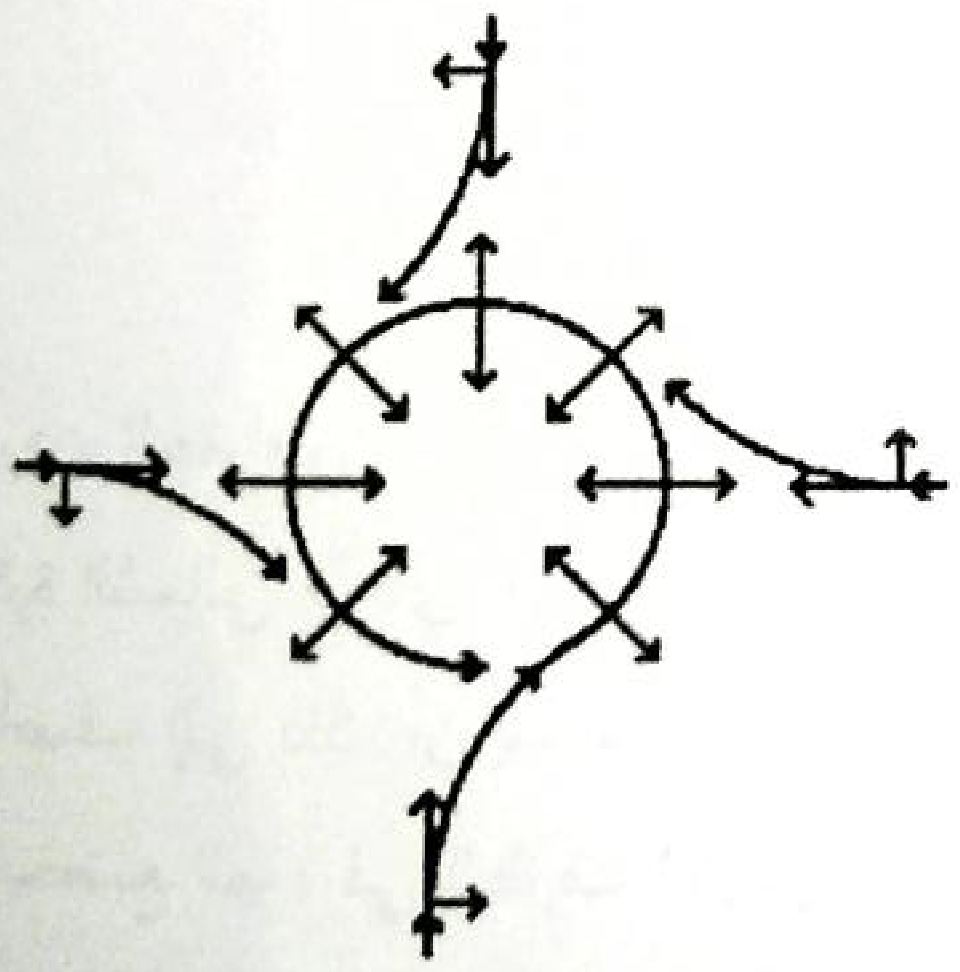
هذا وقد برهن الجغرافيون بأمثلة عديدة هذه الظاهرة وبينوا كيف يؤثر ضغط الماء على الضفة اليمنى في نصف الكرة الشمالي فيؤدي إلى تآكل أكبر فيها – كان البيروني على حد علمنا أول من أشار إلى هذه الظاهرة. أضف إلى ذلك أن مستوى الماء على طرف النهر الأيمن أعلى بقليل عن مستواها في الطرف الأيسر : يخضع الماء في الطرف الأيمن إلى قوتين، ثقله وقوة كوريوليس – نحو اليمين – ويجب لتوازن السائل أن يبقى سطحه عمودياً على حصيلة القوتين.

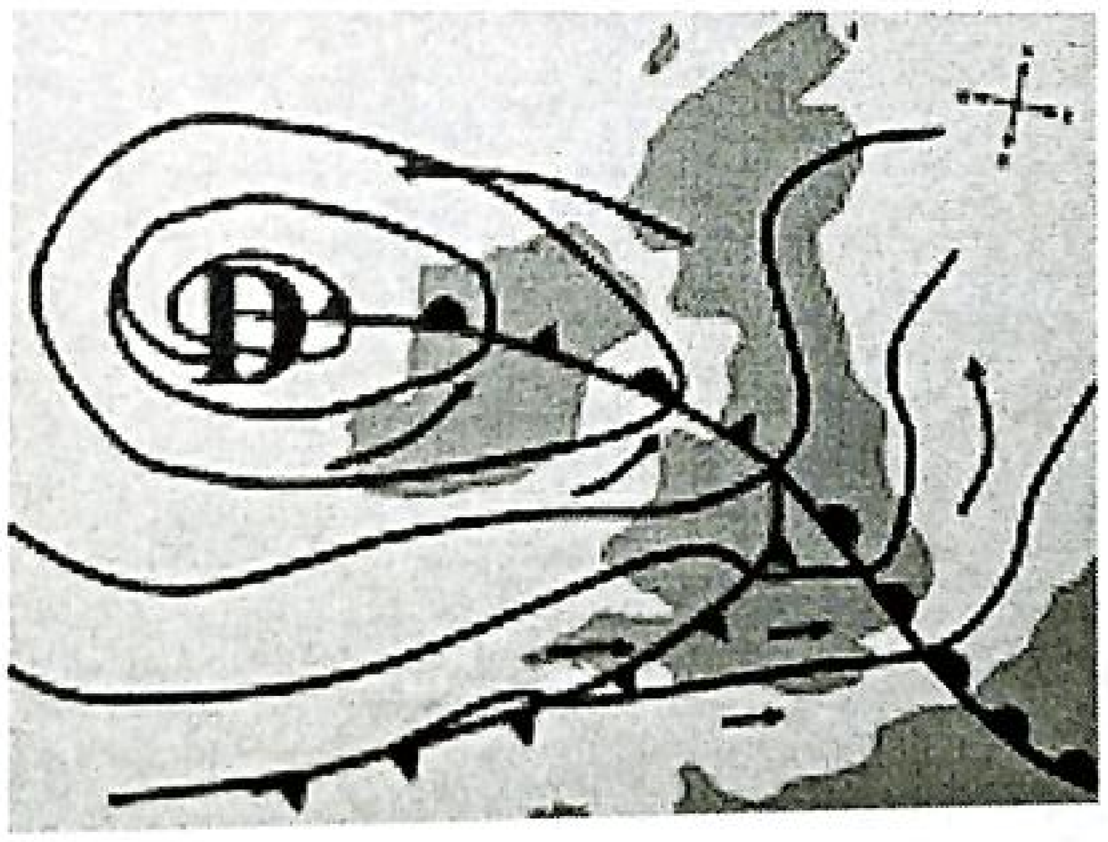
يتجلى مفعول قوة كوريوليس بشكل قوي في الأحوال الجوية، في حركة الرياح : تتجه الرياح من المناطق مرتفعة الضغط إلى المناطق الأقل ضغطاً أي في اتجاه معاكس لمتجهة تغير الضغط P، غراديان الضغط $\vec{\nabla}P$: $\frac{\partial P}{\partial z}$، $\frac{\partial P}{\partial y}$، $\frac{\partial P}{\partial x}$، وهي متجهة عمودية على السطوح متساوية الضغط $P = cte$ (Isobars).

تنعطف هذه الرياح نحو اليمين في نصف الكرة الشمالي، الشكل. 20.c. وتتدفق الرياح في حال وقوع انخفاض جوي أو إعصار، حيث تأخذ السطوح متساويات الضغط أشكالاً مغلقة ذات مركز واحد من اليمين نحو اليسار، في اتجاه معاكس لحركة عقارب الساعة في نصف الكرة الشمالي. وفي اتجاه عقارب الساعة في نصف الكرة الجنوبي.

الشكل. 20.c

يُظهر الشكلان أدناه خريطة إجمالية لإعصار غير استوائي فوق انجلترا وإيرلندا. تشير الأسهم الزرقاء الواقعة بين المستويات المتساوية الضغط إلى اتجاه الريح. أما المخطط فيبين تغير اتجاه الريح نحو اليمين في نصف الكرة الشمالي بفعل قوى كوريوليس (بالأحمر) واتجاه غراديان الضغط (بالأزرق). تعطف قوة كوريوليس العمودية على اتجاه الحركة الريح نحو اليمين (الخطوط السوداء).





4.4– السقوط الحر على سطح الأرض :

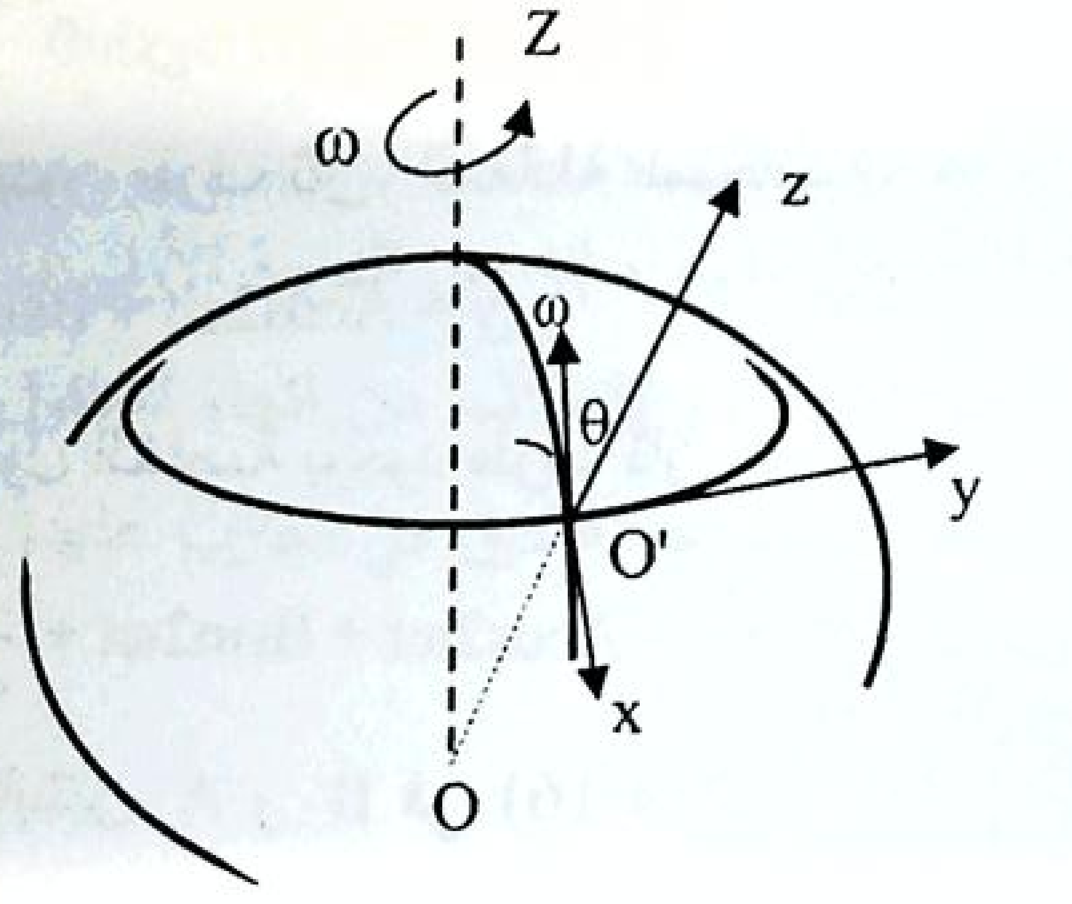
لاحظنا في العلاقة (4.11) أن ثقل الجسم يتضمن قوة عطالة الجر أي الحد الذي يحوي على

$$-m\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) = m\omega^2\vec{r} - m\left(\vec{\omega} \cdot \vec{r}\right)\vec{\omega}$$

أي على القوة النابذة $m\omega^2\vec{r}$ المتناسبة مع البعد عن مركز الأرض والتي ينجم عنها تفلطح سطح الأرض هذا من جهة، ومن جهة ثانية فإن ثقل الجسم عمودي على هذا السطح. لذا نكتب '(4.11) على شكل نهمل فيه مسقط قوة الجر على محور الدوران $\vec{\omega}$:

$$\vec{P} = m\vec{g} = \vec{A} - m\vec{a}_e = \vec{A} + m\omega^2|r|\sin\theta\vec{e}_r \quad (4.11)''$$

حيث $\vec{e}_r$ المتجهة الواحدية على نصف قطر الأرض، وهكذا فإن $\vec{g}$ لا تقع في اتجاه نصف قطر الأرض وإنما عمودية على السطح المتفلطح.



الشكل.21

نكتب معادلة الحركة في الجملة المتحركة (4.9) على الشكل

$$m\vec{a}_r = \vec{P} - m\vec{a}_c = m\vec{g} + 2m\vec{V}_r \times \vec{\omega} \quad (4.12)$$

ونسقطها على ثلاث محاور متعامدة مرتبطة بالأرض في النقطة 'O، الشكل.21، حيث يقع O'x في اتجاه المماس على خط الطول من الشمال نحو الجنوب، و O'y في اتجاه المماس على خط العرض من الغرب نحو الشرق و O'z عمودياً عليهما ومارًا تقريباً في مركز الأرض O وكالمعتاد θ هي الزاوية بين Oz و OZ، اتجاه محور الدوران. لتكن 'x، 'y، 'z مركبات سرعة السقوط و $-\omega\sin\theta$، 0، $\omega\cos\theta$ مركبات ω. $\widehat{O'xOZ} = \frac{\pi}{2} - \theta$؛ نسقط (4.12) على المحاور الثلاثة فنحصل على جملة المعادلات التفاضلية

$$\begin{cases} x'' = 2\omega y'\cos\theta \\ y'' = -2\omega z'\sin\theta - 2\omega x'\cos\theta \\ z'' = -g + 2\omega y'\sin\theta \end{cases} \quad (4.13)$$

نفرض أن الجسم يسقط سقوطاً حراً من ارتفاع قدره h عن سطح الأرض : $x_o = y_o = 0$ ، $z_o = h$ و $x'_o = y'_o = z'_o = 0$. نكامل المعادلتين الأولى والثالثة لنحصل على x' و z' ونبدل النتيجة في المعادلة الثانية. نجد إذاً

$$\begin{cases} x' = 2\omega y\cos\theta \\ z' = -gt + 2\omega y\sin\theta \end{cases} \tag{4.14}$$

و

$$y'' = 2\omega gt\sin\theta - 4\omega^2 y\sin^2\theta - 4\omega^2 y\cos^2\theta$$

أو

$$y'' + 4\omega^2 y = 2\omega g\sin\theta t = cte \cdot t = Ct \tag{4.15}$$

لأن المقادير ω ، g ، θ ثابتة و $C = 2\omega g\sin\theta$ ثابتة.

إن الحل العام للمعادلة (4.15) بدون طرف ثان، المعادلة المتجانسة، هو

$$y = A\cos2\omega t + B\sin2\omega t \tag{4.16}$$

والحل العام هو بإضافة أحد الحلول الخاصة بوجود طرف ثان هو $y = \frac{C}{4\omega^2}t$ و $y'' = 0$

$$y = A\cos2\omega t + B\sin2\omega t + \frac{C}{4\omega^2}t \tag{4.17}$$

تحدد لنا الشروط البدائية قيمة الثابتتين A و B في (4.16).

نرى بسهولة من $y_o = 0$ أن $A = 0$ ومن $y'_o = 0$ أن $B = -\frac{C}{8\omega^3}$ وأخيراً

$$y = \frac{C}{4\omega^2}\left(t - \frac{\sin2\omega t}{2\omega}\right) = \frac{g\sin\theta}{2\omega}\left(t - \frac{\sin2\omega t}{2\omega}\right) \tag{4.17)'}$$

نبدل y بهذه القيمة في (4.14) ونكامل من جديد، آخذين بعين الاعتبار الشروط البدائية، لنجد من أجل x :

$$x = g\sin\theta\cos\theta\left(\frac{t^2}{2} + \frac{\cos2\omega t}{4\omega^2}\right) + C'$$

ومن أجل $x = 0$:

$$C' = \frac{-g\sin\theta\cos\theta}{4\omega^2}$$

ومنه

$$x = g\sin\theta\cos\theta\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1 - \cos2\omega t}{4\omega^2}\right) \tag{4.18}$$

ونجد من أجل z والثابتة

$$C'' = h - \frac{g\sin^2\theta}{4\omega^2}$$

$$z = \frac{-gt^2}{2} + g\sin^2\theta\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1 - \cos2\omega t}{4\omega^2}\right) + h \tag{4.19}$$

إن ω مقدار صغير جداً

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600} \simeq \frac{1}{14000} \text{ راديان/الثانيـــة}$$

ننشر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ من أجل α صغيرة جداً على الشكل

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} + \dots \quad , \quad \sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \dots$$

فتأخذ مركبات الجسم الساقط سقوطاً حراً (عندما نتوقف عند الحدود من الدرجة الثانية بـ ω أي بالحد من الدرجة الرابعة في النشر لوجود ω^2 في المخرج) الشكل التالي

$$x = \frac{gt^2}{6}\sin\theta\cos\theta(\omega t)^2 \qquad (4.18)'$$

$$y = \frac{gt^2}{3}\sin\theta\,\omega t \qquad (4.17)''$$

$$z = h - \frac{gt^2}{2}\left(1 - \frac{\sin^2\theta}{3}(\omega t)^2\right) \qquad (4.19)'$$

تعطينا العلاقة "(4.17) الانحراف نحو الشرق، إنه من الدرجة الأولى بـ ωt ولذا فهو الأهم أما '(4.18) و '(4.19) فتعينان الانحراف نحو الجنوب والانحراف عن اتجاه الشاقول على الترتيب وهما انحرافان من الدرجة الثانية بـ ωt. وقد لوحظ الانحراف نحو الشرق في تجارب عديدة ووجد أن قيمته تتفق مع المعادلة "(4.17).

5.4- نواس فوكو Foucault :

تمهيد : مضاريب لاغرانج Lagrange.

لننظر في الحالة العامة حيث توجد لدينا علاقة بين n متغيراً $x^1 \dots x^n$. نكتب هذه العلاقة على الشكل

$$f\left(x^1, \dots, x^n\right) = 0$$

وبأخذ تفاضل هذه العلاقة بالنسبة لكل المتغيرات نجد

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx_i = 0 \qquad L_1$$

فإذا كانت المتغيرات مستقلة عن بعضها بعضاً فإن L_1 تعني أن كل مشتق جزئي $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ يساوي الصفر، حسب تعريف الاستقلال.

أما إذا لم يكن الأمر كذلك، إذا ارتبطت المتغيرات ببعضها بـ m علاقة مثلاً، من الشكل

$$\phi_j\left(x^1 \dots x^n\right) = 0 \qquad j = n - m + 1, \dots n \qquad L_2$$

فمعنى ذلك أن عدد المتغيرات المستقلة أصبح n - m متغيراً فقط : تسمح العلاقات L_2 بالحصول على الـ m متغيراً الباقية بدليل الـ n - m الأولى التي فرضناها مستقلة. لتكن هذه المتغيرات المستقلة هي $x^1 \dots x^{n-m}$. نسمي العلاقات L_2 القيود أو الصلات.

نريد الآن كتابة دالة بالمتغيرات المستقلة وحدها حتى نستطيع استنتاج أن مشتقاتها الجزئية تساوي الصفر كما في L_1. نأخذ الدالة المساوية للصفر

$$f + \sum_{j=n-m+1}^{n} \lambda^j \phi_j = 0 \qquad L_3$$

حيث أدخلنا m عدداً اعتباطياً λ^j، تسمى مضروبات لاغراج ونكتب تفاضل هذه الدالة على الشكل

$$L_4 \quad \sum_{i=1}^{n-m}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i} + \sum_{j=n-m+1}^{n} \lambda^j \frac{\partial \phi_j}{\partial x^i}\right)dx_i + \sum_{i=n-m+1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i} + \sum_{j=n-m+1}^{n} \frac{\lambda^j \partial \phi_j}{\partial x^i}\right)dx_i = 0$$

سنختار الآن الثوابت λ^j وعددها m بحيث ينعدم كل قوس في المجموع الثاني، أي أننا سنفتش عن حل لجملة معادلات خطية $n - m$ بالمجاهيل λ^j :

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} + \sum_{j=n-m+1}^{n} \frac{\lambda^j \partial \phi_j}{\partial x^i} = 0 \qquad \text{من أجل } i = n-m+1, n-m+2, \dots n \quad L_5$$

أما أقواس المجموع الأول فكلها مساوية للصفر عندئذ لأن المتغيرات x^i $(i = 1, .. n-m)$ مستقلة فرضاً.

تكاد دراسة نواس فوكو لا تختلف عن دراسة السقوط الحر إلا من حيث وجود النقطة المادية معلقة بواسطة خيط مثالي طوله ℓ إلى نقطة ثابتة C. لدينا إذاً صلة – أو قيد – من الشكل

$$\phi(x, y, z) = \frac{m}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2 - \ell^2\right) = 0$$

$$\left(x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z\right)$$

عدد المتغيرات المستقلة اثنتان فقط ولدينا مضروب لاغرانج واحد λ، وبأخذ f كتابع لـ x'، y'، z' نحصل على المعادلات (4.13) مضافاً إليها بالترتيب الحد $\lambda\frac{\partial \phi}{\partial x}$، $\lambda\frac{\partial \phi}{\partial y}$، $\lambda\frac{\partial \phi}{\partial z}$، أي المعادلات التالية

$$\begin{cases} x'' = 2\omega y'\cos\theta + \lambda x \\ y'' = -2\omega z'\sin\theta - 2\omega x'\cos\theta + \lambda y \\ z'' = -g + 2\omega y'\sin\theta + \lambda z \end{cases} \qquad (4.20)$$

حصلنا على المعادلتين الأولتين من قوسي المجموع الأول في L_4، x و y متغيران مستقلان والمعادلة الثالثة من القوس الوحيد في المجموع الثاني؛ z تابعة لـ x و y في العلاقة $x^2 + y^2 + z^2 - \ell^2 = 0$ فهي التي تعين لنا إذاً قيمة λ. سندرس حركة النواس، حركة النقطة المتحركة الواقعة على سطح كرة مركزها C ونصف قطرها ℓ، وسننظر إلى حركته في نوسات صغيرة جداً $\theta \simeq 0$ و $\frac{x}{\ell}$، $\frac{y}{\ell}$ مقداران لامتناهيان في الصغر، أي أن $z^2 \simeq \ell^2$، بإهمال كل ما هو لامتناه في الصغر من الدرجة الثانية و $z \simeq -\ell$ (اتجاه Oz نحو الأعلى) $z' = 0$ $z'' = 0$. والحركة مجاورة لوضع التوازن أما في وضع التوازن فإن $y' = 0$ بالإضافة إلى z' و z'' ونحصل عندئذ على قيمة مضروب لاغرانج الثابت

$$\lambda = \frac{-g}{\ell}$$

نضع هذا المقدار في المعادلتين في (4.20) آخذين بعين الاعتبار انعدام z' فنجد

$$\begin{cases} x'' - 2uy' + \frac{g}{\ell}x = 0 \\ y'' + 2ux' + \frac{g}{\ell}y = 0 \end{cases} \qquad (4.21)$$

حيث سمينا $u = \omega\cos\theta$. نكتب هاتين المعادلتين على شكل معادلة واحدة بالمتغير العقدي $\zeta = x + iy$:

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2iu\frac{d\zeta}{dt} + \frac{g}{\ell}\zeta = 0 \qquad (4.21)'$$

إنها معادلة خطية متجانسة (طرفها الثاني يساوي الصفر) وأمثالها ثابتة. نفتش عن حل لها كالمعتاد على الشكل

$$\zeta = Ae^{i\alpha t}$$

أي عن حل للمعادلة من الدرجة الثانية

$$\alpha^2 + 2u\alpha - \frac{g}{\ell} = 0$$

جذراها هما $\alpha_1 = -u + \left(u^2 + \frac{g}{\ell}\right)^{1/2}$ و $\alpha_2 = -u - \left(u^2 + \frac{g}{\ell}\right)^{1/2}$

والحل العام هو

$$\zeta = A_1e^{i\alpha_1 t} + A_2e^{i\alpha_2 t} \qquad (4.22)$$

تحدد الشروط البدائية قيمة هاتين الثابتتين، A_1 ، A_2 : لنفرض أن النواس في اللحظة البدائية منزاح عن وضع التوازن (وضع الشاقول) باتجاه Ox أي من الشمال نحو الجنوب بمسافة قدرها $x_o = a$ ، $y_o = 0$ ؛ وأنه ترك بدون سرعة بدائية : $x'_o = y'_o = 0$ في اللحظة $t_o = 0$ ؛ نبدل في (4.22) فنجد

$$A_1 + A_2 = a$$

$$A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 = 0$$

ومنه

$$A_1 = \frac{a}{2}\left[1 + \frac{u}{\left(u^2 + \frac{g}{\ell}\right)^{1/2}}\right]$$

$$A_2 = \frac{a}{2}\left[1 - \frac{u}{\left(u^2 + \frac{g}{\ell}\right)^{1/2}}\right]$$

لنحسب الآن سرعة النواس. نجد بملاحظة أن $-\alpha_1A_1 = \alpha_2A_2$ ووضع e^{-iut} خارج القوس أن

$$\frac{d\zeta}{dt} = i\alpha_1A_1e^{-iut}\left(e^{i(u^2+\frac{g}{\ell})^{1/2}t} - e^{-i(u^2+\frac{g}{\ell})^{1/2}t}\right)$$

$$= i\alpha_1A_1e^{-iut} \times 2i\sin\left(u^2 + \frac{g}{\ell}\right)^{1/2}t$$

$$= -a\frac{g}{\ell}\frac{1}{\left(u^2+\frac{g}{\ell}\right)^{1/2}}e^{-iut}\sin\left(u^2+\frac{g}{\ell}\right)^{1/2}t \qquad (4.23)$$

يساوي هذا المشتق الصفر، وبالتالي تتعدم السرعتان x' و y' من أجل

$$\sin\left(u^2+\frac{g}{\ell}\right)^{1/2}t = 0$$

أي من أجل

$$t = \frac{n\pi}{\left(u+\frac{g}{\ell}\right)^{1/2}} = \frac{n}{2}T \qquad (4.24)$$

وهي الفترات التي يبلغ فيها النواس مداه ليعود في الاتجاه المعاكس. إنها أمثال نصف الدور T : T هو الزمن الذي تستغرقه عودة النواس إلى نقطة البداية؛ لنحسب ζ من أجل $t = T$. لدينا من (4.22)

$$\zeta = e^{-iuT}\left(A_1e^{i2\pi} + A_2e^{-i2\pi}\right) = ae^{-iuT}$$

صحيح إذاً أن النواس قد عاد إلى البعد a عن وضع التوازن، كما في بدأ الحركة ولكنه لم يبق في اتجاه Ox بل انحرف عنه بزاوية قدرها حسب (4.24) (وتسميتنا لـ $u = \omega\cos\theta$)

$$uT = u\frac{2\pi}{\left(u+\frac{g}{\ell}\right)^{1/2}} \cong \omega\cos\theta\, 2\pi\left(\frac{\ell}{g}\right)^{1/2} \qquad (4.24)'$$

حيث أهملنا الحد u^2 المتناسب مع ω^2 أمام $\frac{g}{\ell}$ ووضعنا T على الشكل

$$T = 2\pi\sqrt{\ell/g} \qquad (4.25)$$

الذي هو دور النواس البسيط الذي لا يأخذ بعين الاعتبار حركة الأرض الدورانية الذاتية – حركة الأرض حول محورها.

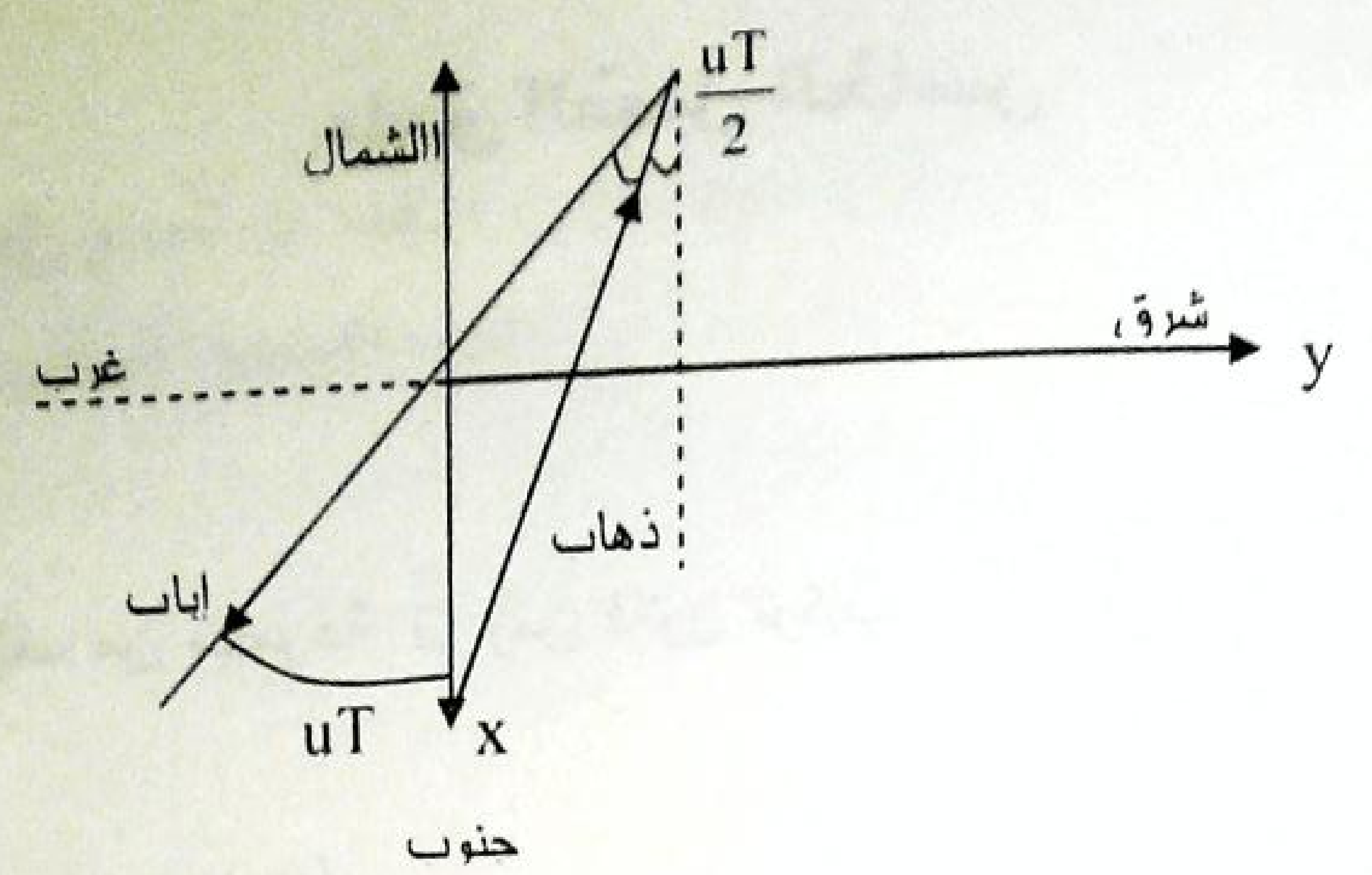
يقع الانحراف نحو الغرب لأن $\zeta = a(\cos uT - i\sin uT)$ ومسقط الانحراف على Oy سالب.

والخلاصة :

يبدأ النواس في الحركة على خط الطول من الجنوب نحو الشمال وينحرف نحو اليمين* زاوية قدرها $\frac{uT}{2}$، الشكل.22؛ ثم في نصف الدور الثاني يتحرك من الشمال نحو الجنوب فينحرف نحو اليمين، أي نحو الغرب، بزاوية أخرى قدرها $\frac{uT}{2}$ بحيث يكون الانحراف الكلي هو الزاوية uT نحو الغرب.

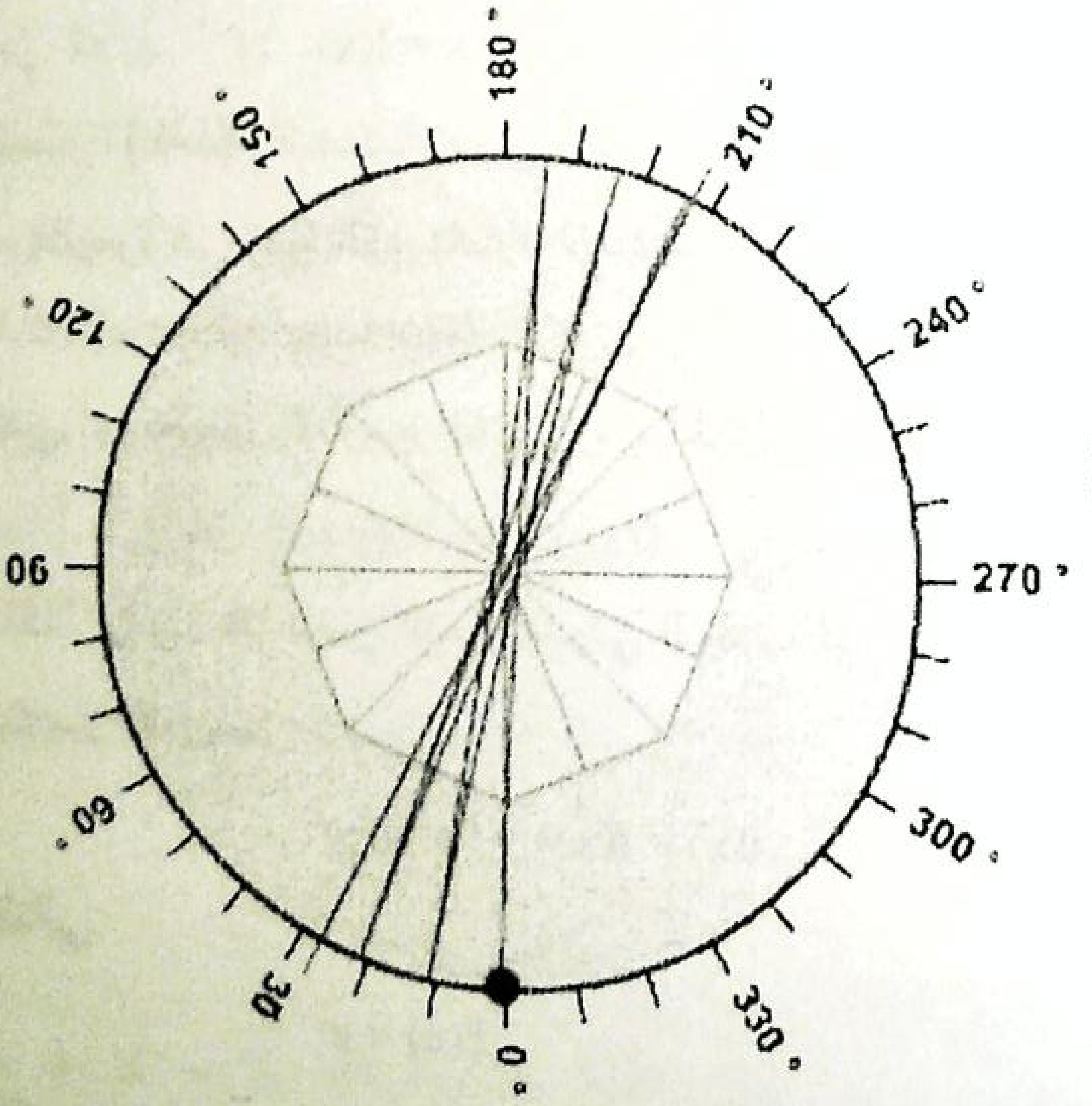
---

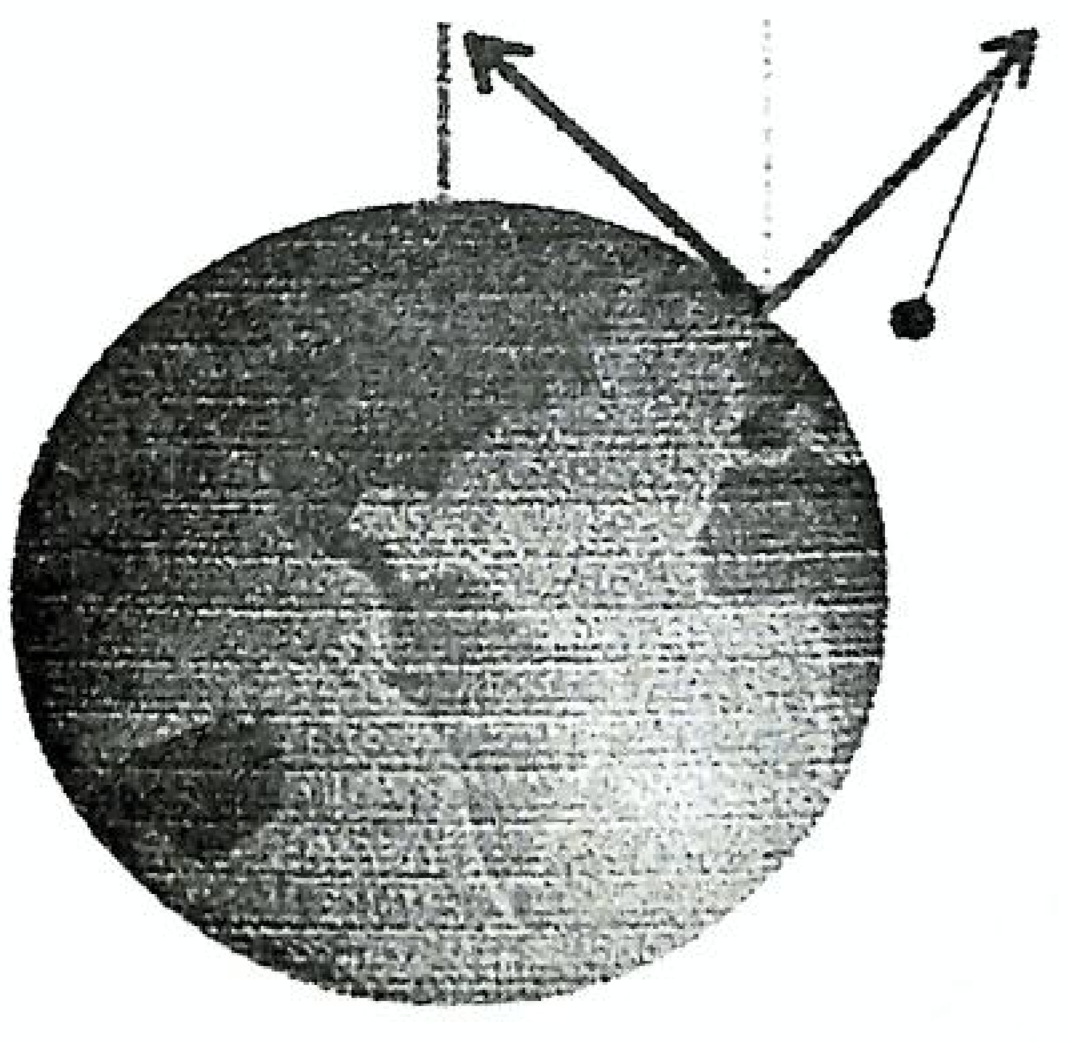
* أي نحو الشرق لأن ζ في نصف الدور تساوي $\zeta = -a(\cos\frac{ut}{2} - i\sin\frac{ut}{2})$ و y موجبة.



الشكل.22

يُظهر الشكلان أدناه صورتي رسمين متحركين أخذا من الشبكة الإلكترونية يمثلان حركة نواس معلق في الاتجاه الشاقولي لنقطة ما من سطح الكرة الأرضية، خط عرضها °45؛ وينوس من الجنوب نحو الشمال في اتجاه خط الطول. لا يبقى مستوى النوسات الذي يكونه النواس ومماس خط الطول ثابتاً – في الاتجاه °0-°180 – على المستوى الأفقي وإنما ينحرف نحو اليمين ذهاباً وإياباً بحيث يملأ مستوى الدوران الدائرة كلها في مدة 33 ساعة و 51 دقيقة.





ملحق الفصل الخامس

نظرية الزمر

الزمرة هي الزوج المؤلف من مجموعة G ومن قانون تركيب $(x, y) \rightarrow xy$ على عناصر G يحقق الشروط التالية

a) إنه تجميعي $(xy)z = x(yz)$ أياً كانت العناصر $x, y, z \in G$

b) يوجد عنصر حيادي نرمز له بـ e يحقق $xe = ex = x$ أياً كان العنصر $x \in G$

c) يوجد مقلوب لكل عنصر في G : يقابل كل عنصر x عنصر آخر نرمز بـ x^{-1} يحقق العلاقة $xx^{-1} = x^{-1}x = e$.

مثال : لتكن X مجموعة ما، نسمي تبديلاً أي تطبيق تقابلي (bijectif) على X (لا يقابل أي عنصر من X في التبديل إلا عنصراً واحداً فقط). نرمز لمجموعة التبديلات بـ $\zeta(X)$، وليكن f و g عنصرين من $\zeta(X)$. إن $f \circ g$، حيث $\circ$ ترمز إلى التطبيق المركب $f(g(x))$، هو عنصر من $\zeta(X)$. التطبيق المركب تجميعي والتطبيق الحيادي هو $I(x) = x$؛ ولكل تطبيق تطبيق عكسي، لأننا فرضنا أنه تقابلي، نرمز له بـ f^{-1} : $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x = I(x)$. نسمي الزمرة $\zeta(X)$ زمرة التحولات الهندسية لعناصر (نقاط) X. كما تسمى أيضاً بالزمرة المتناظرة. وإذا كانت عناصر X معدودة، عدد عناصرها n، فالزمرة هي زمرة التبديلات لـ n عدداً.

التشاكل (Homomorphisme)

نسمي أي تطبيق f لزمرة G في زمرة أخرى G' يحقق العلاقة

$$f(xy) = f(x)\,f(y)$$

تشاكلاً (رمزنا هنا بنفس الرمز لقانوني التركيب في G و G')

لدينا من التعريف

$$f(x) = f(xe) = f(x)\,f(e)$$

وبالتالي

$$f(e) = e'$$

كذلك

$$f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$$

ذلك أن

$$f(e) = f(xx^{-1}) = f(x^{-1}x) = e'$$

من جهة ولأن

$$f(xx^{-1}) = f(x)\,f(x^{-1}) = f(x^{-1})\,f(x)$$

أي أن $f(x^{-1})$ هي مقلوب $f(x)$.

مثال : نرمز بـ R_+ إلى زمرة الأعداد الحقيقية، حيث قانون التركيب هو الجمع والعنصر الحيادي 0، وبـ $R\backslash 0$ إلى زمرة الأعداد الحقيقية حيث قانون التركيب هو الضرب والعنصر الحيادي 1. نعرف التشاكل بين R_+ و $R\backslash 0$ بالعلاقة

$$f(x+y) = f(x)\,f(y)$$
$$f(0) = 1$$

ذلك أن

$$f(0) = f(x + (-x)) = f(x)\,f(-x) = f(x)\,f^{-1}(x) = 1$$

فإذا فرضنا أن f دالة متصلة ولها مشتق (من الصف C^1) وأخذنا مشتق العلاقة الأولى بالنسبة للمتغير y وجعلنا $y = 0$ فإننا نحصل على الدالة الأسية : $f'(x) = f(x)f'(0)$ ومنه

$$f(x) = e^{ax} \quad \text{حيث} \quad f'(0) = a$$

التمثيل الخطي (Représentation)

نسمي التشاكل φ بين زمرة ما G والزمرة $\zeta(X)$ تمثيلاً لـ G. ونقول إنه إنجاز (réalisation) لـ G إذا كان التشاكل متبايناً (injectif)؛ إنه تشاكل تقابلي – يسميه البعض تماكلاً – (isomorphisme) بين G وصورة G في $\zeta(X)$: $\varphi(G) \leftrightarrow G$.

لنفرض الآن أن لـ X بنية فضاء متجهي (خطي) (vectoriel/linear)، في هذه الحالة $\zeta(X)$ هي مجموعة التطبيقات الخطية القلوبة لـ X في X (أي أنها زمرة المؤثرات الخطية القلوبة لـ X) ونرمز لها بـ $GL(X)$. نقول عن التشاكل بين G و $GL(X)$ إنه تمثيل خطي لـ G في الفضاء المتجهي X.

$GL(X)$ هي مجموعة المصفوفات المربعة $(s \times s)$ حيث s عدد أبعاد الفضاء المتجهي X، والتي يختلف معينها عن الصفر، حتى يكون لها مقلوب : التطبيق الحيادي I هو المصفوفة القطرية $a_{ii} = 1$ و $a_{ij} = 0$ من أجل $i \neq j$.

إن X في كل الفصل الخامس هو الفضاء الإقليدي R^3 و $GL(R^3)$ مجموعة المصفوفات القلوبة (3×3).

ثنوي الفضاء المتجهي (dual) الفضاءات الإقليدية وشبه الإقليدية

يمكن كتابة أي تطبيق خطي للفضاء المتجهي X في حقل الأعداد السلمية K، $\phi : X \to K$ على الشكل

$$\phi(x) = \phi(x^j e_j) = x^j \phi(e_j) \qquad (1)$$

حيث x^j هي مركبات المتجهة $x \in X$ في متجهات القاعدة $e_1 \dots e_s$ و s هي عدد أبعاد الفضاء X؛ ضمرنا أشارة الجمع $\sum_{j=1}^{s}$ متعارفين على أن وجود نفس الدليل j في الأعلى والأسفل يعني الجمع على كل

فضاءً متجهياً له نفس أبعاد K في X تشكل مجموعة هذه التطبيقات الخطية لـ $j \in [1, s]$ العناصر. نسميه الفضاء الثنوي لـ X أو ثنوي X ونرمز له بـ X'. نرمز لمتجهات القاعدة في X' بالرمز $\varepsilon^s \ldots \varepsilon^1$، وهي تطبيقات خطية لـ X في K، ونُعرفها بالعلاقة $\varepsilon^j(e_i) = \delta^j{}_i$ ونكتب ϕ على الشكل $\phi_i \varepsilon^i$، حيث ϕ_i هي مركبات المتجهة $\phi \in X'$ في القاعدة ε. وتصبح العلاقة (1) على الشكل

$$\phi(x) = \phi(x^j e_j) = x^j \phi(e_j) = x^j \phi_i \varepsilon^i(e_j) = x^j \phi_i \delta^i_j = x^i \phi_i = <x, \phi> \quad (2)$$

(الجمع على كل من الدليلين i و j لوجود كليهما في الأعلى والأسفل).

أي أننا كتبنا التطبيق الخطي $\phi(x)$ لـ X في K على شكل مجموع جداء مركبات x بمركبات ϕ. ونسمي التطبيق الخطي جداءً داخلياً. إن X و X' متشاكلان تقابلياً ولذا فمن الممكن تحويل أي تطبيق لـ $X \times X \to K$، كالجداء السلمي لمتجهتين (x, y) مثلاً، إلى تطبيق لـ $X \times X' \to K$، أي إلى جداء داخلي بأن نقابل إحدى المتجهتين $y \in X$ بـ $y' \in X'$ وذلك بتطبيق مؤثر خطي G عليها $Gy = y'$، $G : X \to X'$. نكتب مركبات y' في القاعدة ε على الشكل y_i بحيث يكتب الجداء

$$(x, y) = <x, Gy> = x^i y_i \quad (3)$$

يسمى المؤثر G عادة بالتانسور المتري، وهي مصفوفة مربعة $s \times s$ كل عناصرها معدومة ماعدا العناصر القطرية التي تساوي ± 1. فإذا كانت كلها مساوية للواحد فالفضاء أقليدي لأن طول أي متجهة x فيه، وهو $(x, x) = x^i x_i = \sum_{i=1}^{s} x^{i^2}$، موجب دوماً. وإذا كانت بعض العناصر، m عنصراً مثلاً، تساوي لـ (-1) فطول المتجهة $(x, x) = x^i x_i = \sum_{i=1}^{s-m} x^{i^2} - \sum_{j=s-m+1}^{s} x^{j^2}$ موجب أو سالب وقد يساوي صفراً والفضاء شبه إقليدي توقيعه m. إن فضاء نظرية النسبية الخاصة، كما سنرى في الفصل السابع، فضاء شبه إقليدي بأربعة أبعاد توقيعه 1.

يمكن التحول من متجهة x إلى متجهة x'، $x, x' \in X$، بتطبيق مؤثر ما $A \in GL(X)$:

$$x' = Ax$$

أي

$x'^j = A^j{}_i x^i$ الجمع على كل الـ i و j ثابتة أي أننا نجمع على كل عناصر الصف j (j ترمز للصف و i للعمود).

يمكن في حالة وجود تطبيق خطي $\phi \in X'$ إجراء التحول على ϕ عوضاً عن إجرائه على x للحصول على نفس النتيجة، أي أننا نريد أن يتحقق

$$\phi(x') = \phi'(x)$$

أي

$$\phi_j x'^j = A^j{}_i \phi_j x^i = \phi'_i x^i$$

أو

$\phi'_i = A^j{}_i \phi_j$ (هنا العمود i هو الثابت)

إذا أردنا أن يكون الجمع على كل عناصر الصف فيجب أخذ منقول المصفوفة ونرمز لها بـ $\tilde{A}$

$$\phi'_i = \tilde{A}_i{}^j \phi_j$$

$$\phi' = \tilde{A}\,\phi \quad (4)$$

زمر التناظر

ليكن لدينا المؤثر $D_g \in GL(X)$ ممثلاً خطياً للزمرة G : يقابل كل عنصر $g \in G$ المصفوفة $s \times s$: $D_g \in GL(X)$. لننظر كيف يتحول الجداء السلمي لمتجهتين من X نتيجة تطبيق هذا المؤثر. لدينا من (3)

$$(D_g x,\ D_g y) = \langle D_g x,\ G D_g y\rangle$$

ومن (4)

$$= \langle x,\ \tilde{D}_g G D_g y\rangle$$

فإذا أردنا أن يبقى الجداء السلمي ثابتاً، منحفظاً بالزمرة G، أي منحفظاً بالتمثيل الخطي للزمرة في X، أي مساوياً لـ (x, y)

$$(D_g x,\ D_g y) = \langle x,\ Gy\rangle$$

فيجب أن يتحقق الشرط

$$\langle x,\ \tilde{D}_g G D_g y\rangle = \langle x,\ Gy\rangle$$

أي

$$\tilde{D}_g G D_g = G \quad (5)$$

تصبح هذه العلاقة في الفضاء الإقليدي حيث التانسور المتري $G = I$ على الشكل $\tilde{D}_g D_g = I$ أي $D_g^{-1} = \tilde{D}_g$، وهو تعريف الزمرة العمودية؛ والزمرة هي زمرة الدورانات إذا اشترطنا أن يكون معينها مساوياً للواحد، وهي زمرة لورنتس في حالة الفضاء غير الإقليدي، فضاء مينكوفسكي ذي الأربعة أبعاد والتوقيع 1.

نقول عن زمرة ما إنها زمرة تناظر إذا نتج عن تمثيلها الخطي انحفاظ مقادير معينة. وهكذا فزمرة الدورانات هي زمرة تناظر في الفضاء الإقليدي الفيزيائي (ثلاثة أبعاد) وزمرة لورنتس زمرة تناظر في فضاء النسبية الخاصة شبه الإقليدي ذي الأربعة أبعاد (ثلاثة أبعاد مكانية وبعد زماني).

يمكن، على العكس أحياناً، الانطلاق من المقادير المنحفظة، غير المتغيرة، والبحث عن زمرة التناظر التي تحقق ذلك.

لنذكر أننا نسمي فضاءً تآلفياً الفضاء المكون من نقاط ومتجهات، على وجه التحديد إنه جداء مجموعة غير خالية من النقاط، P، في فضاء متجهي على K، E، أبعاده منتهية وتطبيق $E \times P \to P$ نرمز له بـ $(\vec{h}, p) \to \vec{h} + p$ يحقق الموضوعتين التاليتين

i) $\vec{0} + p = p$ ؛ $(\vec{h} + \vec{k}) + p = \vec{h} + (\vec{k} + p)$ (6)، من أجل أي متجهتين $\vec{h}, \vec{k} \in E$ وأي نقطة $p \in P$.

وضعنا السهم على عناصر E لتمييزها عن النقاط التي نرمز لها بالحروف العادية.

ii) يوجد من أجل أي نقطتين $(a, b) \in P$ متجهة وحيدة $\vec{h} \in E$ تحقق العلاقة

$$\vec{h} + a = b \quad (7)$$

تعرف هذه العلاقة الانسحابات في P وتبين أن أبعاد P تساوي أبعاد E كما أنها تسمح لنا بمطابقة P مع E بواسطة التطبيق التقابلي (7). نكتب المتجهة $\vec{h}$ على الشكل

$$\vec{h} = b - a = \overrightarrow{ab} \quad (8)$$

ونقول إن a هو مبدأ المتجهة $\vec{h}$ و b نهايتها.

نستخلص بسهولة علاقة شال $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} + \overrightarrow{ca} = (b - a) + (c - b) + (a - c) = 0$. إنها القضية 1 في الفصل الثاني.

إن الفضاء الإقليدي R^n فضاء تآلفي عندما لا نأخذ بعين الاعتبار بنيته المترية : المسافة بين النقاط وطول المتجهات.

ليكن لدينا r نقطة في P $p_1, p_2 \dots p_r$ و r عدداً $w_1, w_2 \dots w_r$ تخضع للشرط التالي $\sum_{i=1}^{r} w_i = 1$.

ولتكن p_0 نقطة لا على التعيين في P. نسمي مركز ثقل النقاط $p_1, p_2 \dots p_r$ ذات الكتل $w_1, w_2 \dots w_r$ النقطة q المعرفة بالعلاقة

$$q = \sum_i (p_i - p_0) w_i + p_0 \quad (9)$$

ونكتب اختصاراً $q = \sum_i p_i \cdot w_i$.

نرى بسهولة أن مركز الثقل q لا يتوقف على اختيار النقطة p_0، مبدأ المتجهات $\overline{p_0 p_i} = p_i - p_0$. وهذا ما رأينا في ("(1.23).2).

نقول عن تطبيق f لـ P في P يحقق العلاقة

$$f(q) = f(\sum_{i=1}^{r} p_i \cdot w_i) = \sum_{i=1}^{r} f(p_i) \cdot w_i = q' \quad (10)$$

إنه تطبيق تآلفي. إنه التطبيق الذي يقابل مركز ثقل النقاط p_i بمركز ثقل النقاط $p_i' = f(p_i)$. وكل انسحاب تطبيق تآلفي لأننا رأينا أن الانسحاب $p_i' - p_0$ لا يغير مركز الثقل.

يبرهن، عندما نختار مبدأ في الفضاء التآلفي، أن كل تطبيق تآلفي هو تطبيق خطي $A : E \to E$، متبوع بانسحاب $\bar{a}$. نرمز لهذا التطبيق بـ $(A, \bar{a})$ أي أن

$$(A, \bar{a})\vec{h} = A\vec{h} + \bar{a} \quad (11)$$

تشكل هذه التطبيقات زمرة نسميها الزمرة التآلفية، قانون الضرب فيها هو

$$(A', \bar{a}') \circ (A, \bar{a}) = (A'A, A'\bar{a} + \bar{a}') \quad (12)$$

ومقلوب العنصر $(A, \bar{a})$ هو

$$(A^{-1}, -A^{-1}\bar{a}) \quad (13)$$

ذلك أن

$$(A^{-1}, -A^{-1}\bar{a})(A, \bar{a}) = (A^{-1}A, A^{-1}\bar{a} - A^{-1}\bar{a}) = (I, \bar{0})$$

نقول عن شكلين X و X'، عن مجموعتين جزئيتين من نقط P، إنهما متناظران إذا وجد عنصر من الزمرة التآلفية يحول نقاط X إلى نقاط X'. ونُعرف الهندسة التآلفية بأنها دراسة التناظر (التكافؤ) بفعل عناصر الزمرة التآلفية على المجموعات الجزئية في P.

يمكن على سبيل المثال، القول إن كل المثلثات متكافئة لأنه من الممكن إيجاد تطبيق تآلفي يحول نقاط المثلث الأول إلى نقاط المثلث الثاني. وهكذا فكل المثلثات متكافئة مع المثلث متساوي الأضلاع؛ مركز ثقل هذا المثلث هو نقطة تلاقي منصفاته وبما أن التطبيق التآلفي يحفظ مركز الثقل فإن منصفات المثلث، أياً كان تتلاقى في نقطة واحدة.

إن ما عرضناه هنا لا يعدو كونه تطبيقاً لما قاله فيلكس كلاين Felix Klein في خطابه الشهير، الذي أصبح يعرف ببرنامج إرلانكن (ERLANGEN)، عام 1872 : "لنتجرد الآن عن الشكل المحسوس لأنه غير ذي أهمية من وجهة النظر الرياضية لكي لا نرى الفضاء إلا كعدد ما من الكائنات متعددة الأبعاد... ليكن لدينا هذا العدد من الكائنات (لنقل مجموعة من النقاط في فضاء أبعاده s كما في مثلنا) وزمرة تحولات له (الممثلة بمصفوفة هنا)؛ لندرس نظرية المنحفظات بالنسبة لهذه الزمرة".

زمرة لي Lie

نقول عن زمرة G إنها زمرة طوبولوجية عندما يكون التطبيقان $(g, h) \to gh$ لـ $G \times G$ في G و $g \to g^{-1}$ لـ G في G تطبيقين متصلين. رأينا أن عناصر الزمرة $GL(n, r)$ مثلاً تكتب على شكل مصفوفة بعدد ما من الوسطاء، بمتجهة a مثلاً تنتمي إلى R^m $(m \le n^2)$. لتكن a المتجهة التي تعين عنصر الزمرة g و b المتجهة التي تعين عنصر الزمرة h. يجب إذاً أن يكون التطبيق الذي يعرف gh متصلاً $a, b \xrightarrow{\phi} \phi(a, b)$، نرمز لهذا التطبيق بـ (ab) وكذلك التطبيق f الذي يعرف a^{-1} $a \xrightarrow{f} f(a)$ ونرمز له بـ (a^{-1}). نقول عن الزمرة إنها زمرة لي إذا كانت الدالتان ϕ و f من الصنف C^{∞} : قابلتين للتفاضل إلى اللانهاية.

رأينا أن عنصراً ما من زمرة الدوران في الفضاء الإقليدي العادي $GL(R^3)$، على سبيل المثال، يعين بثلاثة وسطاء فقط هي زوايا أولر التي تشكل بواسطتها متجهة في R^3 هي مساقط $\vec{\omega}$ على المحاور الثلاثة : $m = 3$ بينما تتعين المصفوفة بـ $m^2 = 9$.

الإحداثيات القانونية

يمكن كتابة أي عنصر A من زمرة لي في جوار العنصر الواحدي $e = I$ على شكل دالة أسية وذلك بجعل A تابعاً للوسيط t وكتابته على الشكل

$$A(t) = I + tX + \frac{t^2}{2!} + ... = e^{tX} \quad (14)$$

لدينا طبعاً

$$\left.\frac{dA(t)}{dt}\right|_{t=0} = X \quad (15)$$

نسمي المصفوفة X اللوغاريتم النيبري لـ A : $X = L_n A$، عناصرها هي $\left.\frac{da^i_j}{dt}\right|_{t=0}$ حيث a^i_j عناصر المصفوفة A. يمكن التعبير عن خواص A بعلاقات يحققها X فعندما يكون معين A مساوياً للواحد فإن هذا المعين ونرمز له بـ det من أجل $t = 0$

$$\frac{d}{dt}(\det A)\Big|_{t=0} = TrX = 0$$

حيث TrX تعني أثر المصفوفة : مجموع عناصرها القطرية. ذلك أن $\det A$ الثابت يساوي في جوار I

$$\det A(t) = \det(I + tX) = \det I + tTrX + 0(t^2)$$

ونقصد بـ $0(t^2)$ المقادير اللامتناهية في الصغر بـ t^2.

أما خاصة العمودية $\tilde{A} = A^{-1}$ فتعني أن $A^{-1} = e^{-tX}$ تساوي في جوار I

$$A^{-1} = I - tX = I + t\tilde{X} \qquad \text{لأن } \tilde{A} = e^{t\tilde{X}} \text{ حسب العلاقة (14)}$$

و

$$\tilde{X} = -X \quad (16)$$

وتصبح خاصة العمودية في الفضاء غير الإقليدي $\tilde{A}GA = G$ في جوار I على الشكل

$$(I + t\tilde{X})G(I + tX) = G$$

أو بإهمال ما هو من الدرجة الثانية بـ t^2

$$\tilde{X}G = -GX \quad (16)'$$

نلاحظ أن التطبيق الأسي $X \rightarrow e^{tX} = A$ ليس تقابلياً بالضرورة من أجل كل عناصر الزمرة. نقول عن زمرة لي G إنها أسية إذا أمكن كتابة كل عناصر الزمرة على الشكل الأسي (14).

الزمرة الجزئية بوسيط واحد

نقول عن عناصر من زمرة ما G إنها تشكل زمرة جزئية بوسيط واحد t ينتمي إلى المجال $]-\alpha, +\alpha[$ إذا وجد تشاكل بين الزمرة الجمعية لـ R وعناصر G أي

$$\left.\begin{aligned} g(t_1+t_2) &= g(t_1)g(t_2) \\ g(0) &= e = (I) \\ g(-t) &= g^{-1}(t) \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

من أجل $t \in\ ]-\alpha, \alpha[$ حيث α عدد حقيقي صغير بما فيه الكفاية.

رأينا أن الدورانات في مستو حول محور ما تحقق هذه الخاصة وأنها تبادلية

$$g(t_1)g(t_2) = g(t_1+t_2) = g(t_2+t_1) = g(t_2)g(t_1)$$

يمكن كتابة عناصر الزمرة الجزئية بوسيط واحد على شكل أسي. ذلك أن اشتقاق العلاقة التالية بالنسبة لـ t_1

$$g(T) = g(t+t_1) = g(t)g(t_1)$$

يعطينا

$$\frac{dg(T)}{dT}\frac{dT}{dt_1} = g(t)\frac{dg(t_1)}{dt_1}$$

وبجعل $t_1 = 0$ نحصل على

$$\frac{dg(t)}{dt} = g(t)g'(0)$$

حيث استعملنا الخاصة الأولى في (17) وتعريف المشتق.

$$\frac{dg(t)}{g(t)} = g'(0)dt$$

ومنه

$$g(t) = e^{tg'(0)} = e^{tX} \quad (18)$$

حيث سمينا X المصفوفة $g'(0)$.

عندما تتحدد الزمرة بـ m وسيط مستقل، m عدد عناصر المصفوفة المستقلة عن بعضها، فإن لدينا m زمرة جزئية بوسيط واحد بحيث يمكن كتابة العنصر $g \in G$ على الشكل

$$g = e^{t_1X^1+t_2X^2+\ldots t_nX^m} = g(t_1 \ldots t_m) \quad (18)'$$

نسمي المصفوفات X^1، ... X^m المستقلة عن بعضها مولدات الزمرة.

مثال : إن أبسط مثال يمكن إعطاؤه لتعيين مولد لزمرة جزئية هو زمرة الانسحابات T على الدالات بمتغير واحد r. نعرف الانسحاب على الدالة $f(r)$ بإضافة مقدار ثابت a للمتغير r

$$g_a f(r) = f(r+a) \quad (19)$$

واضح أن هذا التعريف يحقق صفات الزمرة الجزئية بوسيط واحد (17) :

$$g_{a_1+a_2} f(r) = f(r + a_1 + a_2) = g_{a_2} f(r + a_1) = g_{a_2} g_{a_1} f(r)$$

$$g_o f(r) = 1 \cdot f(r)$$

$$g_a \cdot g_{-a} = 1 f(r) \qquad ; \qquad g_{-a} = g_a^{-1}$$

إن مولد هذه الزمرة الجزئية بالوسيط a هو تعريفاً، من أجل a صغيرة، حسب (19).

$$(1 + aX) f(r) = f(r) + a \frac{\partial f}{\partial r}$$

ومنه

$$X = \frac{\partial}{\partial r} \quad (20)$$

ونكتب عناصر زمرة الانسحابات T بوسيط واحد على الشكل

$$g = e^{a\frac{\partial}{\partial r}} \quad (21)$$

هذا عندما يكون الانسحاب ببعد واحد – على فضاء منطبق على حقل الأعداد السلمية، أما عندما يكون على فضاء R^n مثلاً $r = (r^1 \ldots r^n)$ ؛ $a = (a^1 \ldots a^n)$ ؛ فإن $f(r+a) = f(r^1 + a^1, \ldots, r^n + a^n)$ الانسحاب g محدد عندئذ حسب '(18) و (20) على الشكل

$$g = e^{a^1 \frac{\partial}{\partial r^1} + a^2 \frac{\partial}{\partial r^2} + \ldots a^n \frac{\partial}{\partial r^n}} \quad (21)'$$

سنحدد في الفصل السابع مولدات زمرة الدورانات الثلاثة ومولدات دورانات لورانتس الستة.

الفصل السادس

مبدأ الفعل الأصغر وهيكلة لاغرانج

1. مبادئ الميكانيك النيوتوني 251
2. قوانين الانحفاظ 265
3. المعادلات القانونية 275
4. حالة عدد غير منته من درجات الحرية 292

الفصل السادس: مبدأ الفعل الأصغر وهيكلة لاغرانج

تمهيد

يمكن النظر إلى هذا الفصل كأهم فصول هذا الكتاب لأسباب عدة، فهو يعيد بناء الميكانيك النيوتوني على أسس جديدة منطلقاً من مبدأ الفعل الأصغر، وهو مبدأ لا يعني الميكانيك التقليدي وحده وإنما كل فروع الفيزياء بدون استثناء، من النسبية الخاصة التي سندرسها في الفصل القادم إلى النسبية العامة، ومن الكهرطيسية والميكانيك الكمومي إلى الحقول المكممة. هذا من جهة، ومن جهة أخرى، فإن الانطلاق من هذا المبدأ يستدعي اللجوء إلى فرع من الرياضيات، هو حساب التغيرات، لم يعطه التدريس الجامعي ما يستحقه من اهتمام. وسندرس في هذا الفصل الديناميك من وجهة نظر هيكلة جديدة عامة وشاملة، تتضمن بطبيعة الحال مبدأ نيوتن الثاني، تتيح دراسة تفاعل مجموعات كبيرة من الجسيمات وتعد العدة إلى هيكلة أخرى، إلى الانتقال من الميكانيك التقليدي إلى ميكانيك أدق منه، يشمله كنظرية تقريبية، هو الميكانيك الكمومي.

1. مبادئ الميكانيك النيوتوني

1.1– مبدأ الفعل الأصغر :

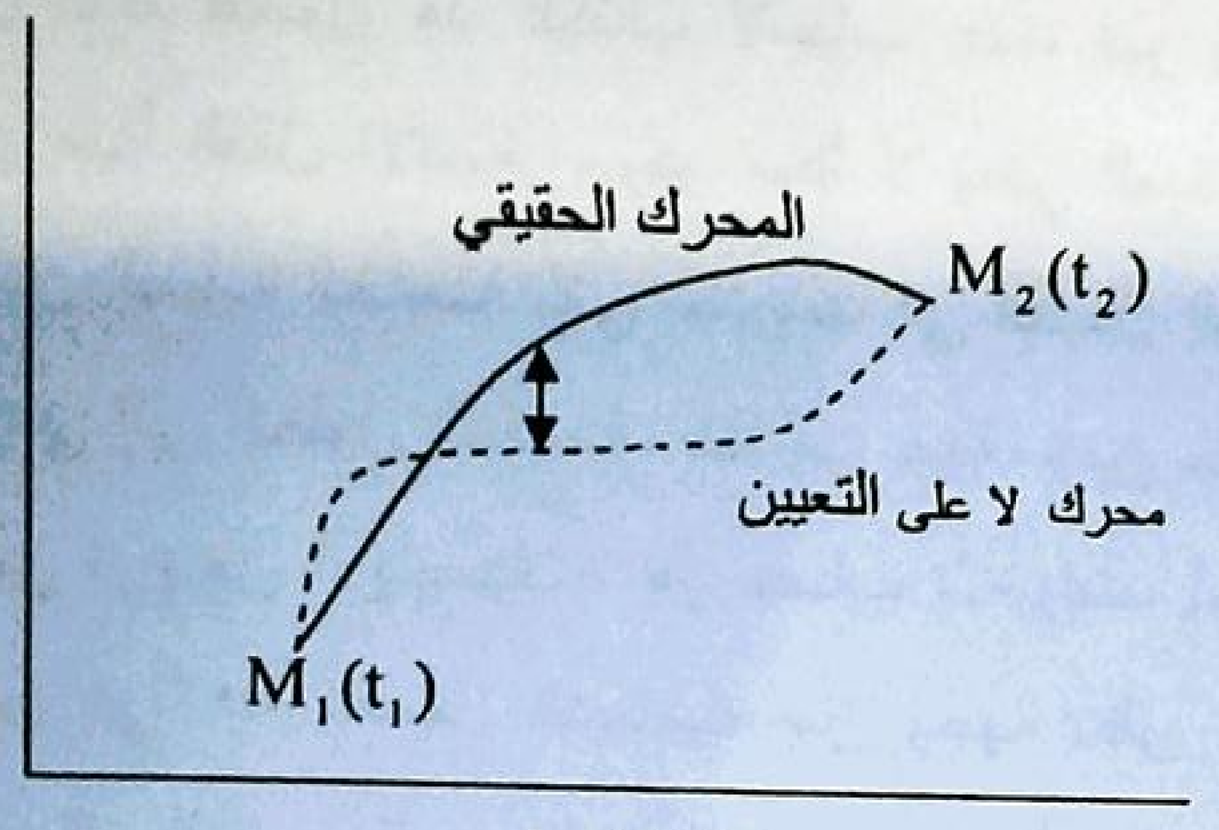
تعريف 1 :

لننظر إلى حركة جسيم بين لحظتين t_1 و t_2 يقع فيهما الجسيم على محركه في النقطتين $M_1(\vec{r}_1)$ و $M_2(\vec{r}_2)$. ولتكن T طاقة الجسيم الحركية و U طاقة تفاعله الكامنة المعلومتين في كل نقطة من نقاط المحرك. نسمي فعلاً ونرمز له بـ S المقدار التالي

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - U)dt \tag{1.1}$$

إن أبعاد الفعل هي أبعاد الطاقة مضروبة بالزمن $[S] = [M][L^2][T^{-1}]$.

م1.- نضع كمبدأ للميكانيك (والفيزياء) أن الفعل أصغري من أجل المحارك الحقيقية. ونعني بذلك أنه يمكن وصل النقطة $M_1(\bar{r}_1)$ بالنقطة $M_2(\bar{r}_2)$ بمنحنيات، بمسارات عديدة – لا نهاية لها في الواقع – وأخذ التكامل (1.1) على هذه المسارات ومقارنة نتائج الحساب لنجد أن أصغر قيم التكاملات هي قيمة وحيدة تتحقق عندما يكون التكامل على الجزء من محرك الجسيم الفعلي الواصل بين النقطتين، الشكل.1؛ عندما يكون التكامل على الجزء من القطع المكافئ الذي ترسمه القذيفة على سبيل المثال.



الشكل.1

<u>تعريف 2</u> :

نسمي الدالة تحت إشارة التكامل ونرمز لها بـ L

$$L = T - U \tag{1.2}$$

دالة لاغرانج، أو لاغرانجي الجسيم وهي دالة بأربع متغيرات هي $\bar{r} = (x, y, z)$ و t.

وبصورة عامة تتكون النظمات الميكانيكية من عدد من الجسيمات المتفاعلة، وتتحدد النظمة المؤلفة من N جسيماً بإعطاء 3N متجهة $\bar{r}_1$، ... $\bar{r}_n$ أي بإعطاء 3N متغيراً هي إحداثياتها الديكارتية مثلاً. قد يحدث أن ترتبط هذه المتغيرات بعدد من العلاقات، سميناها الصلات أو القيود، تخفض من عدد المتغيرات المستقلة، من الشكل

$$f_i(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots \bar{r}_n, t) = 0 \qquad i = 1, \dots, m \tag{1.3}$$

ويصبح عدد المتغيرات المستقلة $3N - m = n$. نطلق على هذا العدد اسم عدد درجات الحرية. إن المسافات الثابتة بين نقاط جسم صلب هي علاقات من الشكل (1.3) :

$$(\bar{r}_i - \bar{r}_j)^2 - C_{ij}^2 = 0$$

وقد رأينا أن عدد درجات حرية الجسم الصلب ستة فقط.

تسمى الصلات من النوع (1.3) صلات كلية holonomes (من اليونانية Holos، واللاتينية whole) لتمييزها عن صلات أخرى لا تتيح تخفيض عدد درجات الحرية، فسطوح الوعاء الذي يحتوي على الغاز لا تشكل صلة كلية، وكذلك الأمر بالنسبة لحركة جزيء على سطح كرة التي تعبر عنها العلاقة

$$r^2 - a^2 \geq 0 \qquad (1.4)$$

حيث a نصف قطر الكرة التي تقع الحركة عليها أو بالقرب منها. إنها صلة لا كلية non holonome.

تعريف 3 :

نسمي درجات الحرية الإحداثيات العامة، ونرمز لها بـ $q^i(t)$، $i = 1, 2 \dots n$ كما نسمي مشتقات الإحداثيات العامة بالنسبة للزمن السرع العامة $\frac{dq^i}{dt}$.

تتعين حالة النظمة الميكانيكية بإعطاء متجهة في فضاء مجرد ذي n بعداً نطلق عليه اسم فضاء الهيئة Configuration، إحداثياتها هي $q^1(t)$، $q^2(t)$، ... $q^n(t)$. ترسم نهاية المتجهة بتغير الزمن منحنياً في فضاء الهيئة نسميه منحني حركة النظمة. وذلك على غرار تعيين حالة جزيء متحرك في الفضاء الإقليدي بإعطاء متجهة $\vec{r}$ فيه ترسم نهايتها المحرك الفعلي للجزيء.

تبين التجربة أن معرفة الإحداثيات العامة $q^i(t)$ – التي لا تنطبق بالضرورة على الإحداثيات الديكارتية فقد تكون ديكارتية من أجل بعض نقاط النظمة وقطبية أو كروية بالنسبة لبعض النقاط الأخرى وقد تكون وسطاء مختلفة كزاويا أولر على سبيل المثال – والسرع العامة في لحظة ما كافية للتنبؤ بمستقبل النظمة، بتطورها وهكذا فإن الشكل العام لدالة لاغرانج هو

$$L(q^1, \dots q^n; q^{1'}, \dots q^{n'}, t) \qquad (1.2)'$$

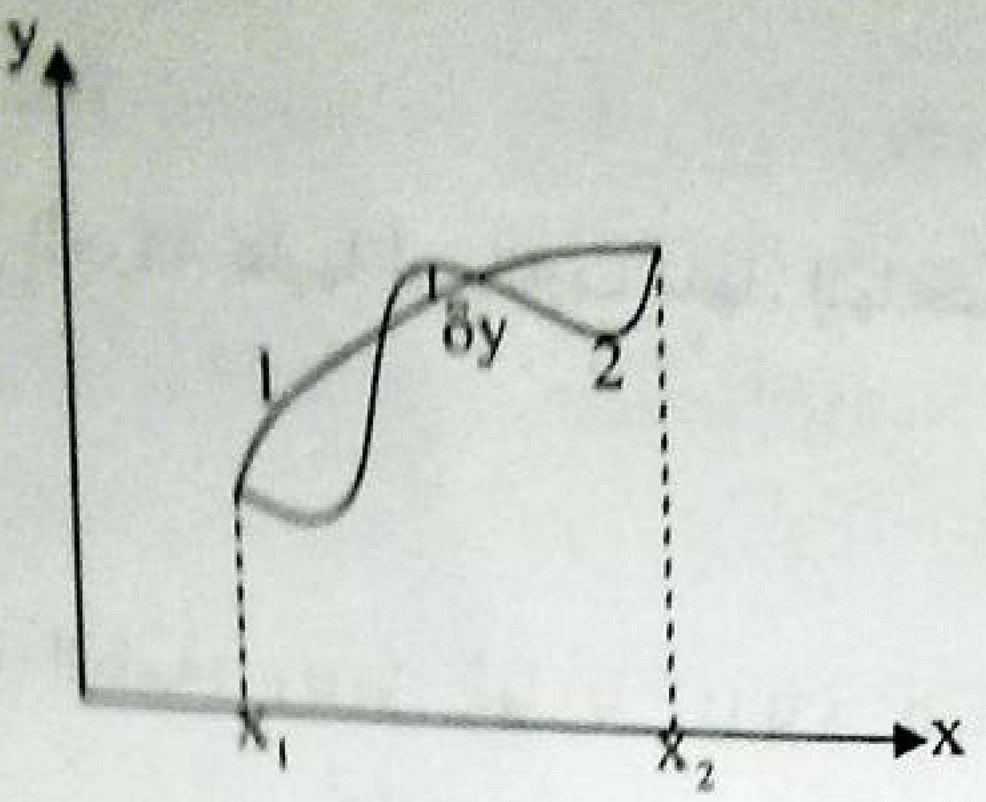
ويأخذ الفعل الشكل التالي

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q^1, \dots q^n; q^{1'}, \dots q^{n'}, t)\, dt \qquad (1.1)'$$

3.1– حساب التغيرات :

لنبدأ بطرح المسألة في بعد واحد. نريد إيجاد المنحني $y(x)$ بين نقطتين x_1 و x_2 بحيث تكون مكاملة دالة ما $f(y, y', x)$، حيث $y' = \frac{dy}{dx}$، نهاية عظمى أو صغرى. ليكن J التكامل

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x)\, dx \qquad (1.5)$$



الشكل.2

ولنضع المسألة على شكل يتيح لنا العودة إلى حساب التفاضل وتعيين النهايات بانعدام المشتق، ولنعين المنحنيات الممكنة إلى جانب المنحني المحقق للمطلوب بإعطاء وسيط α؛ وليكن $\alpha = 0$ من أجل المنحني المطلوب. تصبح y عندئذ تابعة للمتغير x وللوسيط α ونكتب من أجل المنحنيين 1 و 2 مثلاً، الشكل.2

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \Delta y = y(x, 0) + \alpha\eta(x) \qquad (1.6)$$

حيث $\eta(x)$ دالة تنعدم من أجل $x = x_1$ و $x = x_2$ ونكتب التكامل (1.5) كتابع لـ α أيضاً :

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x)\, dx$$ [1]

ونفتش عن نهاية لـ J من أجل $\alpha = 0$، وذلك باشتقاق الدالة f بالنسبة لـ α

$$\left(\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = 0 = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right) dx \qquad (1.7)$$

بفرض أن f لا تتوقف مباشرة على x؛ لنلاحظ من (1.6) أن ؛

$\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} = \eta'(x)$ ونشتق بالتجزئة الحد الثاني تحت إشارة التكامل، المقدار $\int \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \alpha}dx$: $u = \frac{\partial f}{\partial y'}$، $v = \frac{\partial y}{\partial \alpha}$، $dv = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \alpha}dx$ فنحصل على

$$\int_{x_1}^{x_2} u\,dv = \left[\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right]_{x_1}^{x_2} - \int \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y'}dx \qquad (1.7)'$$

إن المقدار المكامل يساوي الصفر لأن $\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x)$ تساوي الصفر من أجل x_1 و x_2 والنتيجة هي

$$0 = \left(\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \eta(x)\, dx \qquad (1.7)''$$

نحصل إذاً على قيمة مطرافه extremal لـ J إذا تحققت المعادلة

---

[1] إن كتابتنا لـ J كدالة بـ α لا يعفينا من الإلحاح على أنها دالة منحنيات، أو دالة دالات ولهذا فإن حساب التغيرات جزء من الرياضيات التي تعنى بالتحليل الدالي Functional Analysis و نسمي J دالّية.

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \qquad (1.8)$$[2]

المسماة معادلة أولر.

مثال 1 :

لنأخذ في المستوي المسافة بين نقطتين متجاورتين على الشكل $dS = (dx^2 + dy^2)^{1/2}$ ولنفتش عن المنحني الذي يعين المسافة الأقصر :

$$J = \int\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{1/2} dx$$

$$= \int\left(1 + y'^2\right)^{1/2} dx$$

وتصبح معادلة أولر على الشكل $y''(1+y'^2)^{-1/2} - y'(1+y'^2)^{-3/2} y'y'' = 0$

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = 0$$

ومنه

$$y'' = 0$$

$$y' = a$$

$$y = a\,x + b$$

والمستقيم هو إذاً أقصر مسافة بين نقطتين من نقاط المستوي.

مثال 2 :

المطلوب إيجاد المنحني في المستوي الذي يجتازه جسيم خاضع لثقله فقط في أقصر زمن ممكن؛ يعرف هذا المنحني باسم البراكيستوكرون Brachistochrone . هذه المسألة هي أول مسألة طرحت تاريخياً في حساب التغيرات. إن الزمن الابتدائي dt هو $\frac{dS}{v}$، حيث السرعة معرفة بـ $\frac{1}{2}v^2 = gy$ ، والزمن الكلي للانتقال من $M_1(O, O)$ إلى $M_2(x_2, y_2)$ هو

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_2} \left(\frac{1+y'^2}{y}\right)^{1/2} dx$$

وتأخذ معادلة أولر الشكل التالي

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = -\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\left(1+y'^2\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{d}{dx}\left[y^{-\frac{1}{2}}y'\left(1+y'^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right] = 0 \qquad (1.8)'$$

---

[2] إن انعدام القوس تحت إشارة التكامل ليس بديهياً. يمكن البرهان أنه إذا كان المقدار $\int_{x_1}^{x_2} F(x)\,\eta(x)\,dx = 0$ فإن $F(x) = 0$ شريطة أن تكون الدالة $F(x)$ متصلة على المجال $[x_1, x_2]$ وأن تكون الدالة الاعتباطية $\eta(x)$ قابلة للاشتقاق المستمر مرتين على نفس المجال.

نكتب المشتق بالنسبة لـ x على الشكل :

$$\frac{d}{dx}f_{y'} = f_{xy'} + f_{yy'}y' + f_{y'y'}y'' \qquad (1.8)''$$

حيث الأدلة تشير إلى المشتق الثاني بالنسبة للمتغيرات x و y'؛ y و y'؛ y' و y'. الحد الأول في الطرف الثاني يساوي الصفر لأن f_y لا تتبع صراحة لـ x، ويبقى

$$\frac{d}{dx}f_{y'} = -\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}y'^2\left(1+y'^2\right)^{-\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}}y''\left(1+y'^2\right)^{-\frac{1}{2}} - y^{-\frac{1}{2}}y'^2y''\left(1+y'^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

وأخيراً بعد وضع هذا المقدار في الحد الأخير من '(1.8) والقيام بترتيبات جبرية بسيطة تأخذ معادلة أولر الشكل النهائي

$$-y^{-1/2}\left(1+y'^2\right)^{-1/2}\left[\frac{y^{-1}}{2} + \frac{y''}{\left(1+y'^2\right)}\right] = 0$$

أو

$$\frac{2y''}{1+y'^2} = -\frac{1}{y}$$

تحل هذه المعادلة التفاضلية بضرب طرفيها بـ y' للحصول بالمكاملة على العلاقة

$$\mathrm{Ln}\left(1+y'^2\right) = -\mathrm{Ln}y + \mathrm{Ln}C$$ حيث C ثابتة

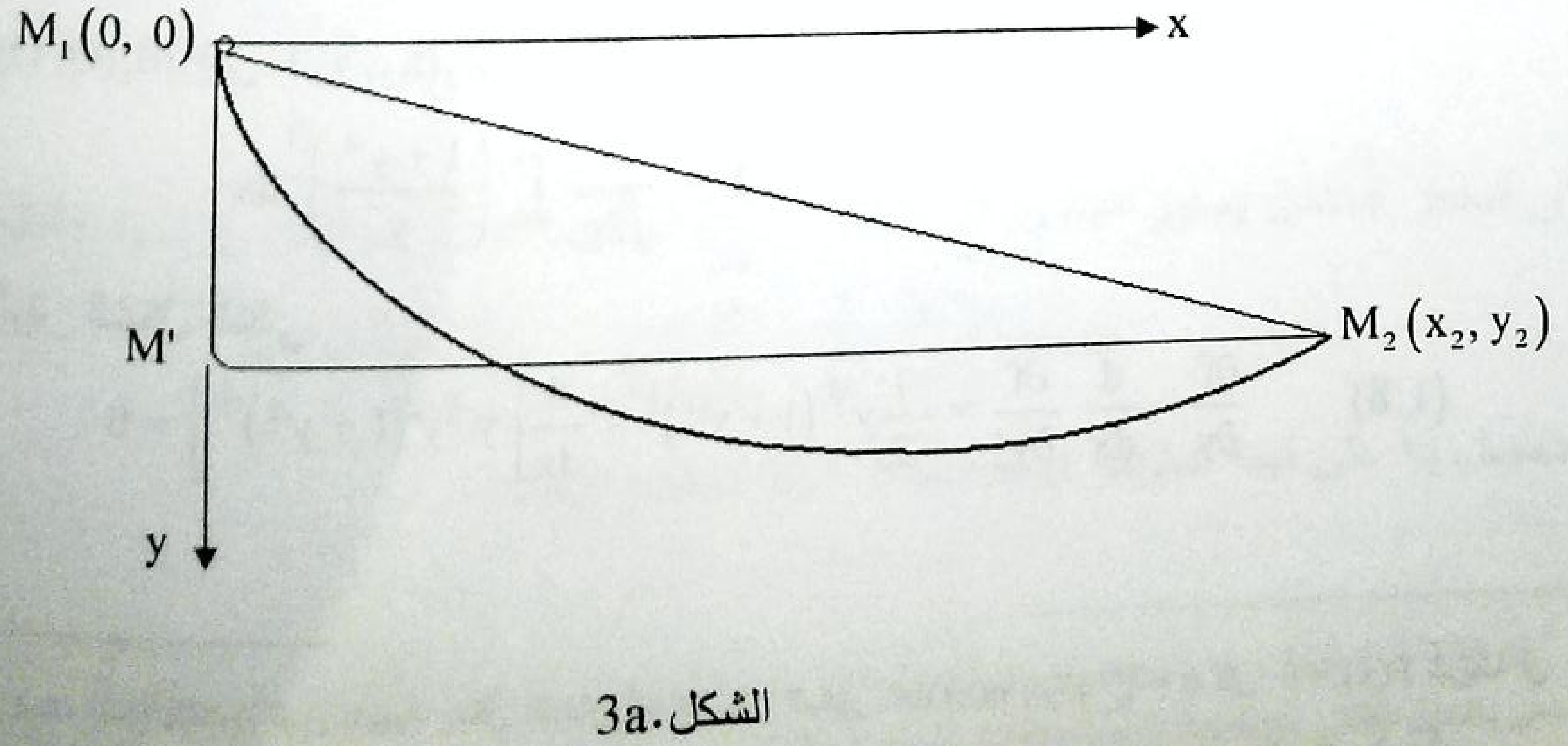
و

$$y'^2 = \frac{C}{y} - 1$$

أي

$$\sqrt{\frac{y}{C-y}}\,dy = \pm\, dx$$

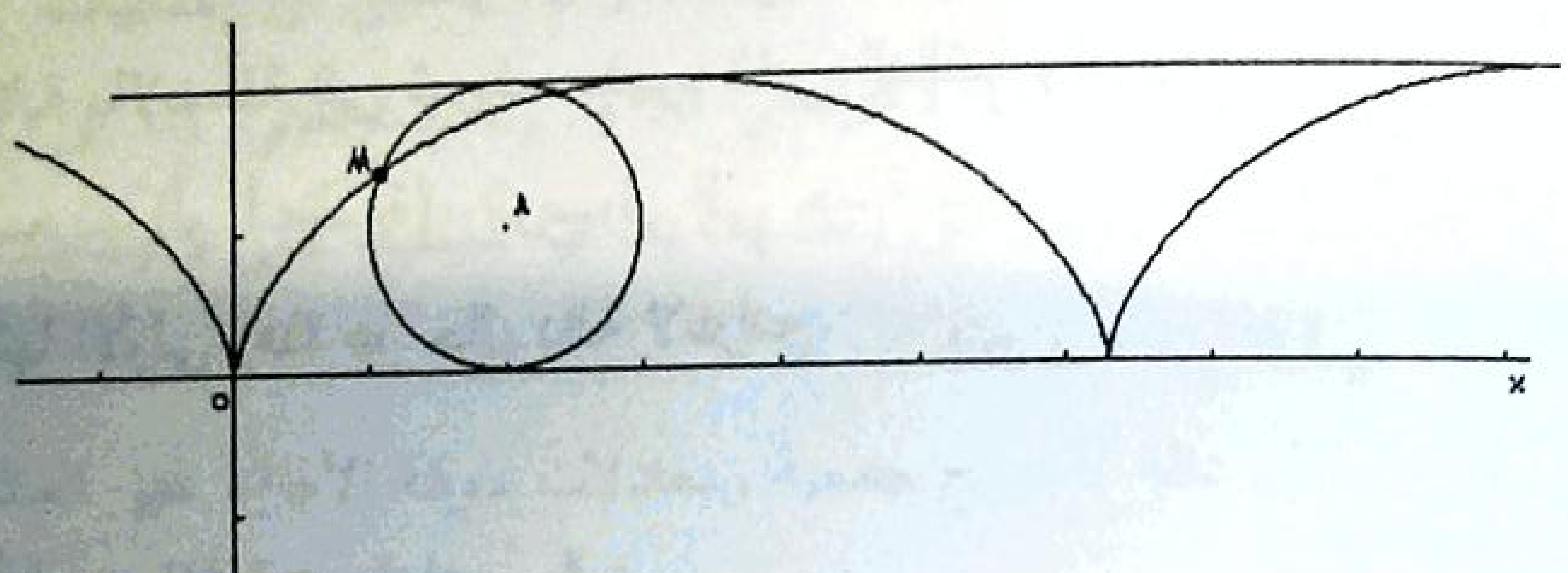
نضع $y = C\sin^2\frac{u}{2}$ ونكامل من جديد فنحصل على $\frac{dx}{du} = \pm\, C\sin^2\frac{u}{2} = \pm\frac{C}{2}\left(1-\sin^2 u\right)$، ونختار الاتجاه الموجب كما في الشكل.3a. وهكذا فالمنحني المطلوب هو السيكلوئيد Cycloïd. تتعين قيمة الثابتة C بإحداثيات النقطة M_2 التي يجب على المنحني أن يمر منها.



الشكل.3a

يُظهر الشكل صورة رسم متحرك أخذ من الشبكة الإلكترونية يمثل حركة ثلاث كرات صغيرة تنطلق في آن واحد من النقطة $M_1(0,0)$ على المستقيم المائل M_1M_2 وعلى الخط الشاقولي ثم الأفقي $M_1M'M_2$ وعلى فرع السيكلوئيد لتبين أنها الكرة التي تصل M_2 قبل الكرتين الأخريين.

لنتذكر أن السيكلوئيد هو المنحني الذي ترسمه نقطة من دائرة قطرها C تتدحرج على المحور الأفقي Ox، u هي الزاوية التي تحدثها النقطة مع نصف القطر البدائي، الشكل.3b.



الشكل.3b

تعريف 4 :

نسمي تغيراً للدالتية J المقدار δJ المعطى بالعلاقة

$$\delta J = \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha \quad (1.9)$$

ونسمي تغيراً للدالة y المقدار :

$$\delta y = \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha = \eta(x)d\alpha \quad (1.10)$$

وتغيراً لـ $\dot{y}$:

$$\delta \frac{dy}{dx} = \dot{\eta}(x)d\alpha = \frac{d\delta y}{dx} \quad (1.10)'$$

(نضع من الآن فصاعداً نقطة . فوق المتغير للتعبير عن الاشتقاق).

أي أننا استبدلنا في (1.6) δy بـ Δy و dα بـ α.

ترينا '(1.10) أن العلاقة بين مؤثري التغير δ والاشتقاق d تبديلية δd = dδ.

نعرف المشتق الدالتي للدالتية J بالعلاقة

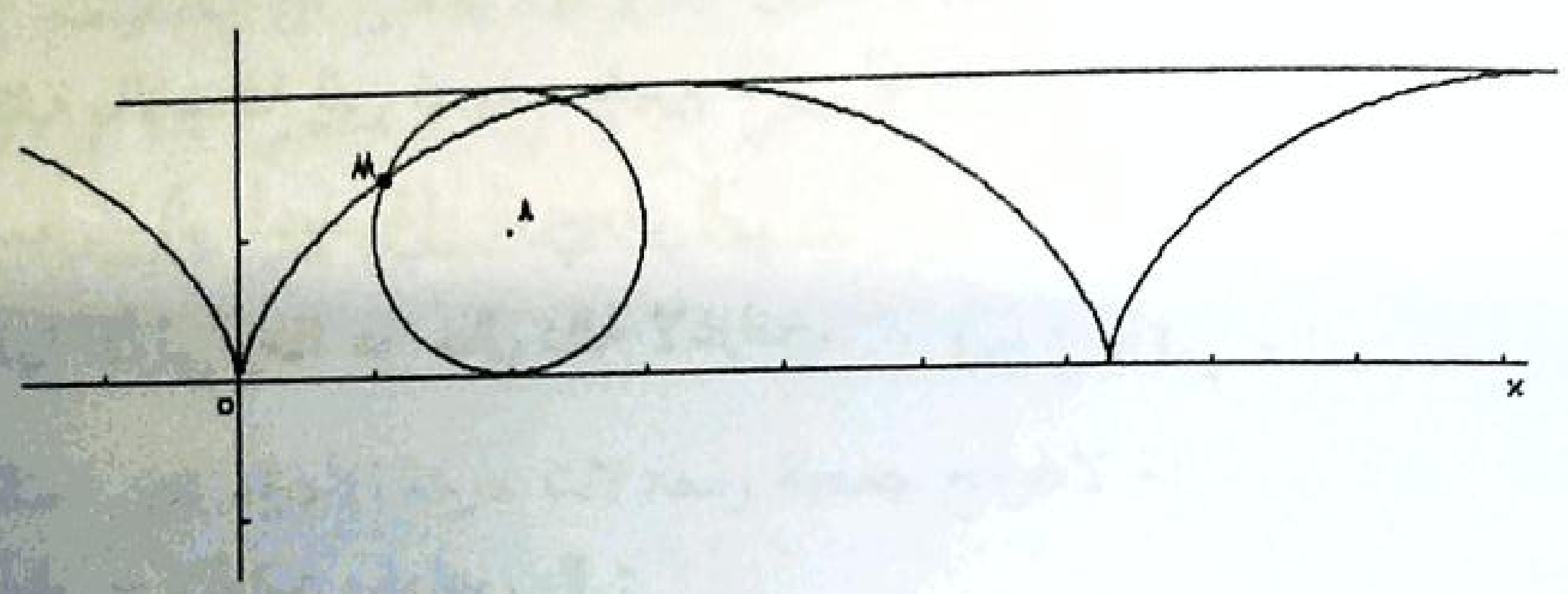
$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\delta J}{\delta y}\delta y\, dx \quad (1.11)$$

ونكتب '(1.7) و "(1.7) الآن على الشكل

$$\delta J = \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha = \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\delta y\right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\delta y\, dx \quad (1.11)'$$

يُظهر الشكل صورة رسم متحرك أخذ من الشبكة الإلكترونية يمثل حركة ثلاث كرات صغيرة تنطلق في آن واحد من النقطة $M_1(0,0)$ على المستقيم المائل M_1M_2 وعلى الخط الشاقولي ثم الأفقي $M_1M'M_2$ وعلى فرع السيكلوئيد لتبين أنها الكرة التي تصل M_2 قبل الكرتين الأخريين.

لنتذكر أن السيكلوئيد هو المنحني الذي ترسمه نقطة من دائرة قطرها C تتدحرج على المحور الأفقي Ox، u هي الزاوية التي تحدثها النقطة مع نصف القطر البدائي، الشكل.3b.



الشكل.3b

<u>تعريف 4</u> :

نسمي تغيراً للدالتية J المقدار δJ المعطى بالعلاقة

$$\delta J = \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha \qquad (1.9)$$

ونسمي تغيراً للدالة y المقدار :

$$\delta y = \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha = \eta(x)d\alpha \qquad (1.10)$$

وتغيراً لـ $\dot{y}$:

$$\delta \frac{dy}{dx} = \dot{\eta}(x)d\alpha = \frac{d\delta y}{dx} \qquad (1.10)'$$

(نضع من الآن فصاعداً نقطة . فوق المتغير للتعبير عن الاشتقاق).

أي أننا استبدلنا في (1.6) δy بـ Δy و $d\alpha$ بـ α.

ترينا $(1.10)'$ أن العلاقة بين مؤثري التغير δ والاشتقاق d تبديلية $\delta d = d\delta$.

نعرف المشتق الدالتي للدالتية J بالعلاقة

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\delta J}{\delta y} \delta y \, dx \qquad (1.11)$$

ونكتب $(1.7)'$ و $(1.7)''$ الآن على الشكل

$$\delta J = \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha = \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\delta y\right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\delta y \, dx \qquad (1.11)'$$

وبما أن δy يساوي الصفر من أجل x_1 و x_2 فلا يبقى إلا التكامل. وتبين المقارنة بين العلاقتين السابقتين أن

$$\frac{\delta J}{\delta y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (1.11)''$$

إن انعدام تغير الدالتية J يعني انعدام مشتقها الدالتي $\frac{\delta J}{\delta y} = 0$ ونحصل على معادلة أولر.

تتيح لنا هذه الكتابة بالإضافة إلى تعريف مفهوم تغير الدالتية والقول إن هذا التغير يساوي الصفر لكي تكون الدالتية أصغرية (أو أعظمية)، الوصول إلى جملة من معادلات أولر عندما يكون f تابعاً لعدة متغيرات ولمشتقاتها الأولى وهذا هو حال دالة لاغرانج.

3.1- معادلات أولر – لاغرانج وخواص L :

إن ما كتبناه في حساب تغير دالتية J، أي تكامل دالة بمتغير واحد y تابع للمتغير x ينطبق على تغير الدالتية S، الفعل، الذي هو تكامل دالة بـ n متغيراً $q^1 \dots q^n$ تابعة للمتغير (الزمن) t. لدينا إذاً تعميماً لـ $(1.11)'$

$$\delta S = \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i\right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_i^n \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\delta q^i dt \qquad (1.11)_L$$

$$0 = \delta S = \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha = \int_{t_1}^{t_2}\sum_i^n\left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\delta q^i dt$$

$$= \sum_i^n \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\delta q^i dt$$

يجب أن يكون كل حد من هذا المجموع مساوياً للصفر، أي أن يتحقق الشرط الذي أعطيناه في حالة متغير واحد.

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0 \qquad \text{من أجل } i = 1, 2 \dots n \qquad (1.12)$$

إنها n معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية – انظر $(1.8)''$ – يتوقف حلها على 2n ثابتاً اعتباطياً تحددها الشروط البدائية، الإحداثيات العامة البدائية q_0^i والسرع العامة البدائية $\dot{q}_0^i$.

لدينا هنا أيضاً كما في (1.11)

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\sum_i \frac{\delta S}{\delta q^i}\delta q^i dt \qquad (1.12)'$$

والمشتقات الدالتية لـ S هي

$$\frac{\delta S}{\delta q^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$$

إن انعدام تغير الدالتية $\delta S = 0$ يعني انعدام كل مشتقاتها الدالتية $\frac{\delta S}{\delta q^i}$ الذي يعطينا معادلات أولر لاغرانج.

ليكن لدينا نظمة ميكانيكية مؤلفة من جزئين مغلقين A و B، بمعنى أن إحداثيات L_A لا تدخل في إحداثيات L_B والعكس بالعكس. ليكن L_A لاغرانجي A و L_B لاغرانجي B. إن لاغرانجي النظمة ككل، بفرض بقاء الجزئين A و B بعيدين عن بعضهما بما فيه الكفاية، حتى لا يتفاعلا، هو حدياً

$$\lim L = L_A + L_B \qquad (1.13)$$

نعبر عن هذه الخاصة بقولنا إن دالة لاغرانج جمعية ومعادلات حركة الأجزاء غير المتفاعلة مستقلة عن معادلات الأجزاء الأخرى.

لنلاحظ أيضاً أن ضرب اللاغرانجي بعدد ثابت لا يغير معادلات الحركة، ولكن خاصة الجمعية تبين أن هذا الثابت هو نفسه بالنسبة لكل أجزاء النظمة الميكانيكة، فهو يتوقف إذاً على الوحدات المستعملة في قياس L، والضرب بعدد لا يعني والحال هذه وجود أي عدم تحديد في تعريف الدالة.

لنلاحظ أخيراً أن معادلات لاغرانج لا تتغير في حالة إضافة دالة إضافية إليه شريطة أن تكون مشتقاً كلياً بالنسبة للزمن لدالة أصلية $f(q^i, \dot{q}^i, t)$. ذلك أن L و $L' = L + \frac{d}{dt}f$ يؤديان إلى نفس معادلات الحركة (1.12) : ليكن S' فعل L'، لدينا

$$\delta S' = \delta\int_{t_1}^{t_2}\left[L(q^i, \dot{q}^i, t) + \frac{d}{dt}f(q^i, \dot{q}^i, t)\right]dt$$

$$= \delta S + \delta\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}f(q^i, \dot{q}^i, t)dt = \delta S + \delta\left[f(q^i, \dot{q}^i, t)\right]_{t_1}^{t_2}$$

ولكن الحد بين المعقوفتين هو العدد الثابت $f\left(q^i(t_2), \dot{q}^i(t_1)\right) - f\left(q^i(t_2), \dot{q}^i(t_1)\right)$ وتغيراته معدومة وضوحاً.

وهكذا فإن لـ L' و L نفس معادلات الحركة :

$$0 = \delta S' = \delta S$$

4.1- مبدأ النسبية الغاليلية :

أقمنا في (3.§2.3) الميكانيك النيوتوني على عدة أسس، أحدها مبدأ النسبية الغاليلية الذي يقبل بقانون العطالة، بوجود مقرن غاليلي تسير فيه الأجسام الحرة بحركة مستقيمة منتظمة وبوجود تحويلات (3.(2.9,10)) تتيح الانتقال من مقرن غاليلي إلى آخر وبتكافؤ هذه المقارن فيما بينها من وجهة نظر

الميكانيك. وبينا أن منشأ هذا المبدأ هو تجانس الفضاء وتناحيه وتجانس الزمان. تسمح لنا هذه الصفات بإيجاد شكل دالة لاغرانج من أجل جسيم حر تعينه إحداثياته الديكارتية x, y, z. إن تجانس الفضاء يشير إلى عدم توقف L على الإحداثيات المتغيرة من مقرن غاليلي إلى آخر ولا يتوقف بالتالي إلا على السرع (x', y', z'). لكن تناحي الفضاء يعني توقف L على طويلة متجهة السرعة $|v|$ وليس على إحداثياتها أي أن

$$L = L\left(v^2\right) = L\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)$$

وبالتالي فإن معادلات الحركة (1.12) من أجل الجسيم الحر هي

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial x'} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial y'} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial z'} = 0 \end{cases} \qquad (1.14)$$

نظراً لأن

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \vec{\nabla} L = \begin{Bmatrix} \partial L/\partial x \\ \partial L/\partial y \\ \partial L/\partial z \end{Bmatrix} = 0 \qquad (1.15)$$

نكتب المعادلات (1.14) على نفس الشكل

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{V}} = 0 \qquad (1.14)'$$

ومنه $\frac{\partial L}{\partial \vec{V}} =$ ثابتة. ولما كان اللاغرانجي تابعاً لـ v^2 فإن

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{V}} = \frac{\partial L}{\partial v^2}\frac{\partial v^2}{\partial \vec{V}} = 2\frac{\partial L}{\partial v^2}\vec{V} = \text{ثابتة}$$

أي أن المتجهة $\vec{V}$ ثابتة ونجد من جديد مبدأ (قانون) العطالة.

علينا الآن تحديد شكل $L\left(v^2\right)$. ليكن K المقرن الغاليلي الذي وجدنا فيه السرعة الثابتة $\vec{V}$. لنحسب هذه السرعة في مقرن غاليلي آخر K' يسير بسرعة منتظمة، لامتناهية في الصغر $\vec{\varepsilon}$ بالنسبة للآخر. إن سرعة الجسيم بالنسبة لـ K' هي $\vec{V}' = \vec{V} + \vec{\varepsilon}$ ودالة لاغرانج بالنسبة له هي

$$L' = L(v'^2) = L(v^2 + 2\vec{V}\cdot\vec{\varepsilon} + \varepsilon^2)$$

يعطينا نشر هذه العلاقة حسب دستور تايلور بالنسبة لقوى ε، مهملين ما هو من الدرجة الثانية بـ ε

$$L'(v'^2) = L(v^2) + \frac{\partial L}{\partial v^2} 2\vec{V}\cdot\vec{\varepsilon}$$

يجب أن يتكافأ اللاغرانجيانان L' و L حسب مبدأ النسبية الغاليلية، وعليه فإن الحد الثاني $\frac{\partial L}{\partial v^2} 2\vec{V}\cdot\vec{\varepsilon}$ مشتق كلي بالنسبة للزمن. لكن $\vec{V}$ نفسها $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$ مشتق كلي ولذا لا يمكن للحد ككل أن يكون مشتقاً كلياً

- ε ثابت – إلا إذا كان المقدار $\frac{\partial L}{\partial v^2}$ ثابتاً. يرمز لهذا الثابت بـ $\frac{m}{2}$ ونكتب دالة لاغرانج لجسيم حر على الشكل

$$L = \frac{m}{2} v^2 \qquad (1.16)$$

نسمي الثابتة m كتلة الجسيم. وبما أن للدالة L خاصة الجمعية فإنها تساوي في حالة عدد n من الجسيمات المادية الحرة غير المتفاعلة ونرمز لها بـ i ولكتلتها بـ m_i ولسرعتها الثابتة بـ v_i

$$L = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 \qquad (1.16)'$$

ملاحظة هامة :

يبين لنا مبدأ الفعل الأصغر، $S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2} v^2 dt$، بأخذ التغير الثاني $\delta^2 S = \delta(\delta S)$ الذي يجب أن يكون موجباً، كما في حال المشتقات، لكي تكون الدالتية S أصغرية، أن الثابتة m موجبة دوماً.

5.1- الشكل العام لدالة لاغرانج :

لنفرض أن الجسيمات المادية تتفاعل فيما بينها ولكنها تبقى معزولة عما عداها –عن الوسط الخارجي– نعرف L بإضافة دالة جديدة إلى '(1.16) لا تتوقف إلا على الإحداثيات نرمز لها بـ $-U$، ليصبح اللاغرانجي الكلي

$$L = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2} v_i^2 - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots \vec{r}_n) = T - U \qquad (1.17)$$

حيث سمينا الحد الأول الطاقة الحركية والحد الثاني الطاقة الكامنة.

إن تعبيرنا عن التفاعل (القوى) بدالة لا تتوقف إلا على الإحداثيات، أي على المسافات بين الجسيمات، يعني قبولنا بالتفاعل الآني : إن تغيير وضع أحد الجسيمات في لحظة ما يؤثر آنياً على الجسيمات الأخرى. إن هذا التأثير المباشر، هذا الانتشار للتفاعل بسرعة لامتناهية، غير صحيح فيزيائياً ولكننا لا نستطيع تجنبه في الميكانيك التقليدي لأن ذلك سيجبرنا على التخلي عن تحويلات غاليلية حيث الزمن المطلق $t = t'$. وعن مبدأ النسبية الغاليلية : إن انتشار التفاعل بسرعة منتهية، تتغير من مقرن غاليلي إلى مقرن غاليلي آخر، يؤدي إلى تغير قانون التفاعل من مقرن غاليلي إلى آخر خلافاً لما قبلناه حتى الآن وبنينا الميكانيك التقليدي على أساسه.

لنكتب معادلات لاغرانج بالنسبة لكل جسيم انطلاقاً من (1.17)، (1.14) و (1.15) على الشكل

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{V}_i} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \qquad n = 1، 2 \dots n$$

لكن $2\frac{\partial L}{\partial v_i^2}\vec{V}_i = \frac{\partial L}{\partial \vec{V}_i}$ وتساوي حسب (1.17) $m_i\vec{V}_i$ و $\vec{\nabla}_i L = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}$ ومنه

$$m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} = \vec{F}_i \qquad (1.12)'''$$

حيث سمينا $\vec{F}_i$ القوة المشتقة من كمون، المؤثرة على الجسيم i. ونكون بذلك قد أثبتنا أن معادلات لاغرانج الناتجة عن مبدأ الفعل الأصغر هي في الواقع مبدأ نيوتن – قانون نيوتن الثاني.

هذا في حالة الإحداثيات الديكارتية، أما في حالة الإحداثيات العامة فإنه من الممكن دوماً إيجاد العلاقة بين السرع الديكارتية والسرع العامة على النحو التالي :

نرمز للإحداثيات الديكارتية للجسم i بـ $x_i^i, x_i^{i+1}, x_i^{i+2}$: نفرض x_i^j $j = i, i+1, i+2$ معرفة بالعلاقة

$$x_i^j = f_i^j(q^1, \ldots q^N)$$ حيث N عدد درجات الحرية

$$\frac{dx_i^j}{dt} = \dot{x}_i^j = \frac{\partial f_i^j}{\partial q^\ell}\dot{q}^\ell$$

$$(\dot{x}_i^j)^2 = \sum_{k,\ell=1}^{N} \frac{\partial f_i^j}{\partial q^\ell}\dot{q}^\ell \frac{\partial f_i^j}{\partial q^k}\dot{q}^k$$

والطاقة الحركية الكلية هي

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \sum_{j=i}^{i+2}\sum_{k,\ell=1}^{N} \frac{\partial f_i^j}{\partial q^\ell}\frac{\partial f_i^j}{\partial q^k}\dot{q}^\ell \dot{q}^k$$

لنسم المقدار

$$\frac{\partial f_i^j}{\partial q^\ell}\frac{\partial f_i^j}{\partial q^k} = a_{\ell k}^{ij}$$

بحيث تصبح T

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \sum_{j=i}^{i+2}\sum_{k,\ell=1}^{N} a_{k\ell}^{ij}\,\dot{q}^\ell \dot{q}^k = \frac{1}{2}\sum_{k,\ell} A_{k\ell}\dot{q}^\ell \dot{q}^k \qquad (1.18)$$

أي أن الطاقة الحركية احتفظت بطابعها التربيعي – $3nN^2$ حداً – ونكتب (1.17) عندئذ على الشكل

$$L = \frac{1}{2}\sum_{k,\ell} A_{k\ell}\,\dot{q}^\ell \dot{q}^k - U(q^1, \ldots q^N) \qquad (1.19)$$

حيث $A_{k\ell} = \sum_{i,j} m_i a_{k\ell}^{ij}$.

عندما تتألف النطمة الميكانيكية من جزء A متفاعل مع جزء آخر B معلوم الحركة، نقول في هذه الحالة إن A يتحرك في حقل معلوم يحدثه B ونكتب دالة لاغرانج L_A انطلاقاً من دالة النطمة الميكانيكية الكلية $A + B$ التي نعتبرها معزولة :

$$L = T_A(q_A, \dot{q}_A) + T_B(q_B, \dot{q}_B) - U(q_A, q_B) \qquad (1.20)$$

حيث رمزنا بـ q_A و $\dot{q}_A$ إلى جملة إحداثيات الجزء A وسرعته العامة وكذا q_B و $\dot{q}_B$ للجزء B، T_A T_B إلى طاقتيهما الحركية و $U(q_A, q_B)$ إلى طاقة التفاعل الكامنة. وبما أننا فرضنا أن B معلوم

الحركة فإن هذا يعني أن q_B و $\dot{q}_B$ دالات معلومة بدليل الزمن $q_B(t)$ و $\dot{q}_B(t)$ وبالتالي فإن الطاقة الحركية T_B تابعة للزمن وحده أي أنها مشتق كلي بالنسبة للزمن يمكن بالتالي إهماله في صياغة L الذي يصبح

$$L = L_A = T_A - U\left(q_A, q_B(t)\right) \qquad (1.20)'$$

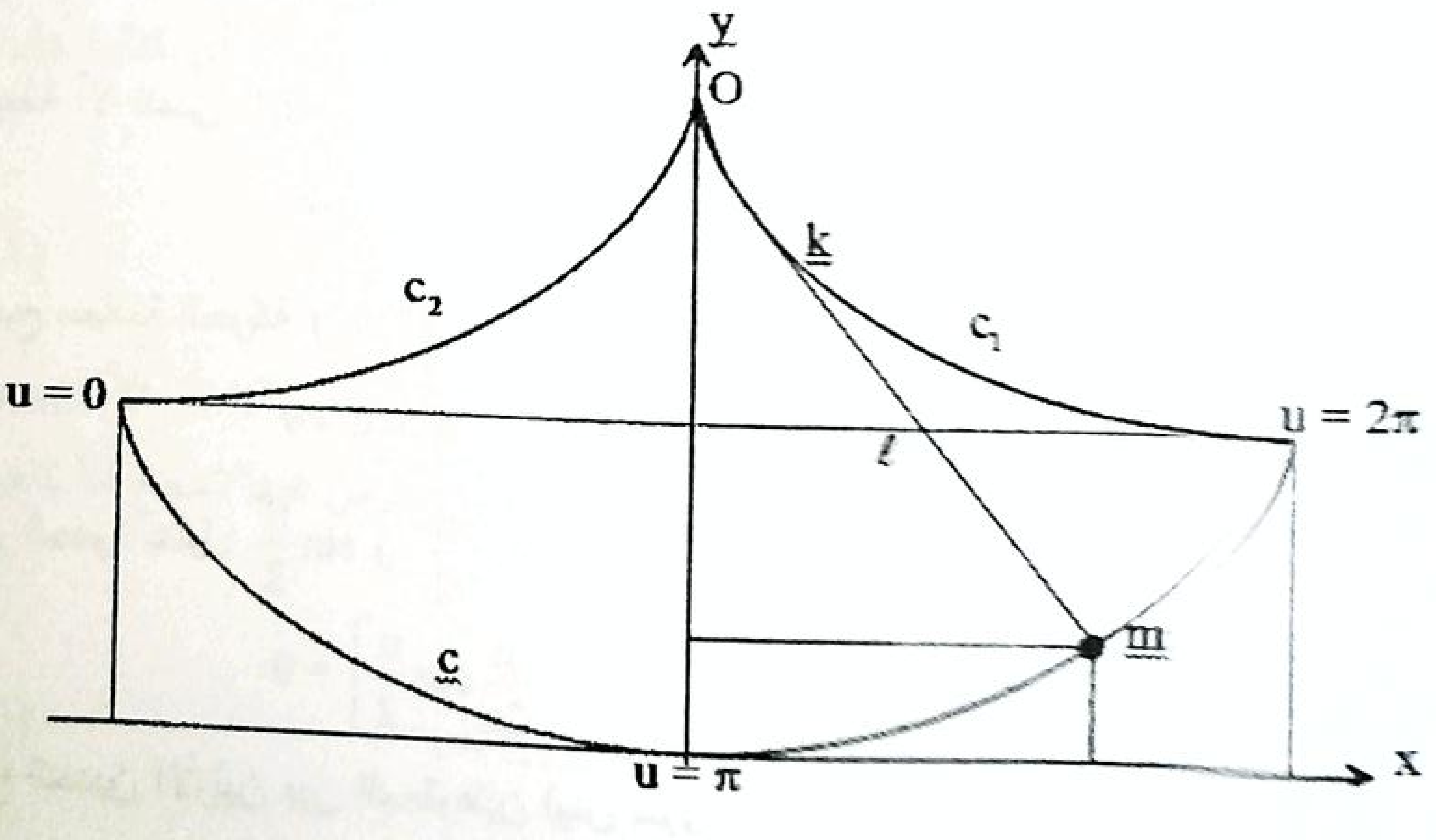
وهكذا تبقى دالة لاغرانج من أجل جزء متفاعل مع جزء آخر معلوم الحركة على الشكل (1.17) مع فارق مهم هو أن الطاقة الكامنة أصبحت تابعة للزمن بشكل صريح.

تأخذ '(1.20) الشكل المعروف، عندما يتعلق الأمر بجسيم واقع تحت تأثير حقل خارجي،

$$L = \frac{mv^2}{2} - U\left(r(t)\right)$$

مثال :

النواس السيكلوئيدي : تتحرك النقطة المادية m على سيكلوئيد عوضاً عن التحرك على قوس دائرة كما في النواس البسيط وتتدلى من النقطة O بواسطة خيط طوله $\ell = 2C$ (ضعف قطر الدائرة المولدة للسيكلوئيد)، الشكل.4.



الشكل.4

يُظهر الشكل النواس السيكلوئيدي كما صنعه هويغنز مستعملاً خاصة الناشر الهندسي. لنذكر أننا نسمي ناشر منحني ما c_1 ‏developpante، evolute، المنحني الذي ترسمه نهاية خيط مرن ملتف على c_1 وينفك عنه تدريجياً بحيث يبقى مماساً له في النقطة k التي ينفصل فيها عن c_1. إن ناشر فرع السيكلوئيد c_1 هو فرع السيكلوئيد c المقابل له. يعود الخيط للالتفاف حول c_2 انطلاقاً من الوضع الشاقولي $u = \pi$ ليكمل السيكلوئيد c.

لدينا كما رأينا في المثال 2 من (§1.2) :

$x = a(u - \sin u)$ ، $y = a(1 + \cos u)$ حيث سمينا $\frac{C}{2} = a$. إشارة + في تعيين y ناتجة عن أخذنا y_0 نحو الأعلى والطاقة الحركية $T = \frac{m}{2}\left(x'^2 + y'^2\right) = ma^2(1 - \cos u)u'^2$ حيث $u' = \frac{du}{dt}$ هي السرعة الزاوية.

أما الطاقة الكامنة فهي كما في النواسط البسيط

$$U = mgy = mga(1 + \cos u)$$

ولاغرانجي النواس هو

$$L = ma^2(1 - \cos u)u'^2 - mga(1 + \cos u) \qquad (1.21)$$

ومعادلة الحركة المعينة بدرجة حرية واحدة (u) هي

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial u'} = 0 \qquad (1.22)$$

إن

$$\frac{\partial L}{\partial u} = ma^2 \sin u\, u'^2 + mga \sin u$$

و

$$\frac{\partial L}{\partial u'} = 2ma^2(1 - \cos u)u'$$

وأخيراً شريطة ألا ننسى "(1.8)"،

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial u'} = 2ma^2(1 - \cos u)u'' + 2ma^2 \sin u\, u'^2$$

وهكذا تصبح معادلة الحركة (1.22) بتقسيم كل الحدود على $2ma^2$

$$(1 - \cos u)u'' + \frac{1}{2}\sin u\, u'^2 - \frac{g}{2a}\sin u = 0 \qquad (1.23)$$

وبكتابة كل الحدود بدليل $\sin\frac{u}{2}$ و $\cos\frac{u}{2}$ نجد

$$2\sin\frac{u}{2}\left[\sin\frac{u}{2}u'' + \frac{1}{2}\cos\frac{u}{2}u'^2 - \frac{g}{2a}\cos\frac{u}{2}\right] = 0$$

لكن مجموع الحدين الأولين بين المعقوفتين ليس سوى

$$-2\frac{d^2}{dt^2}\cos\frac{u}{2}$$

بحيث تصبح معادلة الحركة المعادلة التالية

$$\frac{d^2}{dt^2}\cos\frac{u}{2} = -\frac{g}{4a}\cos\frac{u}{2} \qquad (1.24)$$

وهي معادلة لا تختلف عن معادلة النواس البسيط $\frac{d^2u}{dt}+\omega^2u=0$ إلا بكون المتغير هو $\cos\frac{u}{2}$ عوضاً عن u. ولكن هذا لا يغير شيئاً في التكامل، وتبقى العلاقة $\omega=\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{g}{\ell}}$ صحيحة أي أن دور النواس السيكلوئيدي هو

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

حيث $\ell=4a$. والفارق بين النواسين هو أن معادلة النواس البسيط لا تصلح إلا من أجل النوسات الصغيرة، الابتعاد الصغير عن وضع التوازن $(\sin u=u)$. بينما تصح معادلة النواس السيكلوئيدي أياً كانت سعة الاهتزازات : إنه متزامن بشكل دقيق بمعنى أن دوراته مستقلة تماماً عن سعة الاهتزاز.

2. قوانين الانحفاظ

رأينا (1.12) أن معادلات لاغرانج لنظمة ميكانيكية بـ n درجة حرية هي n معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية يتوقف حلها على تعيين 2n ثابتة اعتباطية. كما أن هذه المعادلات (اللاغرنجي نفسه) لا تتوقف على الزمن صراحة ولذا فيمكننا اختيار مبدأ الزمن t_o كأحد الثوابت الاعتباطية، أي كتابة حل المعادلات (1.12) على الشكل

$$\begin{cases} q^i=q^i\left(t+t_o, c_1\dots c_{2n-1}\right)\\ \dot{q}^i=\dot{q}^i\left(t+t_o, c_1\dots c_{2n-1}\right)\end{cases} \qquad (2.1)$$

لنعبر عن الزمن $t+t_o$ في إحدى هذه المعادلات، q^i مثلاً، بدليل q^i والثوابت الأخرى ونضع هذا التعبير في المعادلات الأخرى فنحصل على $2n-1$ معادلة لا وجود للزمن فيها تسمح لنا بتعيين الثوابت $c_1\dots c_{2n-1}$ بدليل q^i و $\dot{q}^i$ وحدها

$$\begin{cases} c_j=c_j\left(q^i,\dot{q}^i\right)\\ \frac{dc_j}{dt}=0\end{cases} \qquad i=1,\dots,2n-1 \qquad (2.2)$$

ونقول إننا حصلنا من معادلات لاغرانج على $(2n-1)$ تكامل أولي.

إن إيجاد بعض التكاملات الأولية ضروري لحل المعادلات التفاضلية إلا أننا لن ننظر هنا إلا لعدد محدود منها – سبع تكاملات أولية فقط – سبع ثوابت ناتجة عن الخواص التي وضعناها للزمان والمكان، التي افترضنا أن الزمان والمكان يتمتعان بها. نسمي هذه الثوابت السبع المقادير المنخفظة.

1.2- انحفاظ الطاقة :

لنبدأ بخاصة تجانس الزمان. تعني هذه الخاصة عدم توقف L مباشرة على الزمن وإلا لأصبح $L(t') = L(t+t_o) \neq L(t)$ ولتغيرت قوانين الميكانيك نتيجة لذلك. وهكذا فإن L لا يتوقف صراحة على الزمن وإنما ضمنياً بتوقفه على $q^i(t)$ و $\dot{q}^i(t)$ و

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \ddot{q}^i \right) \qquad (2.3)$$

ولا وجود في (2.3) لحد من الشكل $\frac{\partial L}{\partial t}$. لنبدل في هذه المعادلة $\frac{\partial L}{\partial q^i}$ بقيمها في معادلات الحركة :

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \ddot{q}^i \qquad (2.3)'$$

$$= \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i \right) \qquad (2.3)''$$

وبعبارة أخرى فإن

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L \right) = 0 \qquad (2.4)$$

والمقدار داخل المعترضتين تكامل أولي – مقدار منحفظ

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L = \text{ثابتـــة} \qquad (2.4)'$$

نسمي هذا المقدار المنحفظ طاقة النظمة. إنه دالة خطية بـ L (الاشتقاق دالة خطية) وبما أن L جمعي فإن الطاقة جمعية أيضاً : تساوي طاقة النظمة مجموع طاقة جزئين غير متفاعلين تنقسم إليهما.

إن مشتق L بالنسبة لـ $\dot{q}^i$ هو في واقع الأمر مشتق طاقته الحركية وشكلها العام هو (1.18) و

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i = 2T \qquad (2.5)$$

لأننا اشتققنا بالنسبة لـ $\dot{q}^\ell$ في (1.18) وضربنا بـ $\dot{q}^\ell$ فحصلنا على $T = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell} .. \dot{q}^\ell \dot{q}^k$. فعلنا الشيء نفسه لـ $\dot{q}^\ell$ لنحصل على T مرة ثانية[3].

وهكذا فإن المقدار الثابت (2.4) هو حسب (1.17)

$$2T - (T - U) = T + U = E \qquad (2.6)$$

---

[3] نقول على دالة ما f بـ n متغيراً $x^1 ... x^n$ إنها متجانسة من الدرجة s إذا تحققت المساواة $f(\lambda x^1, ..., \lambda x^n) = \lambda^s f(x^1, ... x^n)$ حيث λ ثابتة اعتباطية. لدينا باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ λ ثم وضع $\lambda = 1$

$$\sum_i x^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = sf(x^1 ... x^n)$$

إن T دالة متجانسة بـ $\dot{q}^i$ من الدرجة $s = 2$ ومنه (2.5).

إن طاقة النظمة هي مجموع الطاقة الحركية، التابعة للسرع، والطاقة الكامنة التابعة للوضع، لقيم الإحداثيات العامة.

لنفرض أن النظمة الميكانيكية حرة الحركة، أنه لا وجود لقوى تفاعل، أي أن $U = 0$. وبالتالي فإن E الثابتة تساوي T ويأخذ الفعل الأصغر $\delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$ الشكل البسيط الآتي بعد إخراج E الثابتة من علاقة التغير

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} dt = 0 = \delta(t_2 - t_1)$$

إنه مبدأ الزمن الأقصر الذي وضعه فيرما Fermat وطبقه على انكسار الضوء.

2.2- انحفاظ الاندفاع الخطي :

إن تجانس المكان وعدم توقف الخواص الميكانيكية للنظمة المعزولة على الانسحابات في الفضاء الإقليدي، يعني استقلال L عن هذه الانسحابات أن $L(\vec{r}_i) = L(\vec{r}_i + \vec{\varepsilon})$، حيث $\vec{\varepsilon}$ الانسحاب اللامتناهي في الصغر الذي وقع على كل المتجهات التي تعين وضع جزيئات النظمة. لنكتب هذه العلاقة على الشكل

$$L(\vec{r}_1, \dots \vec{r}_n) = L(\vec{r}_i) = L(\vec{r}_i) + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}\vec{\varepsilon}$$

يجب إذاً أن يكون المقدار

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0 \qquad (2.7)$$

وبالعودة إلى "(1.12) نحصل على المشتق المساوي للصفر

$$\frac{d}{dt}\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{V}_i} = 0 \qquad (2.7)'$$

أو أن حصيلة المتجهات $\frac{\partial L}{\partial \vec{V}_i}$ ولنسمها $\vec{P}$ ثابتة

$$\vec{P} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{V}_i} = \text{ثابتة} \qquad (2.8)$$

نسمي هذا المقدار الثابت، هذه المتجهة بمركباتها الثلاث الثابتة، الاندفاع الخطي للنظمة. رأينا أن $\frac{\partial L}{\partial \vec{V}_i} = m_i\vec{V}_i$ ولذا نكتب (2.8) على الشكل

$$\vec{P} = \sum_i m_i\vec{V}_i = \sum_i \vec{p}_i \qquad (2.9)$$

حيث $\vec{p}_i = m_i\vec{V}_i$ هو اندفاع كل جسيم، أو كمية حركته كما سماه نيوتن.

لنعد الآن إلى (2.7) ولنكتها على الشكل

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = -\sum_i \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} = -\sum_i \vec{\nabla}_i U = \sum \vec{F}_i = 0 \quad (2.10)$$

أي أن حصيلة القوى المطبقة على نظمة ميكانيكية مغلقة – معزولة – تساوي الصفر ولدينا، بشكل خاص، عندما تتألف النظمة من جزئين متفاعلين، جسيمين متفاعلين على سبيل المثال

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0 \quad (2.10)'$$

إن القوة التي يمارسها الجزء الأول على الجزء الثاني تساوي وتعاكس القوة التي يمارسها الجزء الثاني على الجزء الأول. وهكذا فإن مبدأ نيوتن الثالث القائل بتساوي الفعل ورد الفعل ليس مبدأ مستقلاً وإنما ينتج عن مبدأ الفعل الأصغر وعن تجانس المكان.

<u>تعريف 5</u> :

نسمي اندفاعاً عاماً أو عزماً عاماً المقدار

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$$

كما نسمي قوة عامة المقدار

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q^i}$$

وتأخذ معادلات لاغرانج شكلاً هو تعميم للشكل المألوف :

$$\frac{dP_i}{dt} = F_i \quad (2.11)$$

لننظر الآن إلى كيفية تغير الاندفاع نتيجة الانتقال من جملة غاليلية K إلى جملة غاليلية أخرى K' تسير بالنسبة للأولى بسرعة مستقيمة منتظمة $\vec{V}$. لدينا حسب قانون تركيب السرع

$$\vec{V}_i = \vec{V}_i' + \vec{V}$$

حيث $\vec{V}_i$ هي سرعة الجسيم بالنسبة لـ K و $\vec{V}_i'$ سرعته بالنسبة لـ K' ولدينا حسب (2.9)

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{V}_i = \sum_i m_i \vec{V}_i' + MV = \vec{P}' + \overline{MV} \quad (2.12)$$

حيث $\sum_i m_i = M$ هي الكتلة الكلية للنظمة الميكانيكية.

تتيح لنا هذه العلاقة إيجاد المقرن الغاليلي K' الذي ينعدم فيه الاندفاع الكلي $\vec{P}'$. يجب أن تكون السرعة $\vec{V}$ لهذا المقرن معطاة بالعلاقة

$$\vec{V} = \frac{\vec{P}}{M} = \frac{\sum_i m_i \vec{V}_i}{\sum_i m_i} = \frac{d}{dt} \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{d}{dt} \overline{OC} \quad (2.13)$$

حيث C هو مركز الكتلة. تعني هذه العلاقة أمرين، أولهما أن مركز كتلة نظمة ميكانيكية مغلقة يسير بحركة مستقيمة منتظمة. وثانيهما أنه يمكن اختيار مركز الكتلة كمبدأ مقرن غاليلي وإهمال حركته نتيجة

لذلك. ونكون قد عممنا مبدأ العطالة من حركة جسيم – نقطة مادية –، غير خاضعة لقوة خارجية إلى حركة نظمة ميكانيكية حيث ينطبق مبدأ العطالة على مركز كتلتها.

نكتب العلاقة (2.13) على الشكل

$$\vec{P} = M\vec{V}_C \qquad (2.14)$$

إن اندفاع النظمة يساوي لمجموع الكتل (فالكتلة مقدار جمعي) مضروباً بسرعة مركز الكتلة.

تعريف 6 :

نسمي طاقة داخلية طاقة النظمة الميكانيكية بالنسبة لمركز كتلتها ونرمز لها بـ E_{int}.

نرى أن طاقة النظمة الكلية في المقرن الغاليلي K هي

$$E = \frac{MV_C^2}{2} + E_{int} \qquad (2.15)$$

قد لا تحتاج هذه العلاقة إلى برهان لوضوحها نظراً لخاصة جمعية اللاغرانجي وبالتالي جمعية الطاقة؛ ومع ذلك سنستغل علاقة تغير الطاقة بين المقرنين K و K' للبرهان عليها وإعطاء صيغة الطاقة الداخلية. لتكن E و E' هاتين الطاقتين. لدينا

$$E = \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{V}_i^2 + U = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\vec{V}'_i + V_C\right)^2 + U$$

$$= \frac{1}{2}\sum m_i \vec{V}_i'^2 + U + \frac{M}{2}V_C^2 + \vec{V}_C \sum m_i \vec{V}'_i$$

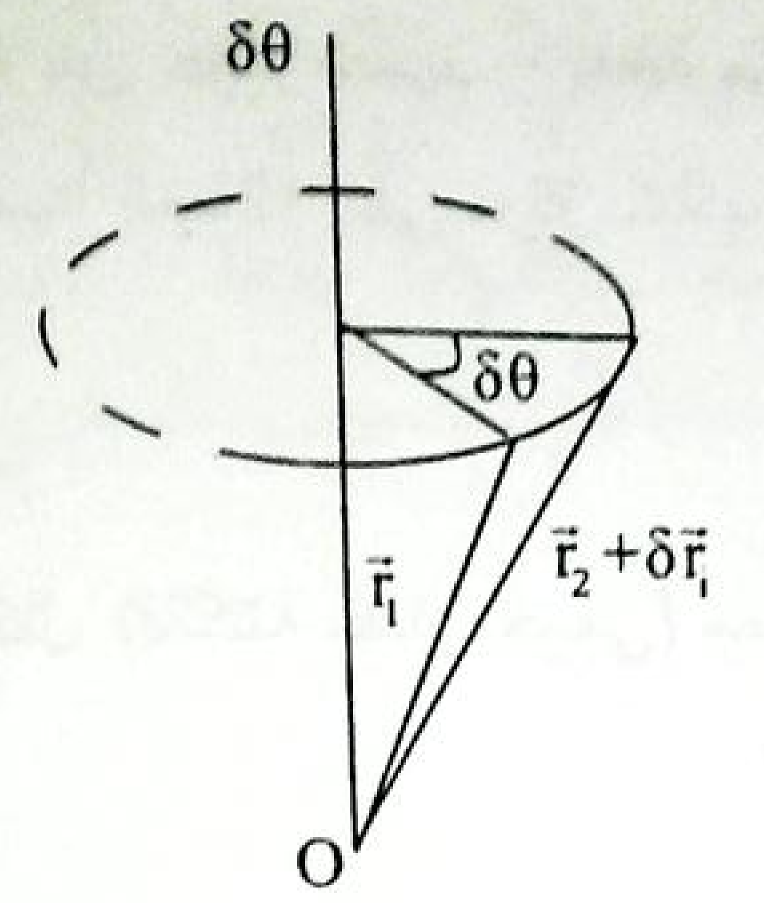
إن الحد الأخير هو $\vec{V}_C \cdot \vec{P}'$، ولكننا عرفنا C بقولنا إنه مبدأ المقرن K' الذي ينعدم فيه الاندفاع الكلي $\vec{P}'$. وهكذا فإن

$$E = \frac{MV_C^2}{2} + \frac{1}{2}\sum m_i \vec{V}_i'^2 + U = \frac{MV_C^2}{2} + E_{int} \qquad (2.16)$$

3.2– انحفاظ العزم الزاوي :

إن تناحي الفضاء الإقليدي، عدم وجود اتجاه مفضل فيه؛ وبالتالي عدم توقف الخواص الميكانيكية للنظمة على اختيار اتجاه المحاور المتعامدة التي يتألف منها المقرن الغاليلي، أو على تدوير النظمة الميكانيكية المعزولة ككل زاوية $\vec{\delta\theta}$ لامتناهية في الصغر حول محور ما. ستتغير كل متجهة من المتجهات $\vec{r}_i$، $\vec{V}_i$ بالمقدار

$$\delta\vec{r}_i = \vec{\delta\theta} \times \vec{r}_i \quad , \quad \delta\vec{V}_i = \vec{\delta\theta} \times \vec{V}_i \qquad (2.17)$$



حيث حسبنا الشعاعات المتجهة والسرع انطلاقاً من مبدأ O.

ويتغير اللاغرانجي L نتيجة هذه التغيرات بالمقدار

$$\delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \delta \vec{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \vec{V}_i} \delta \vec{V}_i \right)$$

وباستعمال معادلات الحركة "(1.12)

$$= \sum_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{V}_i} \cdot \vec{\delta\theta} \times \vec{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \vec{V}_i} \cdot \vec{\delta\theta} \times \vec{V}_i \right)$$

إن $\frac{\partial L}{\partial \vec{V}_i} = \vec{p}_i$ وباستعمال خواص الجداء المختلط نضع $\vec{\delta\theta}$ خارج إشارة الجمع

$$= \vec{\delta\theta} \cdot \left(\sum_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} + \vec{V}_i \times \vec{p}_i \right)$$

$$\delta L = \vec{\delta\theta} \cdot \frac{d}{dt} \left(\sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \right)$$

يجب أن يكون هذا التغير مساوياً للصفر كي لا تتغير الخواص الميكانيكية للنظمة المعزولة وبالتالي فإن المقدار المنحفظ هو

$$\vec{M}_o = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \qquad (2.18)$$

نسمي هذا المقدار العزم الزاوي للنظمة وهو يساوي مجموع العزوم الزاوية لجسيمات النظمة، فهو كالاندفاع جمعي.

وهكذا نكون قد حصلنا على سبعة مقادير فيزيائية منحفظة عندما تكون النظمة الميكانيكية معزولة هي سبعة تكاملات أولية : الطاقة وهي مقدار سلمي والاندفاع وهو مقدار متجه يكافؤ انحفاظه انحفاظ مركباته الثلاث وكذا العزم الزاوي وهو متجهة شبيهة.

ملاحظات :

1- يطلق أحياناً على العزم الزاوي اسم العزم الحركي أو العزم فقط؛ لكننا نفضل إضافة صفة الزاوي للتذكير بانحفاظه في الدورانات كما فضلنا إضافة صفة خطي إلى الاندفاع للتذكير بانحفاظه في الانسحابات (في الجمع الخطي للمتجهات).

2- عرفنا العزم الزاوي خلافاً للاندفاع بالنسبة لنقطة معينة O. لننظر كيف نعبر عنه بالنسبة لنقطة O' حيث $\vec{a} = \overline{OO'}$ و $\vec{r}_i = \vec{r}_i{}' + \vec{a}$:

$$\vec{M}_o = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i (\vec{r}_i{}' + \vec{a}) \times \vec{p}_i$$
$$= \sum_i \vec{r}_i{}' \times \vec{p}_i + \vec{a} \times \vec{P}$$

حيث $\vec{P}$ هو الاندفاع الكلي

$$\vec{M}_o = \vec{M}_{o'} + \vec{a} \times \vec{P} \qquad (2.19)$$

لنفرض أن O' تنطبق على مركز كتلة النظمة ونكتب انطلاقاً من (2.14)

$$\vec{M}_o = \vec{M}_C + \overline{OC} \times \vec{P} = \vec{M}_C + \overline{OC} \times M\vec{V}_C \qquad (2.19)'$$

ونعبر عن ذلك بقولنا إن العزم الزاوي في نقطة O يساوي لمجموع العزم الزاوي محسوباً بالنسبة لمركز الكتلة وعزم الاندفاع الكلي $\vec{P}$ الموجود في مركز الكتلة.

نسمي في كثير من الأحيان المقادير المحسوبة بالنسبة لمركز الكتلة المقادير الذاتية.

3- إن انحفاظ كل مركبات الاندفاع الخطي والعزم الزاوي لا يصح إلا في حالة الجمل المعزولة، إلا أنه من الممكن في بعض الحالات انحفاظ بعض المركبات. فإذا كانت الطاقة الكامنة مستقلة عن إحدى الإحداثيات x^i $\frac{\partial U}{\partial x^i} = 0$ فإن $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x^{i'}} = 0$ و $\frac{\partial L}{\partial x^{i'}} = p_{x^i} =$ ثابت . إن الاستقلال عن إحدى الإحداثيات x^i يكافؤ عدم تغير خواص النظمة الميكانيكية نتيجة الانسحابات على المحور Ox^i ويبقى مسقط الاندفاع الخطي على هذا المحور ثابتاً. نقول بصورة عامة عن إحداثية عامة إنها دوارية أو مهملة إذا لم يتوقف اللاغرانجي عليها، وفي هذه الحالة فإن الاندفاع العام $p_i = \frac{\partial L}{\partial q^i}$ يبقى ثابتاً. وكذلك فإن دوران النظمة غير المعزولة حول محور تناظر لا يغير من خواصها الميكانيكية، وهكذا فإن مسقط العزم الزاوي على هذا المحور يبقى ثابتاً. وبصورة خاصة عندما يتوقف الحقل الخارجي على نقطة ثابتة في هذا الفضاء، عندما تكون الطاقة الكامنة تابعة للمسافة عن هذه النقطة، أي عندما يكون الحقل مركزياً كحقل الجاذبية مثلاً، فإن كل محور مار من هذه النقطة الثابتة هو محور تناظر وبالتالي فإن مركبات العزم الزاوي الثلاث منحفظة و $\vec{M} =$ ثابت وهو ما رأيناه في الفصول السابقة حيث رمزنا للعزم الزاوي بـ $\vec{L}$.

4- لنحسب اللاغرانجي L في الإحداثيات الأسطوانية $x_i = r_i\cos\varphi_i$ ، $y_i = r_i\sin\varphi_i$ و z_i. إنه

$$L = \frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\dot{r}_i^2 + r_i^2\dot{\varphi}_i^2 + \dot{z}_i^2\right) - U(r_i, \varphi_i, z_i) \quad (2.20)$$

ومن جهة أخرى فإن مسقط العزم الزاوي الكلي على المحور Oz هو

$$M_z = \sum_i m_i(x_i\dot{y}_i - y_i\dot{x}_i) = \sum_i m_i r_i^2\dot{\varphi}_i \quad (2.21)$$

وبمقارنة هاتين العلاقتين نجد أن

$$M_z = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} \quad (2.22)$$

أي أن مسقط العزم الزاوي على Oz هو الاندفاع – العزم – المقابل للمتغير الزاوي φ حسب التعريف 5.

5- لنفرض أن اللاغرانجي تابع صراحة للزمن، وليس ضمنياً بواسطة $q^i(t)$ و $\dot{q}^i(t)$، أي أن $\frac{\partial L}{\partial t} \neq 0$. لم تعد العلاقة (2.3) صحيحة ولم تعد الطاقة منحفظة. نكتب العلاقات "(2.3) على الشكل

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right) + \frac{\partial L}{\partial t}$$

و(2.4) على الشكل

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - L\right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (2.4)_1$$

ولكن المقدار بين القوسين هو الطاقة الكلية حسب (2.6)

$$\frac{d}{dt}(T + U) = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (2.6)_1$$

أي أن الطاقة لم تعد ثابتة. إن اعتماد اللاغرانجي صراحة على t هو عبر الطاقة الكامنة $U(q^i, t)$ وبالتالي فإن $\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$ ونكتب العلاقة السابقة على الشكل

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \frac{\partial U}{\partial t} \quad (2.6)'_1$$

أما إذا تبع الكمون للسرع العامة، فإن اتباع نفس المحاكمة انطلاقاً من (2.4) حيث نضع

$$\sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i = 2T$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - \frac{\partial U}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - L\right) = \frac{d}{dt}\left[(T + U) - \sum_i \frac{\partial U}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right] = 0$$

يعطينا

$$T + U - \sum \dot{q}^k \frac{\partial U}{\partial \dot{q}^k} = \text{ثابتـــــة} \quad (2.6)_2$$

6- مثال : حركة الدوامة المتناظرة في حقل الثقالة.

سنتابع وضع نقطة فوق المتغير للإشارة إلى اشتقاقه بالنسبة للزمن.

إن الطاقة الحركية هي حسب العلاقات a ، b ، c في (5. §3.1)

$$T = \frac{I_1}{2}\left(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\dot\psi^2\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot\varphi + \cos\theta\dot\psi\right)^2 \qquad (2.23)$$

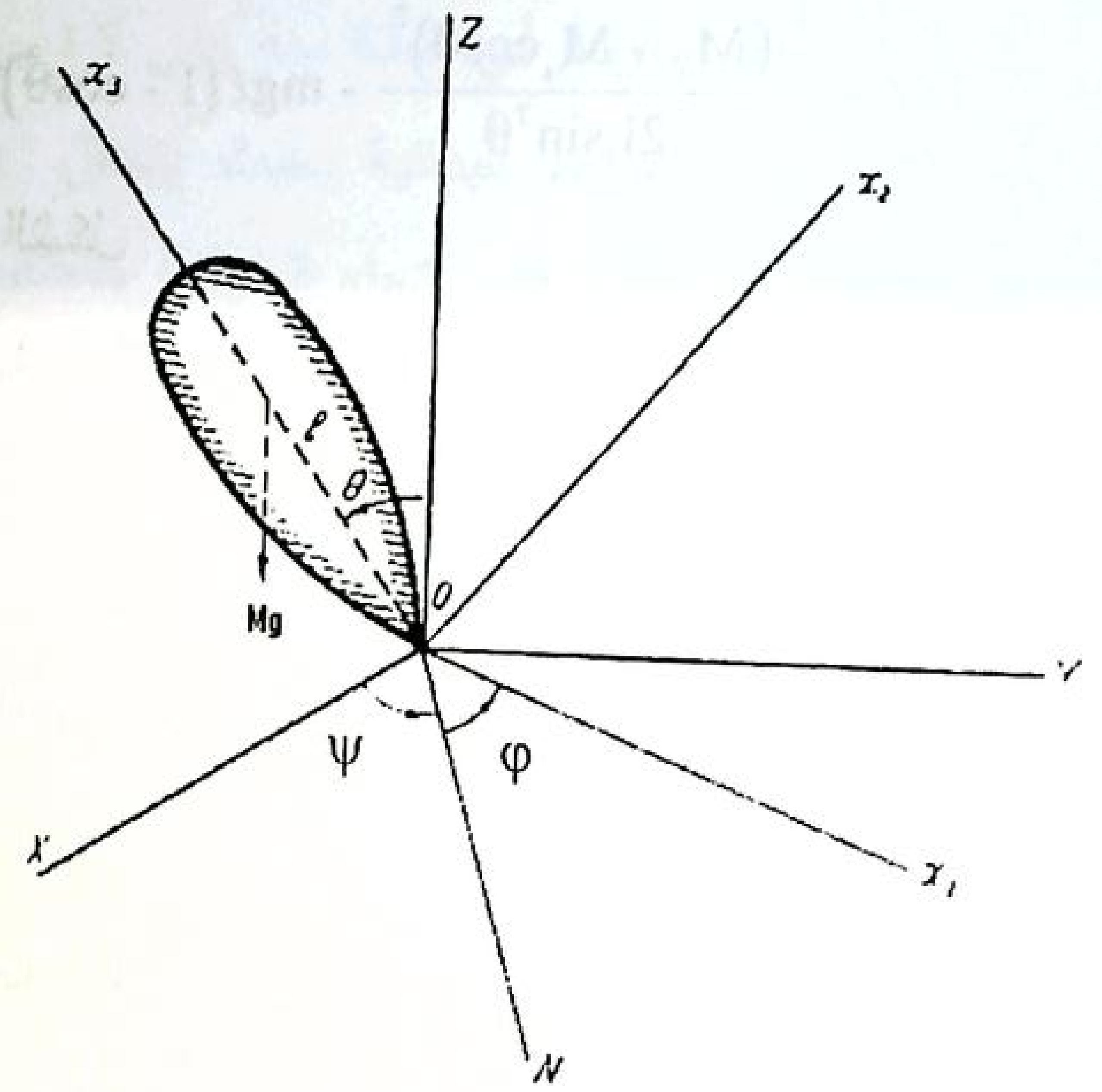
أما الطاقة الكامنة هي $U = -mg\ell\cos\theta$ حيث $\ell = OG$ و $\ell\cos\theta$ هو ارتفاع مركز الكتلة، الشكل.5.
ولاغرانجي هذه الدوامة هو

$$L = \frac{I_1}{2}\left(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\dot\psi^2\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot\varphi + \cos\theta\dot\psi\right)^2 - mg\ell\cos\theta \qquad (2.23)'$$

إن الإحداثياتين ψ و φ دوريتان وبالتالي فإن المقدارين التاليين منحفظان – الاندفاعين أو العزمين العامين –

$$P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = I_3\left(\dot\varphi + \cos\theta\dot\psi\right) = M_z \qquad (2.24)$$

$$P_\psi = \frac{\partial L}{\partial\dot\psi} = I_1\sin^2\theta\dot\psi + I_3\cos\theta\left(\dot\varphi + \cos\theta\dot\psi\right) = M_Z \qquad (2.25)$$



الشكل.5

تعطينا هاتان العلاقتان

$$\begin{cases} I_3\left(\dot\varphi + \cos\theta\dot\psi\right) = M_z \\ I_1\sin^2\theta\dot\psi = M_Z - M_z\cos\theta \end{cases} \qquad (2.26)$$

لا يبقى لدينا إلا معادلة لاغرانج الثالثة

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = \frac{\partial L}{\partial\theta} \qquad (2.23)''$$

أي بعد حذف $\dot\psi$ و $\dot\varphi$ بفضل العلاقتين (2.26). لدينا

$$I_1\ddot{\theta} = I_1\sin\theta\cos\theta\dot{\psi}^2 - I_3(\dot{\varphi} + \cos\theta\dot{\psi})\sin\theta\dot{\psi} + Mg\ell\sin\theta$$

$$= \frac{M_Z - M_z\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}\left\{I_1\sin\theta\cos\theta\left[\frac{M_Z - M_z\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}\right] - M_z\sin\theta\right\} + Mg\ell\sin\theta$$

$$I_1\ddot{\theta} = \frac{(M_Z - M_z\cos\theta)(M_Z\cos\theta - M_z)}{I_1\sin^2\theta} + mg\ell\sin\theta \qquad (2.23)'''$$

لسنا بحاجة لمكاملة هذه العلاقة ولكننا سنحسب الطاقة الكلية المنحفظة بدليل الثابتتين الأخريين M_z و M_Z بحذف $\dot{\psi}$ و $\dot{\varphi}$ المعلومتين في (2.26) من الطاقة الحركية (2.23) فنحصل على

$$\frac{I_1}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \left(\frac{M_Z - M_z\cos\theta}{I_1\sin\theta}\right)^2\right) + \frac{M_z^2}{2I_3^2} + mg\ell\cos\theta = E \qquad (2.27)$$

نسمي E' المقدار

$$E' = E - \frac{M_z^2}{2I_3^2} - mg\ell$$

والكمون الفعال U_{eff} المقدار

$$U_{eff} = \frac{(M_Z - M_z\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} - mg\ell(1 - \cos\theta)$$

نكتب هذه الطاقة E' على الشكل

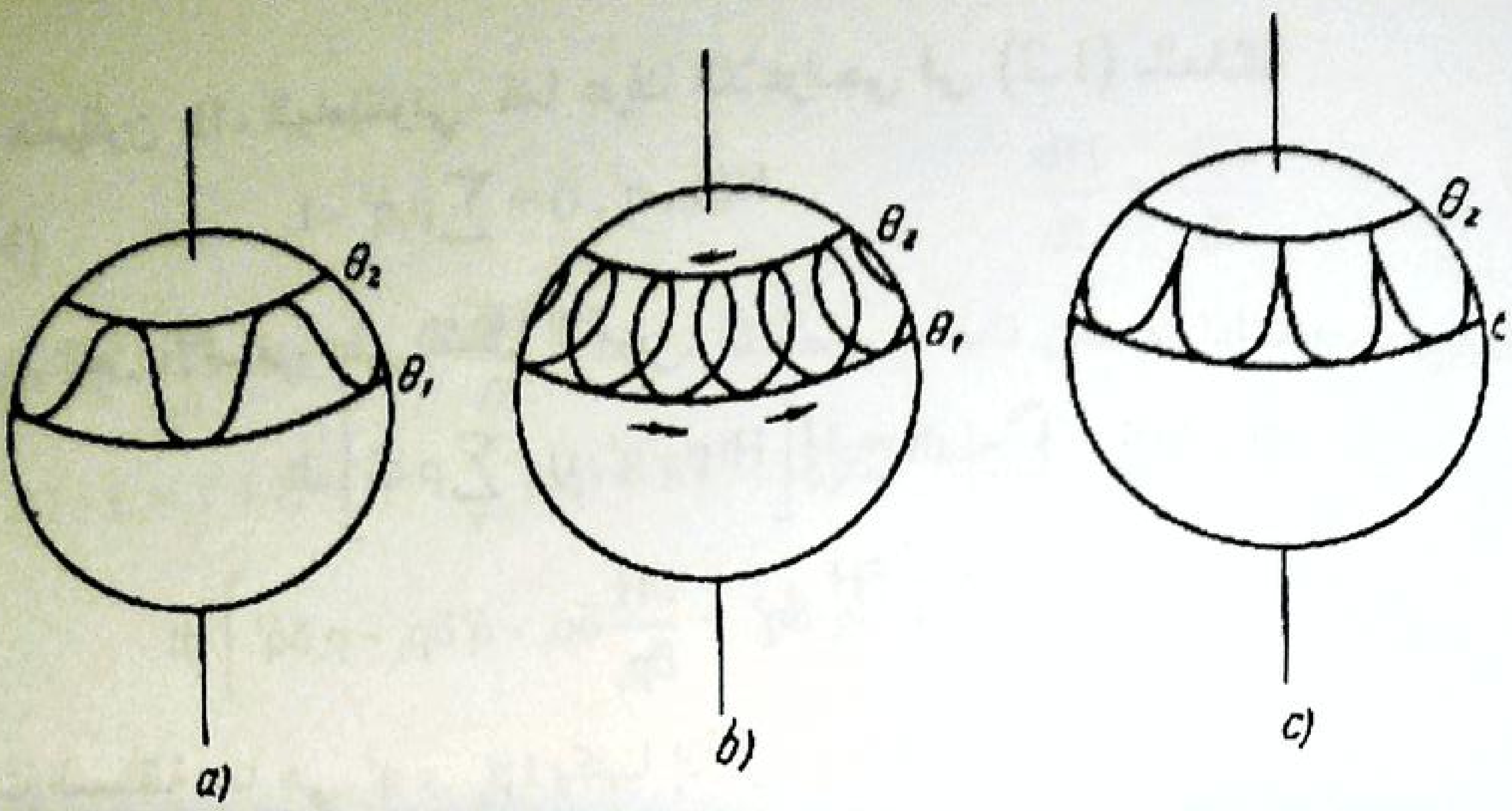
$$E' = \frac{I_1}{2}\theta'^2 + U_{eff}(\theta) \qquad (2.28)$$

ونحصل على الزمن بالتكامل الإهليلجي لـ (2.28)

$$t = \int\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{I_1}(E' - U_{eff}(\theta))}}$$

تحل هذه المعادلة بوضع $\cos\theta = u$ والحل طويل ومعقد ولذا فسنكتفي هنا بدارسة الاتجاه العام. يحدد الشرط $E' \geq U_{eff}^{(\theta)}$ مجال تغير θ. يتناهى الكمون الفعال إلى ∞ من أجل $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ ويمر بحد أدنى بين هاتين القيمتين. ولذا فإن للمعادلة $E' = U_{eff}$ جذرين يحددان الزاويتين الحديتين θ_1 و θ_2، زاويتي ميل محور الدوامة Oz بالنسبة للمحور الشاقولي OZ التي تنعدم فيهما السرعة الزاوية θ'. لنفرض أن الشروط البدائية هي $\theta_2 > \theta_o$. ستبقى والحال هذه إشارة المقدار $M_Z - M_z\cos\theta$ على حالها وبالتالي إشارة

$$\dot{\psi} = \frac{M_Z - M_z\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}$$



الشكل.6a الشكل.6b الشكل.6c

يطوف محور الدوامة طوافاً مطرداً حول المحور OZ كما في حال الدوامة المتناظرة الحرة ولكنه يتمايل في الوقت ذاته بين الزاويتين θ_1 و θ_2 بحيث ترسم أي نقطة منه على كرة مركزها O – رأس الدوامة – الخط المتموج، الشكل.6a. أما إذا كانت الشروط البدائية بحيث يتحقق $\theta_1 < \theta_0 < \theta_2$ فإن $\dot\psi$ تغير إشارتها عندما تصبح $M_Z - M_z\cos\theta = 0$ وهكذا فإن اتجاه الطواف متعاكس على الدائرتين الحديتين بحيث ترسم نقطة الدوامة سابقة الذكر على الدائرة شكلاً عروياً، الشكل.6b. وأخيراً فإذا كان $M_Z - M_z\cos\theta = 0$ من أجل θ_1 أو θ_2 فإن ψ' و θ' منعدمتان في آن واحد وترسم نقطة محور الدوامة، الشكل.6c، $M_Z - M_z\cos\theta_2 = 0$.

3. المعادلات القانونية

1.3– معادلات هاميلتون Hamilton :

تلعب الهيكلة اللاغرانجية دوراً أساسياً في كل الفيزياء ويشكل البحث الشاق عن اللاغرانجي الذي يخضع له فرع من فروع الفيزياء، أحد أنواع التفاعلات مثلاً، منطلقاً للنظريات الجديدة. إلا أن الهيكلة اللاغرانجية ليست الوحيدة الممكنة، فهناك صياغة أخرى، هيكلة أخرى للميكانيك التقليدي، ترتكز على المتغيرات q^i و p_i، على الإحداثيات العامة والاندفاعات – العزوم – العامة، عوضاً عن q^i و $\dot q^i$ وعلى الطاقة كدالة بـ q^i و p_i لإيجاد معادلات الحركة؛ وهي 2n معادلة من الدرجة الأولى كما سنرى، نستعيض بها عن الـ n معادلة من الدرجة الثانية التي استنبطناها من الهيكلة اللاغرانجية. كما أن لهذه الهيكلة مزايا عديدة أخرى ستظهر لنا شيئاً فشيئاً لعل أهمها كونها تتيح الانتقال الطبيعي من الميكانيك التقليدي إلى الميكانيك الكمومي.

نعرف دالة هاميلتون H، الهاميلتوني، كما عرفنا اللاغرانجي في (1.2) بالعلاقة

$$H(p_i, q^i, t) = \sum_i p_i \dot{q}^i - L \qquad (3.1)$$

وسنكتب مبدأ الفعل الأصغر على الشكل التالي

$$0 = -\delta S = \int_{t_1}^{t_2} -L dt = \delta \int \left[H(p_i, q^i, t) - \sum_i p_i \dot{q}^i \right] dt \qquad (3.1)'$$

$$= \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial H}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \dot{q}^i \delta p_i - p_i \delta \dot{q}^i \right) dt$$

إن المتغيرات المستقلة هنا هي q^i و p_i؛ يكفينا إذاً أن نكامل الحد الأخير بالتجزئة كما فعلنا في '(1.7)

$$-\int_{t_1}^{t_2} p_i \delta \dot{q}^i dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \delta q^i dt - \left[p_i \delta q^i \right]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \delta q^i dt$$

لنحصل على

$$0 = \sum_i \int \left[\left(\frac{\partial H}{\partial q^i} + \dot{p}_i \right) \delta q^i + \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} - \dot{q}^i \right) \delta p_i \right] dt$$

وبما أن δq^i و δp_i هي $2n$ متغيراً مستقلاً فإن[4]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial q^i} + \dot{p}_i = 0 \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_i} - \dot{q}^i = 0 \end{cases} \quad \text{من أجل كل } i: \; i = 1, 2, \ldots n \qquad (3.2)$$

نكتب هذه المعادلات من الدرجة الأولى على الشكل

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}^i \\ \dfrac{\partial H}{\partial q^i} = -\dot{p}_i \end{cases} \qquad (3.3)$$

إنها معادلات الحركة – $2n$ معادلة – وتعرف باسم معادلات هاميلتون – التي تحل محل معادلات لاغرانج كما تعرف أيضاً باسم المعادلات القانونية نظراً لبساطة شكلها ولتناظرها (مع إشارة ناقص) بالنسبة للمتغيرات المستقلة q^i و p_i.

لنحسب مشتق الهاميلتوني بالنسبة للزمن

$$\frac{dH(q^i, p_i, t)}{dt} = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q^i} \dot{q}^i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial t}$$

ويأخذ (3.3) بعين الاعتبار

$$= \sum_i \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

---

[4] انظر الهامش 2 ونذكر أن $d\alpha = \eta(x) d\alpha$ $\;\delta y = \left(\dfrac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0}$ (1.10).

ومنه

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \qquad (3.4)$$

أي أن الهاميلتوني منحفظ إذا لم يكن تابعاً صراحة للزمن $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Leftarrow \frac{dH}{dt} = 0$. إنه قانون انحفاظ الطاقة لأن الهاميلتوني تعريفاً هو الطاقة الكلية : $\sum_i p_i \dot{q}^i = 2T$ ؛ $2T - L = T + U = H$. رأينا في الملاحظة 5 ، (2.6) أن $\frac{d}{dt}(T + U) = -\frac{\partial L}{\partial t}$ أي أن

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{p,q} = -\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{q,\dot{q}} \qquad (3.5)$$

وضعت للتنبية أن اشتقاق H صراحة بالنسبة للزمن هو من أجل الإحداثيات والاندفاعات الثابتة بينما اشتقاق L هو من أجل الإحداثيات والسرع الثابتة.

تعريف 7 :

نسمي الفضاء المتجهي ذي الـ 2n بعداً – الإحداثيات والاندفاعات العامة – فضاء الطور. نصف أبعاده هو فضاء الهيئة، نرمز له بـ Q، والنصف الآخر هو ثنوي فضاء الهيئة – لأن الاشتقاق بالنسبة للزمن هو مؤثر خطي لفضاء ما في حقل الأعداد السلمية –، وبالتالي فإن P متجهة تنتمي إلى Q' ثنوي Q. إنها الصيغة الخطية لمشتقات الإحداثيات $P(Q) = \varepsilon^i p_i(q) = \varepsilon^i m_i \frac{dq^i}{dt}$. وهذا ما دفعنا إلى كتابة إحداثياتها بدليل تحت الرمز P (انظر ملحق الفصل الخامس). إن Q هو ثنوي P كما يبدو جلياً في العلاقة الأولى من معادلات هاميلتون.

2.3– لامات بواسون Brackets, Crochets (Poisson) :

لتكن لدينا دالة ما f(q, p, t) تابعة لمتجهة من فضاء الطور وللزمن. نكتب مشتقها بالنسبة للزمن على الشكل

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i \right) \qquad (3.6)$$

ونفترض أن p و q تحققان معادلات الحركة (3.3) بحيث تصبح (3.6)

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i} \right) \qquad (3.7)$$

نسمي المقدار $\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \right)$ لامتي بواسون لـ H و f ونرمز له بـ

$$\{H, f\}_{p,q} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) \tag{3.8}$$

إن f تكامل أولي من تكاملات الحركة $\frac{df}{dt} = 0$، إذا تحقق الشرط

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} = 0 \tag{3.9}$$

وإذا كان هذا التكامل الأولي لا يتوقف صراحة على الزمن فإن لامتي بواسون مقدار منعدم

$$\{H, f\} = 0 \tag{3.9'}$$

تعريف 8 :

نسمي لامتي بواسون لدالتين لا على التعيين f و g تابعتين لـ (q, p, t) المقدار

$$\{f, g\}_{p,q} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) \tag{3.10}$$

نستخلص بسهولة من هذا التعريف الخواص التالية للامات بواسون

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \tag{3.10$_1$}$$

وهي خاصة تضاد التناظر

$$\{f, cte\} = 0 \tag{3.10$_2$}$$

$$\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\} \tag{3.10$_3$}$$

$$\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + \{f_1, g\} f_2 \tag{3.10$_4$}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\} \tag{3.10$_5$}$$

$$\{f, p_i\} = -\frac{\partial f}{\partial q^i} \tag{3.10$_6$}$$

$$\{f, q^i\} = \frac{\partial f}{\partial p_i} \tag{3.10$_7$}$$

$$\{q^i, q^j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \tag{3.10$_8$}$$

$$\{p_i, q^j\} = \delta_i^j \tag{3.10$_9$}$$

مبرهنة 1 : متطابقة جاكوبي Jacobi

إن

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \tag{3.10$_{10}$}$$

لنلاحظ بداية أن لامتي بواسون {f, g} مثلاً هي دالة متجانسة ثنائية الخطية بالمشتقات الأولى لـ f و g وأن أخذ لامة هذه النتيجة مع h سيعطينا دالة متجانسة خطية بالمشتقات الثانية لـ f و g وينطبق

الأمر نفسه على كل حدود $(3.10)_{10}$. وهكذا فإن متطابقة جاكوبي دالة خطية ومتجانسة بالمشتقات الثانية لـ f، g، h. يمكننا حساب الطرف الأول في المتطابقة انطلاقاً من التعريف والتحقق من انعدامه إلا أن هذا الحساب طويل وممل. يكفينا مثلاً أن نبرهن انعدام كل الحدود بالمشتق الثاني لإحدى هذه الدلات لـ f مثلاً حتى نتأكد من انعدامه بالنسبة للدالتين الأخريين بتطبيق نفس المحاكمة وبالتالي من صحة المتطابقة. تظهر مشتقات الدرجة الثانية بـ f في الحدين $\{g, \{h, f\}\}$ و $\{h, \{f, g\}\}$. لنكتب هذا المجموع بالاستعانة بـ $(3.10)_1$ على الشكل

$$\{g, \{h, f\}\} - \{h, \{g, f\}\} \tag{3.11}$$

ولنستعمل المؤثرين التفاضليين الخطيين على دالة ما φ المعرفين بـ

$$D_1(\varphi) = \{g, \varphi\} \quad , \quad D_2(\varphi) = \{h, \varphi\}$$

لتصبح العلاقة (3.11) على الشكل

$$D_1\left(D_2(f)\right) - D_2\left(D_1(f)\right) \tag{3.11'}$$

ونبرهن على عدم احتواء هذه العلاقة على أي مشتق ثانٍ لـ f. نرمز لهذين المؤثرين الخطين بـ $D_1 = \sum_{k=1}^{N} \xi^k \frac{\partial}{\partial x^k}$، $D_2 = \sum_{k=1}^{N} \eta^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ حيث N أبعاد الفضاء – فضاء الطور هنا – و x^k إحداثيات نقطة فيه. إن

$$D_1 D_2 = \sum_{k,\ell} \xi^k \eta^\ell \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^\ell} + \sum_{k,\ell} \xi^k \frac{\partial \eta^\ell}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^\ell}$$

$$D_2 D_1 = \sum_{k,\ell} \eta^k \xi^\ell \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^\ell} + \sum_{k,\ell} \eta^k \frac{\partial \xi^\ell}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^\ell}$$

والفرق بينهما مطبقاً على f لا يحتوي على أي مشتق ثانٍ إنه

$$\left(D_1 D_2 - D_2 D_1\right) f = \sum_{k,\ell} \left(\xi^k \frac{\partial \eta^\ell}{\partial x^k} - \eta^k \frac{\partial \xi^\ell}{\partial x} \right) \frac{\partial f}{\partial x^\ell}$$

يصح الأمر ذاته بتطبيق D_1، D_2 على h مع g و f وأخيراً على g مع f و h لنتحقق من انعدام كل الحدود بالمشتقات الثانية لـ h ولـ g ونكون بذلك قد برهنا متطابقة جاكوبي.

<u>**مبرهنة 2**</u> : (بواسون)

إذا كانت الدالتان f و g تكاملين أوليين فإن لامة بواسون $\{f, g\}$ هي أيضاً تكامل أولي.

يعتمد البرهان مباشرة على متطابقة جاكوبي في حالة عدم توقف f و g صراحة على الزمن. لدينا

$$\{H, \{f, g\}\} + \{f, \{g, H\}\} + \{g, \{H, f\}\} = 0 \tag{3.12}$$

وبما أن الحدين الأخيرين معدومان فرضاً نظراً لـ '(3.9) فإن الحد الأول معدوم أيضاً ومنه النتيجة. أما عندما تكون الدالتان f و g تابعتين صراحة للزمن فإن (3.7) تعطينا

$$\frac{d}{dt}\{f, g\} = \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} + \{H, \{f, g\}\}$$

ومن $(3.10)_5$ و (3.12)

$$= \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\} - \{f, \{g, H\}\} - \{g, \{H, f\}\}$$

ومن $(3.10)_1$

$$= \left\{\frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t} + \{H, g\}\right\}$$

إن الطرف الأول بين لامتي الحد الأول والطرف الثاني بين لامتي الحد الثاني منعدمان حسب (3.9) ومنه

$$\frac{d}{dt}\{f, g\} = 0$$

وهو المطلوب برهانه.

<u>ملاحظة :</u>

إن تطبيق مبرهنة بواسون لا يعطينا بالضرورة تكاملات أولية جديدة، لأننا نعلم أن عددها محدود، $(2n - 1)$، حيث n عدد درجات الحرية. إن ما نحصل عليه من مبرهنة بواسون في الحالات المفيدة هو دالة بالتكاملات الأولية f و g.

3.3– التحويلات القانونية :

رأينا أن الصياغة اللاغرانجية للميكانيك لا تأخذ بعين الاعتبار إلا عدد درجات الحرية لمجموع جزيئات – نقاط – النظمة الميكانيكية، وليس بالضرورة كل الإحداثيات، الديكارتية أو غيرها. ولا تنظر بالتالي إلى النظمة الميكانيكية إلا كنقطة في فضاء الهيئة $q = (q^1, \dots q^n; t)$. يمكن تغيير القاعدة في هذا الفضاء والانتقال من جملة محاور متعامدة تعرف الإحداثيات فيها بـ $q^1 \dots q^n$ إلى جملة أخرى تعرف الإحداثيات فيها بـ

$$Q^i = Q(q^1, \dots q^n; t) \qquad (3.13)$$

أو اختصاراً

$$Q = Q(q; t) \qquad (3.13)'$$

لا يغير هذا التحويل، المسمى أحياناً تحويلاً نقطياً، شكل معادلات الحركة اللاغرانجية (1.12) ومعادلات الحركة الهاميلتونية (3.3). إلا أنه من الممكن أيضاً النظر إلى النظمة الميكانيكية كنقطة في فضاء الطور ذي الـ 2n بعداً والحصول بالانتقال من جملة محاور في هذا الفضاء إلى جملة أخرى على

$$Q^i = Q^i(q, p; t) \quad ; \quad P_i = P_i(q, p, t) \qquad (3.14)$$

إن هذا التحويل بـ 2n بعداً أغنى من التحويل السابق بـ n بعداً في فضاء الهيئة. وينظر إليه كإحدى ميزات الصياغة الهاميلتونية في الميكانيك. إلا أننا لسنا واثقين في هذا التغيير من احتفاظ معادلات الحركة – المعادلات القانونية – (3.3) بشكلها ولذا

تعريف 9 :

نقول عن التحويلات (3.14) إنها تحويلات قانونية إذا وجدت نتيجة هذه التحويلات دالة $H'(Q, P)$ تحقق المعادلات القانونية

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H'}{\partial P_i} = \dot{Q}^i \\ \dfrac{\partial H'}{\partial Q^i} = -P_i \end{cases} \qquad (3.15)$$

وعلينا الآن إيجاد الشروط التي تجعل من تحويل ما في فضاء الطور تحويلاً قانونياً.

يجب أن تحقق الإحداثيات P_i و Q^i والدالة H' مبدأ الفعل الأصغر '(3.1) كما تحققه الإحداثيات p_i و q^i والدالة H. لنكتب هذا المبدأ مرتين إذاً على الشكل

$$\delta\int\left(\sum_i p_i dq^i - Hdt\right) = 0 \qquad (3.16)_1$$

$$\delta\int\left(\sum_i P_i dQ^i - H'dt\right) = 0 \qquad (3.16)_2$$

رأينا في دراستنا للهيكلة اللاغرانجية أن إضافة مشتق تام بالنسبة للزمن للاغرانجي لا يغير المعادلات التي يحددها الفعل الأصغر. ليكن $F(q, Q, t)$، التابع الأصلي ذا المشتق التام $\frac{dF}{dt}$. نكتب العلاقة بين المقدارين المكاملين في $(3.16)_{1,2}$ على الشكل

$$\sum_i p_i dq^i - Hdt = \sum_i P_i dQ^i - H'dt + dF \qquad (3.17)$$

تعريف 10 :

نسمي الدالة F التي تعين التحويل القانوني بالدالة المولدة للتحويل.

لدينا من (3.17)

$$dF = \sum p_i dq^i - \sum P_i dQ^i + (H' - H)dt \qquad (3.17)'$$

التي تبين أن

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q^i} \quad ; \quad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q^i} \quad ; \quad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} \qquad (3.18)$$

وهي علاقات تحدد الصلة بين المتغيرات القديمة (q, p) و الجديدة (Q, P).

لا شيء يمنع من كتابة الدالة المولدة بالمتغيرات (q, P) عوضاً عن المتغيرات q, Q، وهي كتابة مفيدة أحياناً. نستبدل بـ F الدالة الجديدة $\phi = F + \sum P_i Q^i$. لتأخذ العلاقة '(3.17) الشكل التالي

$$d\phi(q, P) = d\left(F + \sum P_i Q^i\right) = \sum p_i dq^i + \sum Q^i dP_i + (H' - H)dt$$

ولدينا هنا

$$\frac{\partial \phi}{\partial q^i} = p_i \quad ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial P_i} = Q^i \quad ; \quad H' = H + \frac{\partial \phi}{\partial t} \qquad (3.19)$$

ويمكن على نفس المنوال كتابة الدالة المولدة بدليل (p, Q) أو (p, P).

ملاحظات :

1- إن التقابل بين H' و H تقابل وحيد يعينه المشتق $\frac{\partial F}{\partial t}$ فإذا كانت الدالة F غير تابعة للزمن صراحة فإن $H' = H$. يعني ذلك أنه يكفينا للحصول على H' أن نستبدل بـ q و p في H تعبيريهما بدليل Q و P.

2- عرفنا الاندفاعات العامة – العزوم العامة في التعريف 2 على أنها مشتقات اللاغرانجي بالنسبة للسرع ورأينا، في (2.22) على سبيل المثال، أن هذا المشتق هو في واقع الأمر عزم زاوي. كما أشرنا في التعريف 7 إلى كون فضاء الاندفاعات هو ثنوي فضاء الهيئة – فضاء الإحداثيات – فهما فضاءان متكافئان جبرياً، وكل واحد منهما ثنوي الفضاء الآخر. كل هذا ينزع عن مفهوم الإحداثيات العامة والاندفاعات العامة صفاته البدائية كتعيين للوضع والاندفاع الخطي الفيزيائيين. وتأتي التحويلات القانونية لتوضيح هذا كله إذ إنها قادرة على تحويل الإحداثيات في نظمة متغيرات (q, p) إلى عزوم في نظمة متغيرات أخرى (Q, P) وبالعكس. يكفي لذلك أن نختار كدالة موالدة الدالة $F(q, Q) = \sum_i q^i Q^i$ فنحصل بتطبيق (3.18) على

$$P_i = -q^i \qquad \text{بينما} \qquad p_i = Q^i$$

ولذا فإنه من المفضل التخلي عن استعمال التعبيرين إحداثي واندفاع (q, p) والاكتفاء بالقول عن الأزواج (q^i, p_i) المحققة لمعادلة هاميلتون بالعزوم المترافقة.

مبرهنة 3 :

ليكن لدينا لامتا لابلاس لدالتين f و g : $\{f, g\}$. إن قيمة $\{f, g\}$ مستقلة عن الإحداثيات القانونية التي نستعملها لحسابها.

أو بتعبير آخر، يمكننا اعتبار f و g تابعتين للإحداثيات (p, q) وحساب قيمة $\{\,,\,\}$ بالاشتقاق بالنسبة لـ (P, Q) التي نحصل عليها بالتحويل القانوني ونرمز لذلك $\{\,,\,\}_{P,Q}$ أو بالعكس اعتبارهما تابعتين لـ (P, Q) وحساب قيمة الاشتقاق بالنسبة للإحداثيات الأولى $\{\,,\,\}_{p,q}$. أي أن

$$\{f, g\}_{p,q} = \{f, g\}_{P,Q} \tag{3.20}$$

هنا أيضاً يمكن التحقق من صحة هذه العلاقة بالحساب مباشرة باستعمال صيغ التحويل القانوني (3.18). إلا أننا نفضل استعمال المحاكمة التالية : إن الزمن وسيط في صيغ التحويل (3.18) أو (3.19) فإذا استطعنا برهان (3.20) عندما لا تتوقف الدالتان f و g صراحة على الزمن، فإنها صحيحة في كل الأحوال. لنتصور أن الدالة g هي دالة هاميلتون لنظمة ميكانيكية تخيلية؛ إن $\{g, f\} = \frac{df}{dt}$ في هذه الحالة حسب (3.9)، وبما أن مشتق f بالنسبة للزمن يتوقف على خواص الحركة (التخيلية) وحدها ولا يتوقف في حالة من الأحوال على اختيار المتغيرات (p, q) أو (P, Q) فإن (3.20) صحيحة.

ينتج من (3.20) و $(3.10)_{8,9}$ أن

$$\begin{cases} \{Q^i, Q^j\}_{p,q} = 0 \\ \{P_i, P_j\}_{p,q} = 0 \\ \{P_i, Q^j\}_{p,q} = \delta_i^j \end{cases} \tag{3.21}$$

لنلاحظ أنه يمكن اعتبار الحركة نفسها تحويلاً قانونياً. إنها الانتقال من $q(t)$ و $p(t)$ إلى $q(t+\tau)$ و $p(t+\tau)$ التابعة للعزوم المترافقة الأولى وللزمن τ (كوسيط). إنها تحويلات قانونية تعريفاً لإن العزوم الجديدة تحقق المعادلات القانونية ولا تختلف عن الأولى إلا باختلاف مبدأ قياس الزمن.

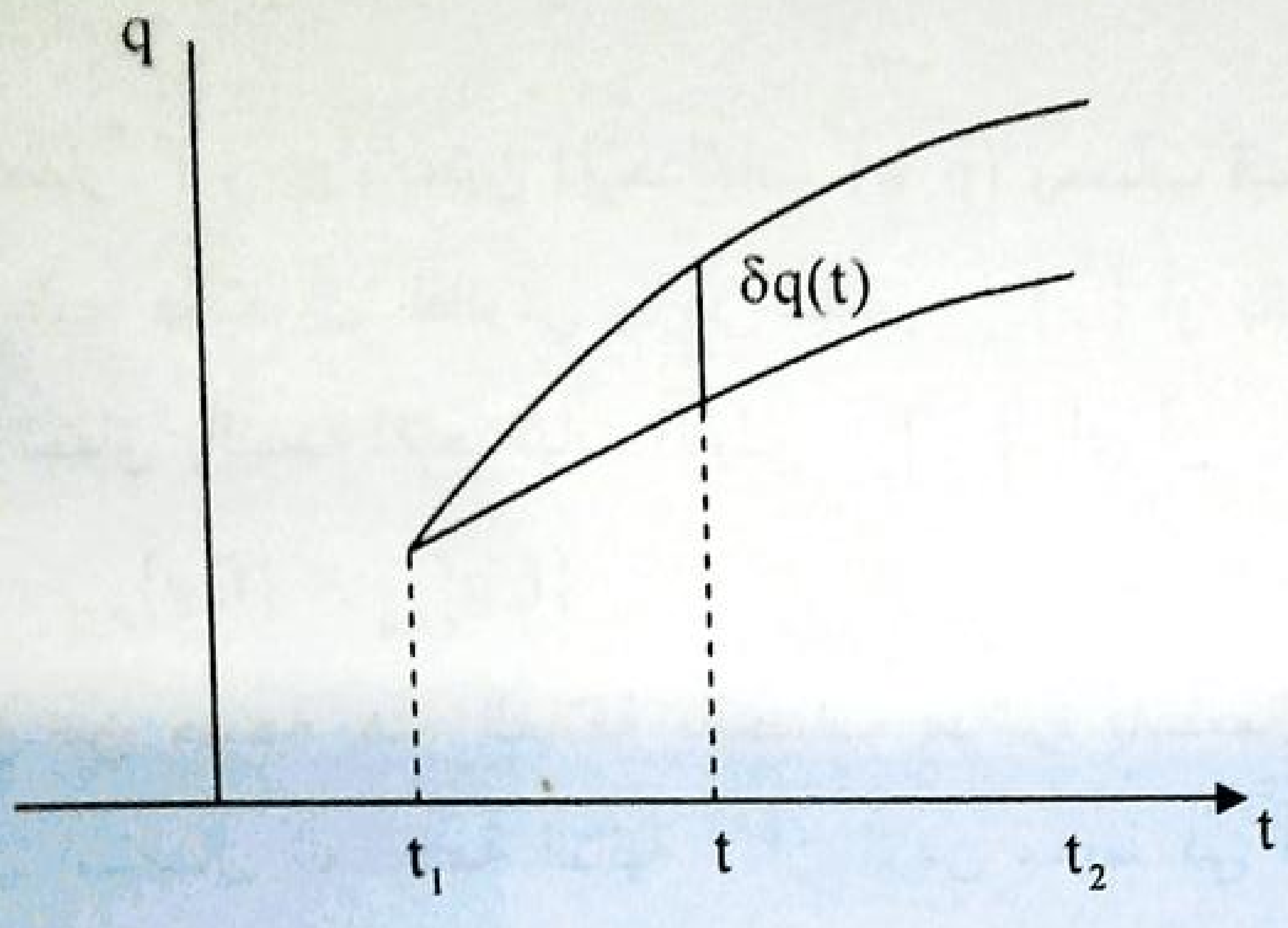
4.3- معادلة هاميلتون – جاكوبي :

لنعد إلى مبدأ الفعل الأصغر ولنكتب تغير الفعل S كما فعلنا في $(1.11)_L$ على الشكل

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^i} \right) \delta q^i dt + \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q^i} \delta q^i \right]_{t_1}^{t_2} \tag{3.11$_L$}$$

لقد حذفنا في $(1.11)_L$ القسم المكامل لأن كل δq^i معدومة فرضاً في النقطتين t_1 و t_2. وحصلنا على معادلات لاغرانج التي تحدد المسار الفعلي للنظمة الميكانيكية. سنتخلى الآن عن هذا الفرض لندرس

تغير الفعل بين مسارين فعليين يبدآن من نفس النقطة $q(t_1) = (q^1, \dots q^n)$ ولكنهما يصلان في لحظة ما t إلى نقطتين مختلفتين يفصلهما المقدار $\delta q(t) = (\delta q^1(t) \dots \delta q^n(t))$، الشكل.7.



الشكل.7

يقتصر تغير S على الحد الثاني من الطرف الثاني لأن كلا المسارين يحققان معادلات لاغرانج أي أن

$$\delta S = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i = \sum_i p_i(t)\, \delta q^i(t) \qquad (3.22)$$

وبما أن العلاقة بين الاشتقاق والتغير قد عرفت في العلاقة (1.7)

$$\delta S = \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha$$

نكتب من أجل المتجهة q، من أجل كل مركبة من مركباتها

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha = \frac{\partial S}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \alpha} d\alpha\Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial S}{\partial q}\delta q$$

ومنه بالمقارنة مع (3.22)

$$\frac{\partial S}{\partial q^i} = p_i \qquad (3.23)$$

ومن جهة أخرى فإن تعريف اللاغرانجي هو $\frac{dS}{dt} = L$، واعتبرنا في الحالة التي ندرسها هنا S تابعاً للإحداثيات وللزمن $S = S(q, t)$. لدينا إذاً

$$\frac{dS}{dt} = L = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q^i}\dot{q}^i = \frac{\partial S}{\partial t} + p_i \dot{q}^i$$

نكتب هذه العلاقة على الشكل

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_i p_i \dot{q}^i$$

إن الحد الثاني في الطرف الأيمن هو $2T$ نظراً لـ (2.5) ولتعريف الاندفاع العام $\left(p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)$ ومنه

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H \tag{3.24}$$

وهي معادلة هاميلتون جاكوبي. إن S تابع لـ q, t أي لـ $q(t_1)$ ، $q(t)$ ولـ t، أما الهاميلتوني فهو تابع لـ q, p, t أي لـ q و $\frac{\partial S}{\partial q}$ و t. نكتب (3.24) إذاً على شكل أكثر وضوحاً

$$\frac{\partial S(q,t)}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0 \tag{3.24'}$$

وإذا كان H مستقلاً عن الزمن فإن هذه المعادلة تعني أن S دالة خطية للزمن

$$S = at + b \tag{3.25}$$

حيث $H = -a$ ثابتة.

إن مكاملة المعادلة (3.24) هو إيجاد S بدليل q (n متغيراً) والزمن، وبدليل n ثابتة $c_1, \ldots c_n$ ، هي قيم إحداثيات q البدائية على سبيل المثال :

$$S = S(q, t, c_1 \ldots c_n) + \text{ثابتة}$$

يمكن أخذ H كمتغير عوضاً عن t والحصول على الزمن كمشتق لـ S بالنسبة لـ H

$$S = S(q, H, c_2 \ldots c_n) + \text{ثابتة}$$

و

$$\frac{\partial S}{\partial H} = t$$

لنكتب الآن بدليل (3.23) و (3.24) تفاضل S الكلي في اللحظة t والوضع $q(t)$ ، dS :

$$dS = \frac{\partial S}{\partial q'} dq' + \frac{\partial S}{\partial t} dt = p_i dq' - H dt \tag{3.26}$$

لنفرض الآن أن الإحداثيات q تتغير أيضاً (ومعها الزمن) في بدأ الحركة، فتغير S هو تبعاً لذلك الفرق بين تغيره في نهاية الحركة وبداية الحركة، كلاهما تعبر عنه (3.26). سنضع 2 للإشارة إلى الحالة النهائية و 1 إلى الحالة البدائية ونكتب

$$dS = p_i^{(2)} dq'^{(2)} - H^{(2)} dt^{(2)} - p_i^{(1)} dq'^{(1)} + H^{(1)} dt^{(1)} \tag{3.27}$$

تبين هذه العلاقة المهمة أن الحالة النهائية للنظمة الميكانيكية ليست دالة اعتباطية تابعة للحالة البدائية وإنما مقيدة بضرورة كون dS تفاضلاً كلياً.

تلعب معادلة هاميلتون جاكوبي دوراً مهماً في الضوء، فهي تعين انطلاقاً من (3.27) القوانين العامة التي تخضع لها حزمة من الجسيمات المنبعثة من نقطة ما من الفضاء والمنتشرة في وسط غير متجانس (الضوء الهندسي)؛ كما أن S = ثابتــــة في (3.24) تعين سطوح الموجة – جبهات الموجة – الضوئية وهي سطوح متوازية، كما تعين (3.23) الخطوط العمودية على هذه السطوح – أي اتجاه الانتشار في الضوء الهندسي.

5.3– مبرهنة ليوفيل Liouville :

تمهيد رياضي :

لنفرض أننا نريد حساب الحجم الذي يحدده السطح S المعرف بـ $z = f(x, y)$ وبمسقطه σ على المستوي x, y إنه التكامل الثنائي : $\iint f(x, y)dxdy$. نعلم أن عنصر السطح، جداء التفاضلين dx، dy هو طويلة المتجهة $\overline{dx} \times \overline{dy}$ بصورة عامة ويساوي للجداء $|dx||dy|$ عندما تكون المحاور متعامدة. كما أن اختيار اتجاه المحاور مفيد في كثير من الأحيان وأن من الأفضل والحال هذه، أياً كان الشكل الذي نكتب عليه عنصر السطح، أن نبقي في ذهننا أن عنصر السطح هو جداء متجه. لنتصور الآن أننا ننتقل من الإحداثيات الديكارتية إلى جملة إحداثيات أخرى، القطبية مثلاً θ، r، ونريد حساب التكامل الثنائي. نعلم أن عنصر السطح هنا هو rdrdθ وأن التكامل الثنائي يأخذ الشكل $\iint f(r, \theta)\, rdrd\theta$. يمكننا أن نحسب المتجهة ذات المركبتين dx، dy بدليل المتجهة ذات المركبتين dr، dθ. لدينا

$$dx = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta$$

$$dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta$$

أو

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix};$$

نسمي هذه المصفوفة D التي تحدد الانتقال من r، θ إلى x، y بالمصفوفة الجاكوبية. ومنها

$$dx\, dy = (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta)(\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta)$$

وبإهمال كل ما هو من الدرجة الثانية بـ dr و dθ

$$= r\cos^2\theta\, dr\, d\theta - r\sin^2\theta\, d\theta\, dr$$

وإذا كتبنا هذه العلاقة على شكل جداء متجه dx × dy؛ dr × dθ فإن dθ × dr = -dr × dθ،

$$dx \times dy = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) dr \times d\theta = r\, dr \times d\theta$$

وهكذا نرى أن الانتقال من عنصر السطح dx × dy إلى عنصر السطح "$\overline{dr} \times \overline{d\theta}$" هو بضرب الثاني بمعين المصفوفة الجاكوبية – مصفوفة الانتقال – الذي نرمز له بـ $|D|$ المساوي لـ r. ولدينا

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = \iint f(r, \theta)\, |D|\, dr\, d\theta = \iint f(r, \theta)\, r dr\, d\theta \qquad (3.28)$$

وعلى العكس فإن الانتقال من عنصر السطح "drdθ" إلى dxdy هو بضرب $\iint f(r, \theta)\, |D|\, dr\, d\theta$ بمعين مقلوب المصفوفة D $D^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}$: $|D^{-1}| = \frac{1}{r} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$. نفترض بطبيعة الحال أن معين المصفوفة D مختلف عن الصفر حتى يكون لها مقلوب.

$$\iint f(r, \theta)\, dr\, d\theta = \iint f(x, y) \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}}\, dx\, dy \qquad (3.28)'$$

لنفرض بصورة أعم أننا اخترنا الإحداثيات المنحنية $(v(x, y), u(x, y))$، أي إحداثيات منحنيين واقعين على السطح S ومتقاطعين في النقطة (x, y). لدينا هنا أيضاً

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \qquad (3.29)$$

و D هي المصفوفة الجاكوبية للانتقال من المتغيرين x، y إلى المتغيرين u، v. لدينا إذاً

$$\iint f(u, v)\, du\, dv = \iint f(x, y) \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} dx\, dy = \iint f(x, y)\, |D|\, dx\, dy \qquad (3.30)$$

يمكن متابعة نفس المحاكمة من أجل أي عدد من المتغيرات وبالتالي أي تكامل مضاعف وثلاثي، رباعي، الخ. بهذه المتغيرات، ومن أجل أي انتقال من جملة محاور إلى أخرى، وبصورة عامة من أجل أي تطبيق φ قابل للاشتقاق للفضاء المتجهي E^n في ذاته : $(X^1, X^2, \dots X^n) = \varphi(x^1, \dots, x^n)$ حيث φ متجهة مركباتها $\varphi^1(x^1, \dots, x^n)$، ... $\varphi^n(x^1, \dots, x^n)$. نكتب كما في (3.29)

$$\begin{pmatrix} dX^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ dX^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial \varphi^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ dx^n \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} dx^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ dx^n \end{pmatrix}$$

حيث D، المصفوفة الجاكوبية، ونكتب بالاستدلال الرجعي كما في (3.30)

$$\underbrace{\int \dots \int}_{n} f(X^1, \dots X^n)\, dX^1 \dots dX^n = \underbrace{\int \dots \int}_{n} f(x^1, \dots x^n)\, |D|\, dx^1 \dots dx^n \qquad (3.31)$$

حيث $|D|$ هو معين المصفوفة الجاكوبية والمسمى أيضاً بالمعين الدالتي.

إن العلاقة (3.31) هي العلاقة التي ستمكننا من البرهان على مبرهنة ليوفيل، إلا أننا نرى قبل صياغة المبرهنة ، الاستطراد قليلاً في مفهوم الاشتقاق.

اشتقاق تطبيق متصل لفضاء متجهي مُنظَم normed وتام complet[5] في آخر. لنرمز لهذين الفضائين بـ E^n و F^m.

[5] إن نظيم المتجهة ونرمز له بـ || || هو الذي يجعل من الفضاء فضاءً مترياً، يعرف المجموعات المفتوحة وجوار النقاط ويحدد مفهوم التطبيق المتصل؛ الفضاء التام هو الفضاء الذي تتقارب فيه كل متتاليات كوشي Cauchy. يطلق على فضاء منظم وتام اسم فضاء باناخ Banach. لن ننظر هنا إلا إلى الفضاءات منتهية الأبعاد.

تعريف 11 :

نقول عن تطبيق f لجزء مفتوح A من E $A \subset E$ في F إنه قابل للتفاضل في نقطة ما $x_o \ni A$ إذا وجد تطبيق خطي u لـ E في F ، $u : E \to F$ ، بحيث يكون التطبيق $x \to f(x_o) + u(x - x_o) = g(x)$ مماساً لـ f في النقطة x_o، أي بحيث يحقق النظيم $\|f(x) - g(x)\|$ العلاقة التالية

$$\lim_{\substack{x \to x_o \\ x \neq 0}} \frac{\|f(x) - f(x_o) - u(x - x_o)\|}{\|x - x_o\|} = 0$$

و u، إن وجد، فهو وحيد نسميه مشتق f أو المشتق الكلي لـ f في النقطة x_o. إن u ونرمز له بـ $f'(x_o)$ أو $Df(x_o)$ هو تطبيق خطي متصل لـ E^n في F^m. يمكن التعبير عنه ككل التطبيقات الخطية بمصفوفة $m \times n$، m سطراً و n عموداً، حيث m هي أبعاد F و n أبعاد E. ونكتب

$$Df_{|x_o} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{pmatrix}_{|x_o}$$

وهي مصفوفة $n \times n$ إذا كانت لـ E و F نفس الأبعاد n و $|D|$ هو الجاكوبي – المعين الدالتي. ليكن لدينا ثلاثة فضاءات منظمة وتامة E^n، F^m، G^p والتطبيق المركب :

$$\theta = \psi \circ \varphi : E^n \xrightarrow{\varphi} F^m \xrightarrow{\psi} G^p$$

حيث φ تطبيق قابل للتفاضل لـ $A \subset E^n$ في F^m و ψ تطبيق قابل للتفاضل باستمرار من $B \subset F^m$ حيث B مجموعة جزئية مفتوحة تحتوي $f(A)$ ، صورة A في F^m ، ومنه جداء المصفوفتين $D\theta = D\psi \circ D\varphi = D\psi(\varphi(x_o)) \circ D\varphi_{|x_o}$ أو $D\psi \circ D\varphi$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \theta^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \theta^1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial \theta^p}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \theta^p}{\partial x^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi^1}{\partial \varphi^1} & \cdots & \frac{\partial \psi^1}{\partial \varphi^m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial \psi^p}{\partial \varphi^1} & \cdots & \frac{\partial \psi^p}{\partial \varphi^m} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial \varphi^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^m}{\partial x^n} \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

إن $D\psi$ هي مصفوفة $p \times m$ و $D\varphi$ مصفوفة $m \times n$، فعدد أعمدة $D\psi$ يساوي عدد سطور $D\varphi$ وجداء المصفوفتين ممكن دوماً. ولدينا عنصر السطر i والعمود k في الطرف الأيسر

$$\frac{\partial \theta^i}{\partial x^k} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \psi^i}{\partial \varphi^j} \cdot \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^k} \quad (3.32)'$$

تشكل عناصر العمود $\frac{\partial \theta^i}{\partial x^k}$، k ثابتة، المشتق الجزئي لـ θ بالنسبة للمتغير k.

مبرهنة الدالات الضمنية :

نريد في هذا الاستطراد تعميم إمكانية كتابة الدالة بمتغيرين عدديين $f(x,y)$ إلى دالة بمتغير واحد x وذلك بإيجاد دالة g تعبر عن y بدليل x وكتابة $f(x,y)=f(x,g(x))$. يجب أن يكون المشتق الجزئي $\frac{\partial f}{\partial y}$ في النقطة x_o, y_o مختلفاً عن الصفر ونحصل على الدالة الضمنية الوحيدة القابلة للاشتقاق $g(x)$ ولدينا $\left.\frac{-\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}\right|_{x_o,y} = \left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=x_o}$. نقصد بـ $|_{x_o}$ الاشتقاق، أو قيمة الدالة من أجل القيمة المحددة للمتغير.

ليكن التطبيق $f : E^m \times F^n \to F^n$ لـ $n+m$ متغيراً، نرمز لمتجهات E^m بـ $x=(x^1 \ldots x^m)$ ولمتجهات F^n بـ $y=(y^1 \ldots y^n)$ ونكتب التطبيق $\left(f^1(x^1 \ldots x^m; y^1 \ldots y^n), f^2(x^1, x^2 \ldots x^m; y^1 \ldots y^n), \ldots f^n(x^1, \ldots x^m; y^1 \ldots y^n)\right)$ باختصار على الشكل $f(x,y)$. نفترض أن $(x,y) \in U \times V$، حيث U و V مجموعتان جزئيتان من E و F وأن التطبيق f قابل للاشتقاق باستمرار في $U \times V$. نفترض أن $f(x_o, y_o)=0$ من أجل النقطة $(x_o, y_o) \in U \times V$ وأن المشتق الجزئي لـ f بالنسبة للمتغير الثاني y، ونرمز له بـ $D_2 f$ مختلف عن الصفر في هذه النقطة

$$D_2 f = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial y^n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f^n}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial y^n} \end{pmatrix}\right|_{x_o, y_o} \neq 0$$

يوجد في هذه الحالة جوار $U_o \subset U$ للنقطة x_o يمكن معه أن نجد، من أجل كل جوار مفتوح مترابط (connexe) $w : U \supset U_o \supset w$، تطبيقاً g لـ w في F^n $y = g(x) : g^1(x^1, \ldots x^m) \ldots g^n(x^1 \ldots x^m)$ يحقق العلاقة $y_o = g(x_o)$ ومعها $f(x, g(x)) = \left((x^1, \ldots x^m); g^1(x^1 \ldots x^m); g^n(x^1 \ldots x^m)\right) f = 0$ من أجل كل $x \in w$. و g دالة قابلة للتفاضل باستمرار. لدينا هنا بالاشتقاق الجزئي لـ f بالنسبة لـ g

$$D_2 f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial g^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial g^n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f^n}{\partial g^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial g^n} \end{pmatrix}$$

لنطبق على f كتابع لـ $x \in w$، $x = x^1 \ldots x^m$ قانون التطبيق المركب (3.32)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial g^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial g^n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f^n}{\partial g^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial g^n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial g^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial g^1}{\partial x^m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial g^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial g^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}$$

الذي نكتبه بضرب طرفي العلاقة، من اليسار بمقلوب المصفوفة D_2f : D_2f^{-1}

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial g^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial g^n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f^n}{\partial g^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial g^n} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial g^1}{\partial x^m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial g^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial g^n}{\partial x^m} \end{pmatrix} \qquad (3.33)$$

يمكننا الآن صياغة مبرهنة ليوفيل على النحو التالي :

<u>لا يتغير حجم حيز ما من فضاء الطور نتيجة التحويلات القانونية.</u>

إن عنصر الحجم في فضاء الطور هو $d\Gamma = dq^1...dq^n dp_1...dp_n$ عندما نعبر عنه بـ q^i و p_i، لنرمز لحجم الحيز بـ Ω ونكتب

$$\int_\Omega dq^1...dq^n dp_1...dp_n = \int_\Omega d\Gamma$$

وعنصر الحجم الناتج عن التحويلات القانونية هو $dQ^1...dQ^n dP_1...dP_n$.

نريد أن نبرهن أن

$$\int_\Omega dq^1...dq^n dp_1...dp_n = \int_\Omega dQ^1...dQ^n dP_1...dP_n \qquad (3.34)$$

ولكن الطرف الثاني في هذه المعادلة هو حسب (3.31)

$$= \int |D|\, dq^1...dq^n dp_1...dp_n$$

حيث $|D|$ هو معين المصفوفة الجاكوبية، نكتبه على الشكل

$$D = \frac{\partial(Q^1...Q^n;\, P_1...P_n)}{\partial(q^1...q^n;\, p_1...p_n)} \qquad (3.35)$$

وهو شكل مناسب لإجراء الحساب.

يجب علينا إذاً أن نبرهن أن هذا المعين يساوي 1 حتى تتحقق (3.34).

نكتب مصفوفة التطبيق المركب (3.32) كما في (3.35)

$$\frac{\partial(\theta^1...\theta^p)}{\partial(x^1...x^n)} = \frac{\partial(\psi^1...\psi^p)}{\partial(\varphi^1...\varphi^n)} \times \frac{\partial(\varphi^1...\varphi^n)}{\partial(x^1...x^n)} \qquad (3.32)'$$

لكن المصفوفة $D\varphi = \frac{\partial(\varphi^1...\varphi^n)}{\partial(x^1...x^n)}$ هي مقلوب مصفوفة التطبيق φ^{-1} ، D^{-1} : $D^{-1} = \frac{\partial(x^1...x^n)}{\partial(\varphi^1...\varphi^n)}$

بحيث تأخذ $(3.32)'$ الشكل

$$\frac{\partial(\theta^1...\theta^p)}{\partial(x^1...x^n)} = \frac{\partial(\psi^1...\psi^p)}{\partial(\varphi^1...\varphi^n)} : \frac{\partial(x^1...x^n)}{\partial(\varphi^1...\varphi^n)} \qquad (3.32)''$$

حيث ترمز : إلى قسمة المصفوفة الأولى (بالصورة والمخرج) على المصفوفة الثانية. نستعمل هذه الكتابة لكتابة D بدليل تغيرات Q^i بالنسبة لـ q^i من جهة وتغيرات P_i بالنسبة لـ p_i كما يلي

$$D = \frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)} = \frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, P)} : \frac{\partial(q, p)}{\partial(q, P)} \qquad (3.35)'$$

إن كلا من معيني المصفوفتين في الطرف الثاني معين بـ n متغيراً عوضاً عن 2n لأن اشتقاق Q بالنسبة لـ P يساوي الصفر و P بالنسبة لـ P يساوي الصفر أو الواحد؛ وكذلك الأمر في اشتقاق p بالنسبة لـ q المساوي للصفر و q بالنسبة لـ q المساوي للصفر أو للواحد. لنكتب لتوضيح ذلك

$$\left|\frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, P)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q^1}{\partial q^1} & \cdots & \frac{\partial Q^1}{\partial q^n} & \overbrace{0\,0\,0\,0}^{n\ \text{مرة}} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial Q^n}{\partial q^1} & \cdots & \frac{\partial Q^n}{\partial q^n} & 0\,0\,0\,0 \\ \frac{\partial P^1}{\partial q^1} & \cdots & \frac{\partial P^1}{\partial q^n} & 1\,0\,0\,0 \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial P^n}{\partial q^1} & \cdots & \frac{\partial P^n}{\partial q^n} & 0\,0\,0\,1 \end{vmatrix} = \left|\frac{\partial Q}{\partial q}\right| \qquad (3.36)$$

وكذلك

$$\left|\frac{\partial(q, p)}{\partial(q, P)}\right| = \left|\frac{\partial p}{\partial P}\right| \qquad (3.37)$$

لنأخذ الدالة $\phi(q, P)$ المعرفة بـ (3.19) كدالة مولدة للتحويل القانوني $(q, p) \leftarrow (q, P)$. لدينا $\frac{\partial p_k}{\partial P_i} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial q^k \partial P_i}$ لدينا كذلك (3.36)؛ $\frac{\partial Q^i}{\partial q^k} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial q^k \partial P_i}$، إنه عنصر السطر i والعمود k في المعين (3.36)؛ وهو عنصر السطر k والعمود i في المعين (3.37)، أي أن المعينين متساويان لتساوي سطور أحدهما مع أعمدة الآخر و $|D| = 1$ وهو المطلوب.

نتيجة : رأينا أن حركة نظمة ميكانيكية هي تحويل قانوني لنقطة من فضاء الطور فإذا تكون حيز ما من هذا الفضاء من مجموعة من النظمات الميكانيكية الخاضعة لنفس معادلات الحركة فإن حجمه سيبقى ثابتاً أثناء الحركة.

$$\int d\Gamma = \text{ثابتــــة} \qquad (3.38)$$

سنرى أن هذه النتيجة تلعب دوراً هاماً في وضع أسس الميكانيك الإحصائي بشقيه التقليدي والكمومي.

4. حالة عدد غير منته من درجات الحرية

1.4– دالة لاغرانج من أجل الحقول :

لا يعترض تعميم النتائج التي وصلنا إليها في الفقرات السابقة صعوبة تذكر. فقد عممنا بسهولة كبرى حالة الدالة بمتغير واحد $f(y, y', x)$ إلى الدالة بـ n متغيراً $L(q^i, \dot{q}^i, t)$ حيث $y' = \frac{dy}{dx}$ و $\dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt}$

ونحن نريد الآن الانتقال إلى عدد غير منته، بل وغير عدود، من المتغيرات. فقد قلنا منذ عرفنا الحقل إنه معين في كل نقطة من نقاط الفضاء، إن وجود الجسيم – الشحنة مثلاً – المنتجة للحقل يغير خواص الفضاء. فهو، ولنرمز له بـ ψ، دالة بـ t، $\bar{x}$ $\psi(x, y, z, t) = \psi(\bar{x}, t)$، دالة بأربع متغيرات وتعيينه داخل النظمة الميكانيكية يعني تعيين قيمته في كل نقطة من نقاط هذا الفضاء ذي المتغيرات الأربعة وهكذا فإن تكامل لاغرانجي الحقل بالنسبة للزمن هو في واقع الأمر مجموع تكاملات قيم هذا اللاغرانجي على كل نقاط الفضاء. يجب علينا إذاً أن نعرّف كثافة لاغرانجي الحقل في عنصر الحجم، نرمز لها بـ $\mathscr{L}$، وأن نعرف تغييرها المتصل، من نقطة إلى أخرى في الفضاء، فهي بالتالي تابعة لـ $(t, \bar{x})$، لتغيرات الحقل بالنسبة لـ $\bar{x}$ وبالنسبة للزمن. نكتب هذين التغيرين كما يلي : $\bar{\nabla}\psi = \begin{pmatrix} \partial\psi/\partial x^1 \\ \partial\psi/\partial x^2 \\ \partial\psi/\partial x^3 \end{pmatrix}$ غراديان الحقل و

$\frac{\partial\psi}{\partial t}$ مشتق الحقل بالنسب للزمن.

ونكتب كثافة الحقل على الشكل

$$\mathscr{L}(t, \bar{x}) = \mathscr{L}\left(\psi(t, \bar{x}),\ \bar{\nabla}\psi,\ \frac{\partial\psi}{\partial t}\right) \quad (4.1)$$

ونكتب اللاغرانجي

$$L = \iiint \mathscr{L}\left(\psi(t, \bar{x}),\ \bar{\nabla}\psi,\ \frac{\partial\psi}{\partial t}\right) dx^1 dx^2 dx^3 \quad (4.1)'$$

ثم نكتب الفعل، كالمعتاد، كتكامل لـ L بين لحظتين t_1 و t_2. سنسمي $t = x^o$ والمتغيرات الأربعة $x = t, \bar{x}$ ونستبدل باشتقاق ψ بالنسبة للوضع $\bar{\nabla}$ وبالنسبة للزمن $\frac{\partial}{\partial t}$ الاشتقاق

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_o, \bar{\nabla} \qquad \partial_\mu = \begin{pmatrix} \partial/\partial x^o \\ \partial/\partial x^1 \\ \partial/\partial x^2 \\ \partial/\partial x^3 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

رمز الاشتقاق الرباعي ونكتب الفعل عل الشكل

$$S = \int\iiint_{\Omega} \mathcal{L}\left(\psi(x),\, \partial_\mu \psi(x)\right) dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \tag{4.3}$$

حيث Ω الحجم الذي نجري الاشتقاق عليه في الفضاء رباعي الأبعاد.

الجديد هنا أننا لم نعد نكامل على متغير واحد t وإنما على أربعة متغيرات $x = (x^0, \vec{x})$. يقع المتغير الأول بين $x_1^0 = t_1$ و $x_2^0 = t_2$ وتمتد المتغيرات الأخرى بين ∞- و ∞+ لتملأ الفضاء الثلاثي كله.

نكتب تغير الفعل على الشكل

$$\delta S = \int_\Omega \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi(x)} \delta\psi(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi(x)} \delta\partial_\mu \psi(x)\right] d^4x \tag{4.4}$$

حيث عنصر الحجم $d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$، وحيث يختصر الحد الثاني بين المعقوفتين مجموع أربعة اشتقاقات جزئية هي : $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \psi(x)}$، $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_1 \psi(x)}$، $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_2 \psi(x)}$، $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_3 \psi(x)}$، إنها المشتقات التي تحل محل $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial q}{\partial t}}$ في لاغرانجي نظمة ميكانيكية بعدد منته من درجات الحرية. وبما أن العلاقة بين δ و ∂ تبديلية ('(1.10)) : $\delta\partial_\mu = \partial_\mu \delta$، فمن الممكن كتابة الحد الثاني من المقدار المكامل بين المعقوفتين على شكل فرق بين مشتقات جزئية

$$\int_\Omega \left\{\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi(x)} \delta\psi\right) - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi} \delta\psi\right\} d^4x \tag{4.5}$$

تكمن فائدة هذه الكتابة في تحويل تكامل الحد الأول في (4.5)، المكتوب على شكل مشتق في الفضاء رباعي الأبعاد إلى تكامل في فضاء ثلاثي الأبعاد بفضل مبرهنة ستوكس Stokes[6]؛ من تكامل حجم رباعي الأبعاد إلى تكامل سطح ثلاثي الأبعاد. إنه

$$\int_\Omega \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi(x)} \delta\psi(x)\right) d^4x = \int_{\partial\Omega = \sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi(x)} \delta\psi(x)\, d\sigma_\mu \tag{4.6}$$

حيث σ هي فوق السطح hypersurface المحيط بالحجم Ω. إن الحد الأول من المقدار المكامل في (4.6) هو $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \psi(x)} \delta\psi(x) d\sigma_0$ و $d\sigma_0 = dx^1 \times dx^2 \times dx^3$ هو عنصر السطح العمودي على الحجم الفعلي الممتدة أبعاده بين ∞- و ∞+. إن الحقل يساوي الصفر في اللانهاية – هذا ما نفترضه في كل الحقول المتناسبة عكساً مع قوى المسافة r^m – وبالتالي فإن التكامل على هذا السطح الأول معدوم. والأمر كذلك على السطوح الأخرى $d\sigma_i = dx^0 \times dx^j \times dx^k$ $(i,j,k = 1,2,3)$ لأن كلاً منها يحد الزمن x^0 بحديه $x_1^0 = t_1$ و $x_2^0 = t_2$ وتغيرات الحقل δψ معدومة فرضاً من أجل هاتين القيمتين في صياغة

---

[6] إن مبرهنة ستوكس في الحالة العامة $\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$ حيث Ω حجم بـ n بعداً و ∂Ω سطح بـ n-1 بعداً. إنها تعميم لمبرهنة ستوكس المألوفة في الكهرطيسية $\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \overrightarrow{dS} = \oint \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell}$ ومبرهنة غاوس–أوستروغرادسكي $\int_\Omega (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV = \int_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}$ حيث Ω و S هي الحجوم الاعتيادية بثلاثة أبعاد والسطوح ببعدين والأطوال (∮) ببعد واحد إن ∂_μ تعميم للمؤثر $\vec{\nabla}$.

مبدأ الفعل الأصغر $\delta\psi(x_2^o, \bar{x}) = \delta\psi(x_1^o, \bar{x}) = 0$. وهكذا لا يبقى تحت إشارة التكامل في (4.5) إلا الحد $\partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \psi} \delta\psi$- ولا يبقى بالتالي في الفعل الأصغر (4.4) سوى

$$\delta S = \int_\Omega \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \psi} \right) \delta\psi d^4x \qquad (4.6)'$$

وإذا أردنا أن يكون δS مساوياً للصفر فيجب أن يكون الحد بين معترضتين تحت إشارة التكامل معدوماً ومنه معادلة أولر–لاغرانج

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \psi} = 0 \qquad (4.7)$$

تختلف هذه المعادلة عن معادلة الحركة $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{dL}{dq}$ بكونها معادلة بكثافة اللاغرانجي وليس اللاغرانجي كله وبوجود ثلاثة مشتقات إضافية $\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \frac{\partial \psi}{\partial x^i}}$ $i=1,2,3$.

لم نذكر بعد طبيعة الحقل الجبرية؛ قد يكون حقلاً سلمياً $\psi(x)$ وقد يكون حقلاً منتمياً إلى فضاءات متجهية كحقل التفاعل الكهرطيسي ذي الأبعاد الأربعة كما سنرى $(V, \vec{A})$ حيث V هو الكمون الكهربائي و $\vec{A}$ الكمون المغنطيسي. ولذا نكتب بصورة عامة $\psi(x)$ على شكل عمود

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi^1(x) \\ \vdots \\ \psi^s(x) \end{pmatrix}$$

حيث s عدد أبعاد الفضاء و $\psi^1,...,\psi^s$ مركبات $\psi(s)$ في جملة محاور معينة منه.

2.4– الصياغة القانونية للحقول :

لنأخذ المشتقات الدالتية للدالتية L كما فعلنا من أجل التكامل J في (1.11) والفعل في '(1.12). لم يعد اللاغرانجي دالة وإنما تكاملاً، دالة دالة :

$$L^{(t)} = \int \mathscr{L}\left(\psi(x), \partial_\mu \psi(x)\right) dx^1 dx^2 dx^3 ،$$

إنه اللاغرانجي المحسوب في اللحظة t. لنلاحظ أن L لم يعد متوقفاً على غراديان ψ مادمنا قد كاملنا على المتغيرات x^1, x^2, x^3. لدينا إذاً تعريفاً حسب (1.11)

$$\delta L = \int \left(\frac{\delta L}{\delta \psi(x)} \delta\psi + \frac{\delta L}{\delta \partial_o \psi} \delta \partial_o \psi \right) d^3x \qquad (4.8)$$

حيث $d^3x = dx^1 dx^2 dx^3$ هو عنصر الحجم

ومن جهة أخرى

$$\delta L = \int\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}\delta\psi + \frac{\delta \mathcal{L}}{\partial\partial_o \psi}\delta\partial_o\psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\partial_i \psi}\delta\partial_i\psi\right)d^3x \qquad (4.8)'$$

وبمقارنة هاتين العلاقتين نرى أن

$$\frac{\delta L(t)}{\delta\partial_o\psi(t,\vec{x})} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\partial_o\psi(t,\vec{x})} \qquad (4.9)$$

$$\frac{\delta L}{\delta\psi(t,\vec{x})} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\partial_i\psi(t,\vec{x})} \qquad (4.10)$$

حيث استعملنا $\partial_i\delta = \delta\partial_i$ واشتققنا، كما فعلنا على الدوام، بالتجزئة.

تعريف 12 :

نعرف العزوم المترافقة على غرار ما فعلناه في ميكانيك الجسيمات (تعريف 5 $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$) بالعلاقة (4.9) : نشتق كثافة اللاغرانجي $\mathcal{L}$، بدلاً عن L، بالنسبة لمشتق الحقل بالنسبة للزمن، بدلاً من مشتقات الإحداثيات العامة. نرمز لهذه العزوم بـ Π

$$\frac{\delta L(t)}{\delta\partial_o\psi(t,\vec{x})} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\partial_o\psi(t,\vec{x})} = \Pi \qquad (4.9)'$$

ونكتب معادلة الحركة، معادلة أولر–لاغرانج على الشكل

$$\frac{\delta L}{\delta\psi(t,\vec{x})} - \frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta\partial_o\psi(t,\vec{x})} = 0 \qquad (4.11)$$

إنها نفس معادلات حركة الجسيمات مع استبدال الاشتقاق الدالتي بالاشتقاق الجزئي ونكتبها على الشكل النيوتوني $\left(\frac{dP_i}{dt} = F_i\right)$

$$\frac{d\Pi}{dt} = \frac{\delta L}{\delta\psi} \qquad (4.11)'$$

نعرف الهاميلتوني كما في ميكانيك الجسيمات بالعلاقة

$$H(t) = \int \Pi\partial_o\psi d^3x - L = \int \mathcal{H}(\vec{x})\, d^3x \qquad (4.12)$$

حيث $\mathcal{H}$ كثافة الهاميلتوني؛ H و $\mathcal{H}$ تابعان لـ Π و ψ المقابلين لـ (p, q) :

$$\mathcal{H} = \Pi\partial_o\psi - \mathcal{L}$$

لدينا كما في (4.8)

$$\delta H(t) = \int \frac{\delta H}{\delta\Pi}\delta\Pi d^3x - \delta L$$

وكما في '(4.8)

$$\delta H(t) = \int\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial\Pi}\delta\Pi + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial\partial_i\psi}\delta\partial_i\psi\right)d^3x$$

وبمقارنة العلاقتين نرى أن $\frac{\delta H}{\delta \Pi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi}$ أو

$$\frac{\delta H}{\delta \Pi} = \partial_o \psi \tag{4.13}$$

وأن

$$-\frac{\delta L}{\delta \psi} = \frac{\delta H}{\delta \psi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \partial_i \psi}$$

وبأخذ (4.10) بعين الاعتبار

$$-\frac{\delta H}{\delta \psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_i \psi}$$

ونظراً لمعادلة الحركة (4.7) فإن

$$\frac{\delta H}{\delta \psi} = -\partial_o \Pi \tag{4.14}$$

(4.13) و (4.14) هما معادلتا هاميلتون القانونيتان وهما، كما في معادلات أولر-لاغرانج (4.11)، لا تختلفان عن المعادلات القانونية للجسيمات إلا باستبدال الاشتقاق الدالتي بالاشتقاق الجزئي.

3.4- لامات بواسون :

لتكن لدينا الدالتية F التابعة للحقل ψ والعزم المرافق Π ولتكن $\mathcal{F}$ دالة كثافتها. لدينا

$$F_{[\psi,\Pi]} = \int d^3x \mathcal{F}\left[\Pi(t,\vec{x}),\ \psi(t,\vec{x})\right] \tag{4.15}$$

وباستعمال المعادلتين القانونيتين ومطابقة الاشتقاق الدالتي مع الاشتقاق الجزئي للكثافة نجد

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \psi}\partial_o \psi + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Pi}\partial_o \Pi\right] \\ &= \int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \psi}\frac{\delta H}{\delta \Pi} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Pi}\frac{\delta H}{\delta \psi}\right] \\ &= \int d^3x \left[\frac{\delta F}{\delta \psi}\frac{\delta H}{\delta \Pi} - \frac{\delta F}{\delta \Pi}\frac{\delta H}{\delta \psi}\right] \\ &= \{H, F\} \end{aligned} \tag{4.16}$$

وهكذا نكون قد عرفنا لامتي بواسون للدالتيتين F و H.

نحتاج الآن إلى التعرف على دالتية جديدة وضعها ديراك في مطلع ثلاثينات القرن الماضي، وسميت دالة ديراك δ. وهي في واقع الأمر نوع خاص من الدالتيات المستعملة لتنظيم الدالات، والمسماة توزيعات Distributions؛ و"دالة" ديراك توزيعة معتدلة (مخففة) tempérée تلعب دوراً كبيراً في النظريات الكمومية كما سنرى، سنكتفي الآن بتعريفها على الشكل

$$x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, x(t)\, \delta(t-\tau) \tag{4.17}$$

إن ما يهمنا في هذا التعريف هو النظر إلى $x(\tau)$ كدالتية $J_{[x]}$ وحساب مشتقها الدالتي.

إن المشتق الدالتي تعريفاً هو (1.11)

$$\delta J_{[x]} = \delta x(\tau) = \int dt \, \frac{\delta J}{\delta x(t)} \, \delta x(t)$$

وهو انطلاقاً من (4.17)، حيث

$$\delta x(\tau) = \int dt \, \delta x(t) \, \delta(t-\tau)$$

وبالمقارنة بين هاتين القيمتين نرى أن

$$\frac{\delta J}{\delta x(t)} = \frac{\delta x(\tau)}{\delta x(t)} = \delta(t-\tau) \qquad (4.18)$$

لنكتب ψ و Π بدليل (4.17) (بثلاثة أبعاد) ومشتقاتها الدالتية بدليل (4.18) لنحصل على لامات بواسون من أجل الحقول

$$\psi(t,\bar{x}) = \int d^3y \, \psi(t,\bar{y}) \, \delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{y}) \qquad (4.19)_1$$

$$\Pi(t,\bar{x}) = \int d^3y \, \Pi(t,\bar{y}) \, \delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{y})$$

$$\frac{\delta\psi(t,\bar{x})}{\delta\psi(t,\bar{y})} = \frac{\delta\Pi(t,\bar{x})}{\delta\Pi(t,\bar{y})} = \delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{y})$$

$$\frac{\delta\psi(t,\bar{x})}{\delta\Pi(t,\bar{y})} = \frac{\delta\Pi(t,\bar{x})}{\delta\psi(t,\bar{y})} = 0 \qquad (4.19)_2$$

وبوضع هذه القيم في تعريف لامتي دالتيتين، كما في (4.16) نجد

$$\{\psi(t,\bar{x}), \Pi(t,\bar{y})\} \equiv \{\psi(x), \Pi(y)\}_{x^o=y^o} = -\int d^3z \frac{\delta\psi(t,\bar{x})}{\delta\psi(t,\bar{z})} \frac{\delta\Pi(t,\bar{y})}{\delta\Pi(t,\bar{z})} = -\int d^3z \, \delta(\bar{x}-\bar{z}) \delta(\bar{y}-\bar{z}) \qquad (4.20)$$

$$= -\delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{y})$$

$$\{\Pi(t,\bar{x}), \psi(t,\bar{y})\} = \delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{y}) \qquad (4.21)_1$$

تقابل هذه العلاقة من أجل الإحداثيات والعزوم المتصلة العلاقة (3.10)$_9$

$$\{\psi(t,\bar{x}), \psi(t,\bar{y})\} = \{\Pi(t,\bar{x}), \Pi(t,\bar{y})\} = 0$$

وهي التي تقابل (3.10)$_8$ ونكتب هاتين العلاقتين بأربعة أبعاد

$$\{\Pi(x), \psi(y)\}_{x^o=y^o} = \delta^{(4)}(x-y) = \delta(x_o - y_o) \, \delta^3(\bar{x}-\bar{y}) \qquad (4.21)_2$$

$$\{\psi(x), \psi(y)\}_{x^o=y^o} = \{\Pi(x), \Pi(y)\}_{x^o=y^o} = 0$$

4.4- تحويلات لوجاندر Legendre :

لنبدأ لفهم فحوى الانتقال من المتغيرات في فضاء الهيئة، من الهيكلة اللاغرانجية، إلى المتغيرات في فضاء الطور، إلى الهيكلة الهاميلتونية بإعطاء مثال ببعدين يبين لنا تكافؤ دراسة السطح في الفضاء ذي ثلاثة أبعاد بالاعتماد على معادلة السطح أو بالاعتماد على معادلة المستوى المماس. وهو تكافؤ نراه في دراسة الترموديناميك. نسمي الانتقال بين هاتين الدارستين المتكافئتين تحويلات لوجاندر.

لتكن لدينا معادلة سطح في الفضاء ذي الأبعاد الثلاثة

$$z = f(x, y)$$

ومعادلة المستوي المماس للسطح في النقطة (x, y, z)

$$Z - z - (X - x)f_x - (Y - y)f_y = 0 \qquad (4.22)$$

حيث $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ ، $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$.

هذا من جهة، ومن جهة أخرى فإن المعادلة العامة لمستوى ما هي

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = p$$

حيث p هي بعد نقطة تقاطع الناظم على المستوي المقام من O، عن O و α ، β ، γ هي جيوب التمام الموجهة لهذا الناظم. يفضل عادة كتابة هذه المعادلة بدليل راقم نقطة تقاطع المستوى مع Oz، لنسمها $-g$: $-\gamma g = p$ ونكتب عندئذ معادلة المستوى على الشكل

$$Z = \xi X + \eta Y - g \qquad (4.22)'$$

حيث $\xi = -\alpha/\gamma$ ، $\eta = -\beta/\gamma$ هما المعاملان الزاويان.

إن إحداثيات المستوي المماس (ξ, η, g) معينة انطلاقاً من (4.22) كما يلي

$$\xi = f_x \quad ، \quad \eta = f_y \quad ، \quad g = -z + xf_x + yf_y \qquad (4.23)$$

أو

$$g = g(\xi, \eta) = x\xi + y\eta - z \equiv x\xi + y\eta - f(x, y) \qquad (4.23)'$$

وعل العكس فإن السطح $z = f(x, y)$ معين تماماً انطلاقاً من $g(\xi, \eta)$ حيث η ، ξ هما الوسيطان المميزان للمستويات المماسة. تعطينا الاشتقاقات الجزئية لـ '(4.23)

$$g_\xi = x + \frac{\partial x}{\partial \xi}\xi + \eta\frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} = x \qquad (4.24)_1$$

وكذلك

$$g_\eta = y \qquad (4.24)_2$$

وهكذا نحصل على النظمة

$$\begin{cases} f(x, y) + g(\xi, \eta) = x\xi + y\eta \\ \xi = f_x \quad , \quad \eta = f_y \\ x = g_\xi \quad , \quad y = f_\eta \end{cases} \tag{4.25}$$

التي تبين ثنوية العلاقة بين مركبات النقطة على السطح ومركبات المستوى المماس، ونقابل كل عنصر من السطح $(x, y, f(x, y), f_x, f_y)$ بعنصر من السطح $(\xi, \eta, g(\xi, \eta), g_\xi, g_\eta)$ يكفي للتأكد من ذلك النظر إلى الجملة المؤلفة من الدالتين السلميتين بالمتغيرات الأربعة.

$$f_2(\xi, \eta, x, y) = f_y - \eta = 0 \quad , \quad f_1(\xi, \eta, x, y) = f_x - \xi = 0$$

تبرهن مبرهنة الدالات الضمنية على وجود جملة وحيدة من دالتين $g_1(\xi, \eta) = x$ ، $g_2(\xi, \eta) = y$ شريطة أن يكون الجاكوبي $\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)}$ مختلفاً عن الصفر أي

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0$$

أما إذا كان مساوياً للصفر فإن للسطح فئة من المستويات المتوقفة على وسيط واحد تمس السطح على طول المستقيم : لم يعد التقابل بين نقاط السطح وإحداثيات المستوي تقابلاً فريداً : واحد لواحد.

ننتقل في الحالة العامة من دالة متجهية $f(x) = f(x^1, ..., x^n)$ حيث $x \in E^n$ إلى دالة متجهية أخرى $g(\xi) = g(\xi^1, ..., \xi^n)$ متجهة في الفضاء الثنوي لـ E^n ونرمز له بـ $E^{n'}$ بواسطة $\xi = \frac{\partial f}{\partial x}$ حيث متحولات لوجاندر

$$f(x) + g(\xi) = \langle \xi, x \rangle \equiv x^i \xi_i \tag{4.26}$$

ولكي يكون هذا التحويل ممكناً، أي لكي يكون تطبيق مبرهنة الدالات الضمنية ممكناً، يجب أن يكون جاكوبي الدالات $f_i = f_{x^i} - \xi_i$ مختلفاً عن الصفر.

$$\frac{\partial(f^1, ..., f^n)}{\partial(x^1, ..., x^n)} = \begin{vmatrix} f_{x^1x^1} & \cdots & f_{x^1x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x^nx^1} & \cdots & f_{x^nx^n} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{4.27}$$

ونحصل عل النظمة

$$\begin{cases} f(x^1, ..., x^n) + g(\xi^1, ..., \xi^n) - \sum_i x^i \xi_i = 0 \\ \xi_i = \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad , \quad x^i = \frac{\partial g}{\partial \xi_i} \end{cases} \tag{4.25'}$$

لدينا كذلك

$$\begin{vmatrix} g_{\xi_1\xi_1} & \cdots & g_{\xi_1\xi_n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{\xi_n\xi_1} & \cdots & g_{\xi_n\xi_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

وهكذا فإن كان اللاغرانجي كتابع لـ $\dot{q}$ يحقق العلاقة (4.27)

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right) \neq 0 \qquad (4.27)'$$

وإذا وجد للجملة $p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i(t)}$ حل وحيد هو

$$\dot{q}^i = \vartheta^i(q, p) \qquad (4.28)$$

(ونعبر عن هذين الشرطين بقولنا إن اللاغرانجي غير متدنٍ وبقوة)، فإنه من الممكن الانتقال من فضاء الهيئة إلى فضاء الطور، من الصياغة اللاغرانجية إلى الصياغة الهاميلتونية وفق النظمة '(4.25)

$$\begin{cases} L(q, \dot{q}, t) + H(q, p, t) - \sum_i \dot{q}^i p_i = 0 \\ p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \quad , \quad \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases} \qquad (4.25)''$$

5.4- الخاتمة :

ليس من المألوف أو المرغوب فيه إقحام الفلسفة والمعتقدات في المفاهيم العلمية الصرفة، ذلك أن إطار العمل العلمي وأهدافه تختلف اختلافاً جذرياً عن إطار العمل الميتافيزيائي وأهدافه. يقوم العلم التجربي empirique على الملاحظة والرصد والتجريب على الوقائع، على الحادثات الطبيعية، وعلى تصور عدد من المبادئ المتسقة – الموضوعات – وصياغة القوانين التي تخضع لها مجموعة ما من الوقائع الطبيعية، وكل ما يصبو إليه العلم هو التنبؤ بوقوعها في الزمان والمكان كماً وكيفاً. وإذا ما طرأت استحالة خضوع حدث ما أو تجربة إلى هذه القوانين، عمد الباحثون العلميون إلى مد بساط من المبادئ أوسع من البساط السابق. إلى وضع نظرية مختلفة عن النظرية الأولى، يسقط عليه الحدث الجديد بالإضافة إلى كل الحادثات الأخرى. فهو ينقض في بعض جوانبه المبادئ الأولى ويقبلها في جوانبه الأخرى كتقريب أولي؛ وهذا ما سنراه في الفصل القادم. وهكذا فإن التجربة وحدها هي التي تتيح تفنيد النظرية العلمية ودحضها لتستبدل بها نظرية أخرى تتماشى مع الوضع التجريبي الجديد. إن قبول النظرية العلمية للدحض والتفنيد كلياً أو جزئياً هو معيار الحد الفاصل بين العلم والفلسفة.

تبحث الفلسفة في العقل، في الفكرة والحقيقة، في الأيس (الموجود) Sein والعدم، في الوجود Dasein والمصير، في النفس، في الإنسان، في علاقته بذاته وبالآخرين، الخ. ولا سبيل في كل هذه الأمور لدحض نظمة فلسفية أو مجموعة من المعتقدات، لا معيار للدحض والتفنيد كما في العلم. إنك تقبل مبادئها والأسس التي قامت عليها أو ترفضها. ولذا فقد اقتضت التقاليد العلمية منذ زمن بعيد عدم الخلط بين المفاهيم العلمية – وإن كان منشأ بعضها فلسفياً كالنظرية الذرية على سبيل المثال – وبين المفاهيم الفلسفية. وقد سار بعض أشهر الباحثين العرب – المسلمين في القرنين العاشر والحادي عشر من الميلاد

على هذا النهج. فقد روى التوحيدي متحدثاً عنهم "وليس فيهم من يذكر كلمة في النفس والعقل والإله حتى كأنه محظور عليهم أو قبيح عندهم" أما نحن فنعتقد أنه لا هذا ولا ذاك وإنما لأنه لا يمت بصلة إلى مواضيع أبحاثهم.

إلا أن عدم الخلط ليس بالأمر السهل فقد رأينا منذ الفصل الأول (§.2.1) كيف كان نيوتن يتصور الجسيمات "لا يمكن لأي قدرة عادية أن تقسم ما فعله الله في الخلق الأول..." وكيف جاءت كل مفاهيم الفيزياء الحديثة لتنقض هذا التصور. وكذلك فيما يتعلق بمبدأ الفعل الأصغر فقد استشف منه كثيرون شكلاً من أشكال الغائية : لقد اختارت الطبيعة، أو اختير لها، أن تتحرك الأجسام متخذة أقصر الطرق وأن تستغرق حركتها أقصر زمن ممكن، الخ. ورأى موبيرتيوس Maupertius، على سبيل المثال، أن مبدأه، وهو أحد أشكال مبدأ الفعل الأصغر القائم على مبدأ فيرما، يحدد فعلاً مسار الجسم وأنه على هذا النحو يعبر عن حكمة الخالق، كما رأى لايبنيز Leibniz قبله في هذا المبدأ تبريراً إلهياً Theodicée. ونشر موبيرتيوس مبدأه عام 1747 مشيراً إلى رسالة من لايبنيز عام 1707. ولكن الحديث عن حكمة الخالق أو عن الطبيعة المقتصدة التي تختار أقصر السبل لم يتوقف لمدة طويلة.

رأينا أن مفهوم الفعل الأصغر في صيغتيه اللاغرانجية والهاميلتونية لا يرتبط بالضرورة بمفهوم المسار. فكل الفيزياء كما سنرى تقوم على هذا المبدأ والميكانيك الكمومي، القائم على هذا المبدأ، يتخلى عن مفهوم المسار لتعارض هذا المفهوم مع الواقع التجريبي في مجال الجسيمات. كما أنه لا معنى للمسار عندما يتعلق الأمر بالحقل المنتشر في كل نقطة من نقاط الفضاء، الخ. ثم إن الفعل "طرفي" extremum، نقول عنه إنه أصغر ولكننا لا نحسب المشتق الدالالتي الثاني؛ إن أقصر مسافة بين نقطتين واقعتين على سطح الكرة هي قوس الدائرة الكبرى التي تقع عليها النقطتان 1 و 2 ولكنها في الوقت ذاته أطول مسافة إذا عكسنا الاتجاه من 2 إلى 1 عوضاً عن 1 إلى 2. وهكذا فلا معنى إطلاقاً لطبيعة مقتصدة إلى حد التقتير ! ولا علاقة لحكمة الخالق أو للتبريرات الإلهية في هذا المبدأ، مبدأ الفعل الأصغر، الذي وضعه الفكر البشري لشرح وتعميم قوانين الميكانيك في البدء وقوانين كل الفيزياء بعد ذلك.

ونحن لم نكن، تمشياً مع الأعراف العلمية، لنكتب هذه الخاتمة لو لم نكن قد رأينا في الآونة الأخيرة بعض العلميين، وخاصة منهم من يعمل في مجال تبسيط العلوم في بعض المجلات الأمريكية واسعة الانتشار، لا يكتفون بالحديث عما "تريده" أو "تقرره" الطبيعة ككل، بل يذهبون مبالغة في التفاصح – أو إن شئنا في التضليل – إلى الحديث، وهم البيولوجيون العارفون بتطور الحياة على مدى مئات آلاف بل ملايين السنين قبل الوصول إلى العقل البشري ذي الإرادة، الذي يتخذ القرار، عن الخلية التي قررت كذا وكذا. أما أين يقع مركز الإرادة في الخلية وكيف تستطيع الخلية المحاكمة لاتخاذ القرار الملائم فعلمه عند الله وعند العالم المتفاصح !

الفصل السابع

النسبية الخاصة

1. مبدأ النسبية الخاصة 303
2. فضاء مينكوفسكي 310
3. الميكانيك النسبوي 331
4. الهيكلة رباعية الأبعاد للكهرطيسية 343

الفصل السابع: النسبيـــة الخاصـــة

1. مبدأ النسبية الخاصة

1.1- الكهرطيسية :

إنها النظرية التي وحد فيها ماكسويل في مطلع الثلث الأخير من القرن التاسع عشر الكهرباء والمغنطيسية والضوء الموجي في أربع معادلات والتي كرسنا المجلد الثالث بكامله لدراستها. إن ما يهمنا معرفته هنا هو أنها أربع معادلات تفاضلية من الدرجة الأولى بالمشتقات الجزئية للحقلين الكهربائي $\vec{E}$ والمغنطيسي $\vec{B}$، نعبر عنها بشكل متجهي باستعمال المؤثر التفاضلي $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$، الذي استعملناه كمؤثر على دالة عددية $f(x, y, z)$، على r مثلاً، وسميناه غراديان $\vec{\nabla} f : f$. نسمي "جداءه" (تطبيقه) السلمي بدالة متجهة تباعداً Divergence، ونكتب على سبيل المثال تباعد (تفرق) $\vec{E}$:

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(x, y, z) = \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z}$ حيث E_x، E_y، E_z مساقط الدالة المتجهة $\vec{E}(x, y, z)$ على المحاور الثلاثة. نسمي أخيراً تدويراً rotationnel, Curl "جداءه" (تطبيقه) المتجه على متجهة؛ فتدوير $\vec{E}$، على سبيل المثال، هو المتجهة ذات المركبات :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} \end{cases}$$

ومعادلات ماكسويل الأربع هي

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_o} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_o \vec{J} + \dfrac{1}{C^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \qquad (1.1)$$

حيث ρ هي كثافة الشحنة الكهربائية و $\vec{J}$ كثافة التيار الكهربائي، ε_o ، μ_o ثابتتا تناسب و C سرعة الضوء. لا تختلف المعادلة الأولى عما هو عليه الحال في الكهربائية الراكدة. تعبر المعادلة الثالثة عن عدم وجود ما يشبه الشحنات الكهربائية في المغنطيسية – الكتل المنغطيسية. تعبر المعادلة الثانية عن حدوث حقل كهربائي نتيجة تغير الحقل المغنطيسي مع الزمن – تغير تدفقه في الواقع – وتربط المعادلة الرابعة بين كثافة التيار وتغير الحقل الكهربائي مع الزمن بتغير الحقل المغنطيسي؛ إنها نظيرة المعادلة الثانية. لنضف أن المعادلة الثالثة تعني إمكانية اشتقاق الحقل المغنطيسي من كمون متجه $\vec{A}$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad (1.2)$$

لأن $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{X}) = 0$ من أجل كل متجهة $\vec{X}$ أما $\vec{E}$ فلم يعد مشتقاً من الكمون V وحده وإنما من V و $\vec{A}$.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad (1.3)$$

وهذا هو كل ما في الكهرطيسية : نحصل على تكاملات معادلات ماكسويل على شكل دالات موجية، $\vec{E} = \vec{a}\left(e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\right)$ على سبيل المثال، تنتشر في الفضاء بسرعة ثابتة هي سرعة الضوء ولا تتوقف على سرعة المصدر – الشحنات والتيارات. تأخذ الموجة عندما تكون بعيدة عن المصدر شكلاً مستوياً مؤلفاً من الحقل الكهربائي والحقل المغنطيسي المتعامدين والعموديين على متجهة السرعة $\vec{C}$ بحيث تشكل الجملة $\vec{E}$، $\vec{B}$، $\vec{C}$ جملة محاور مباشرة وتحمل طاقة في اتجاه $\vec{C}$ تدفقها (الكمية التي تجتاز واحدة السطوح في واحدة الزمن)

$$\vec{S} = \varepsilon_o C^2\left(\vec{E} \times \vec{B}\right) \quad \text{و} \quad |S| \sim E^2 \qquad (1.4)$$

يمكن التحقق بسهولة أن معادلات ماكسويل لا تصمد – لا تبقى على شكلها – نتيجة تحويلات غاليلية التي تحدد الانتقال من مقرن غاليلي K إلى مقرن غاليلي آخر K' يسير بسرعة مستقيمة منتظمة $\vec{V}$ بالنسبة للمقرن الأول

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t \\ t = t' \end{cases} \qquad (1.5)$$

لقد شرحنا في القفرة 2 من الفصل الثالث الأسس التي يقوم عليها الميكانيك النيوتوني. إنها القبول بمفهوم الفضاء الإقليدي، بمبدأ نيوتن الثاني : تناسب التسارع مع القوة، وبمبدأ النسبية الغاليلية القائل بوجود المقارن الغاليلية وباستحالة التأكد بتجربة ميكانيكية من حركة المقرن K' بالنسبة للمقرن K "الساكن". ما من شيء يمنع من التأكيد على سكون K' وعلى حركة K بالنسبة له بسرعة $-\vec{V}$.. وهذا ما يعبر عنه عدم تغير معادلات الميكانيك نتيجة التحويلات الغاليلية : إن التسارع هو نفسه في K و K'، $\vec{a} = \vec{a}'$.

لكن معادلات ماكسويل تتغير نتيجة التحويلات الغاليلية، ولذا فمن الممكن في إطار مبادئ الميكانيك النيوتوني القيام بتجربة كهرطيسية تثبت حركة المقرن K' بالنسبة لـ K. إنها تجربة مايكلسون-مورلي.

2.1- تجربة مايكلسون-مورلي Michelson-Morley (1887) :

إن أدق طريقة لتعيين فروق صغيرة في الأطوال هي طريقة التداخل الضوئي التي تعين اختلافات في الطول بحدود طول الموجة – أي بحدود بضعة آلاف من الأنغستروم $\left(\overset{\circ}{A} = 10^{-10}m\right)$. لنذكر بمبدأ التداخل؛ ليكن لدينا الموجتان الضوئيتان المستويتان $\vec{E}_1 = \vec{a}\, e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$ و $\vec{E}_2 = \vec{a}' e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r}')}$، لهما نفس المتجهة الموجية $\vec{k}$، $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$، أي نفس طول الموجة، ونفس السعة $\vec{a}$ للتبسيط. وتوضيع هاتين الموجتين – هذين الحقلين الكهربائيين – في نقطة ما يعطينا حسب (1.4) الطاقة – الشدة الضوئية التالية

$$|E|^2 = \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2\right)\left(\overline{\vec{E}_1 + \vec{E}_2}\right)$$

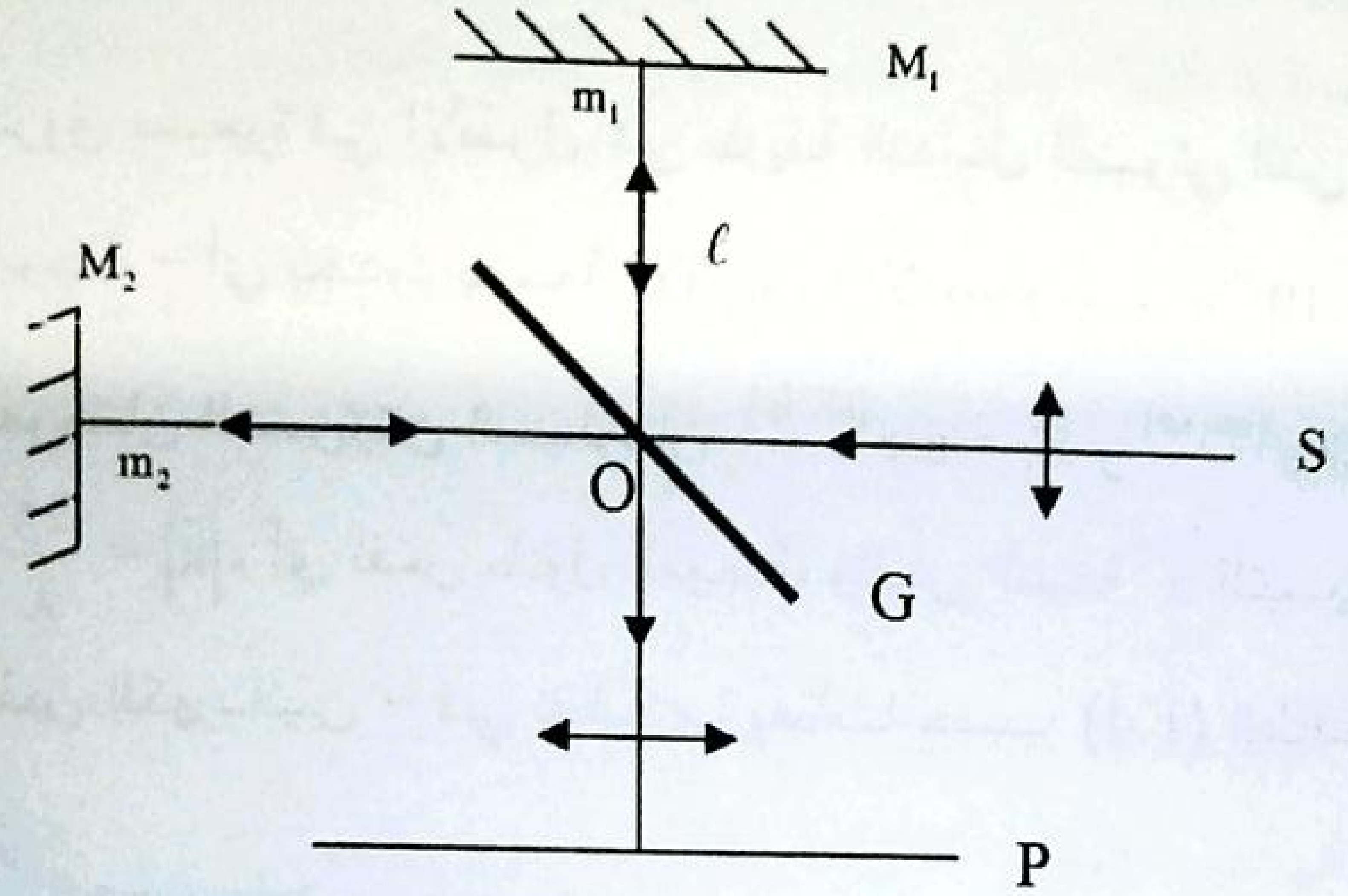
حيث – تشير إلى المقدار العقدي المرافق. ننظر إلى الحقل $\vec{E}$ وليس إلى $\vec{B}$ لأن الشبكية تتأثر بالحقل الكهربائي. لدينا

$$|E|^2 = 2a^2 + a^2\left(e^{i\vec{k}(\vec{r}'-\vec{r})} + e^{-i\vec{k}(\vec{r}'-\vec{r})}\right)$$

$$= 2a^2\left(1 + \cos\vec{k}(\vec{r}' - \vec{r})\right) = 4a^2\,\frac{\cos^2\vec{k}(\vec{r}' - \vec{r})}{2}$$

نسمي المقدار $\Delta\vec{r} = |\vec{r}' - \vec{r}|$ فرق الطريق. عندما يكون $k\Delta r = 2K\pi$ فالشدة الضوئية أعظمية ونحصل على الأهداب المضيئة، وعندما يكون $k\Delta r = (2K+1)\pi$ فالشدة أصغرية (ومساوية للصفر في الحالة التي اخترناها $(a_1 = a_2)$ والأهداب مظلمة. والمسافة بين هدبين مضيئين متجاورين متناسبة مع λ. تهدف التجربة إلى تعيين حركة الأرض، التي ننظر إليها خلال فترة التجربة كمقرن غاليلي يسير بسرعة 30km/ثانيـة بالنسبة لمقرن غاليلي آخر – ساكن – مرتبط بالنظمة الشمسية. يصدر منبع ضوئي نوراً ينعكس على مرآة موضوعة في اتجاه حركة الأرض قاطعاً المسافة r ونوراً آخر ينعكس على مرآة عمودية على اتجاه حركة الأرض قاطعاً المسافة r'. والغرض من مقياس التداخل – مقياس مايكلسون قياس هذا الفرق والتأكد من حركة الأرض بالنسبة للمقرن المرتبط بالشمس، المقرن المطلق كما كان يقال آنذاك، أو حركتها بالنسبة للأثير.

عناصر هذا المقياس هي التالية. تبث قطعة زجاجية في O مائلة بـ 45° بالنسبة لاتجاه الأشعة الآتية من المنبع، الضوء نحو مرآتين متعامدتين M_1 و M_2 تبعدان نفس المسافة ℓ عن O. M_1 عمودية على اتجاه الحركة و M_2 في اتجاه الحركة. يتوضع الضوء المنعكس عن هاتين المرآتين على صفيحة P حيث نستطيع رصد ظاهرة التداخل، الشكل.1.



الشكل.1

إن الزمن الذي يستغرقه الضوء للوصول إلى M_2 هو $t_1 = \frac{\ell}{C+V}$، وللعودة إلى O هو $t_2 = \frac{\ell}{C-V}$

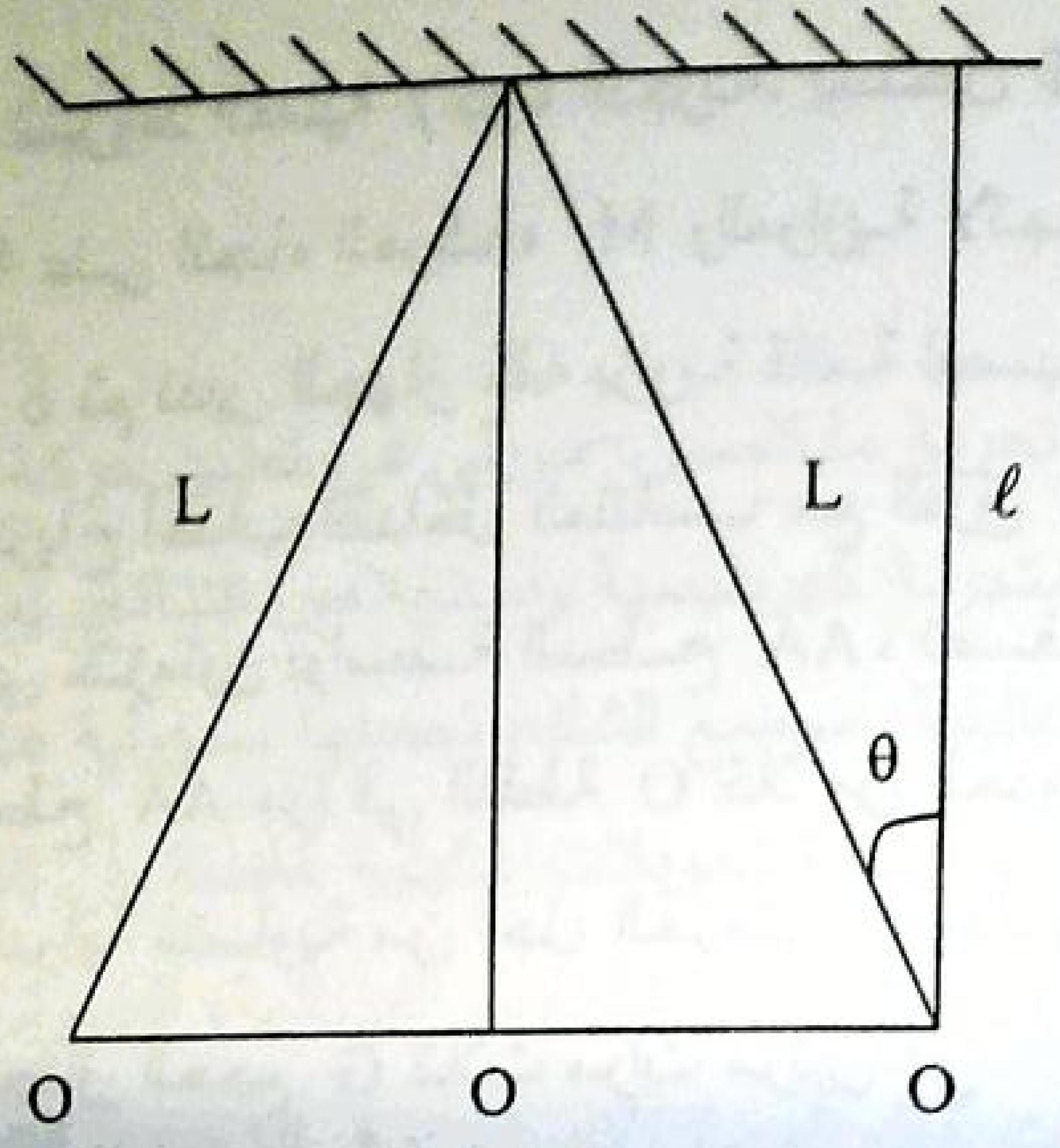
وبالتالي فإن المسافة المقطوعة هي

$$r = C(t_1 + t_2) = \frac{C\ell}{C+V} + \frac{C\ell}{C-V} = \frac{2\ell}{1-\frac{V^2}{C^2}} \qquad (1.6)$$

أما الزمن الذي يستغرقه الضوء للوصول إلى M_1 فتحدده العلاقة $L^2 = C^2t'^2 = \ell^2 + V^2t'^2$ والمسافة الكلية المقطوعة للوصول إلى M_1 والعودة إلى O هي، الشكل.2.

$$r' = 2L = \frac{2\ell}{\left(1-\frac{V^2}{C^2}\right)^{1/2}} \qquad (1.6)'$$

حيث $\sin\theta = \frac{V}{C} = 10^{-4}$



الشكل.2

ننشر $\frac{1}{1-x} \simeq 1 + x + \ldots$ وثنائي الحد $(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \ldots$ متوقفين عند الحد الثاني. لدينا

$$\Delta r = r - r' \cong 2\ell\left(1 + \frac{V^2}{C^2}\right) - 2\ell\left(1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{C^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\, 2\ell \frac{V^2}{C^2}$$

حيث أهملنا الحدود من الدرجة الرابعة بـ $\left(\frac{V}{C}\right)$

ونسبة الانزياح عن π بين الهدب المضيء والمظلم الأوليين الناتج عن فرق الطريق هذا هي $\delta = \frac{k\Delta r}{\pi}$

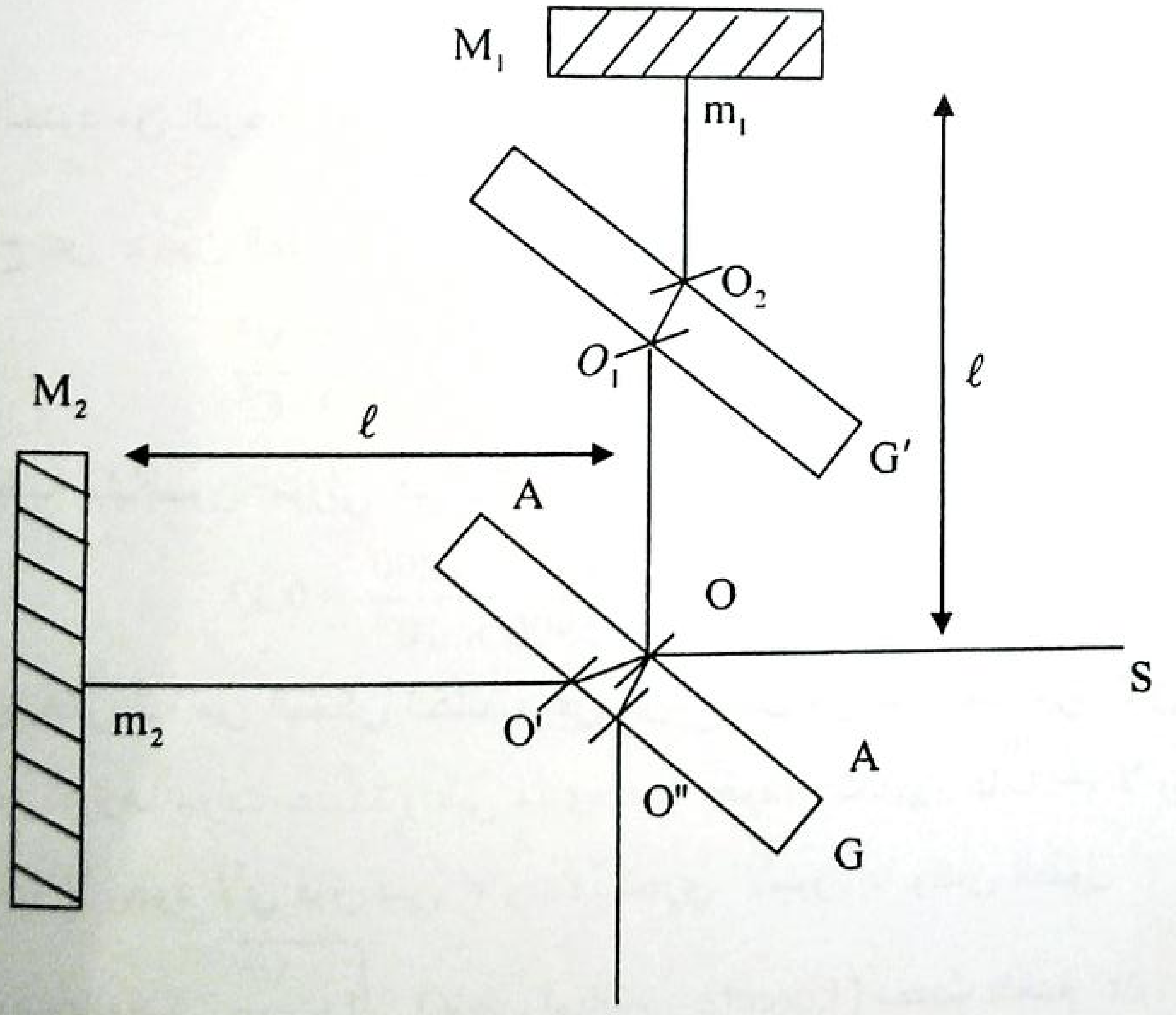
$$\delta = \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{2}\, 2\ell \frac{V^2}{C^2} = \frac{2\ell}{\lambda}\frac{V^2}{C^2}$$

إن 2ℓ في تجربة مايكلسون–مورلي هي 22 متراً، $\lambda = 5900\,\mathring{A}$ وبالتالي فإن δ هي

$$\delta = \frac{10^{-8} \times 2200}{5900 \times 10^{-8}} = 0{,}37$$

كان مايكلسون يعتبر أنه من الممكن الكشف عن انزياح أقل من هذا بمئة مرة، لكن نتائج التجربة كانت سلبية كلياً رغم تكرارها مرات عديدة وعلى مدى عدة عقود – ثمانين عاماً –، لا وجود لأي ظاهرة من ظواهر التداخل، لا وجود لأي فرق بين r و 'r. تجري الأمور إذاً وكأن الطول ℓ في اتجاه الحركة قد تقلص، قد ضرب بالمقدار $\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}$ (تقلص لورانتس Lorentz) بحيث ينعدم Δr. والسؤال هو من أين جاء هذا التقلص ؟

يستحيل التأكد من تساوي الذراعين ℓ_1 و ℓ_2 بين O والمرآتين العمودية على اتجاه الحركة، M_1 والموازية لاتجاه الحركة، M_2. نحسب فرق الطريق بدليل ℓ_1 و ℓ_2 ونعين δ ثم ندير الجهاز كله بزاوية قائمة ليصبح M_1 في اتجاه الحركة و M_2 عمودياً عليها وستكون النتيجة انزياح أهداب التداخل المتناسب مع الفرق $\Delta\ell = \ell_1 - \ell_2$. لنحدد قبل متابعة البحث بعض الشروط العملية لإجراء التجربة. لنرى الآن كيفية فصل الحزمة الواردة SO إلى حزمتين بواسطة السطح AA، نصف المفضض، للزجاج G ذي السطحين المتوازيين. يعكس السطح AA مرة في النقطة O كلاً من الحزمتين ويسمح بالمرور مرة أخرى الشكل.3 بحيث تبقى الشدة الضوئية متساوية من أجل الحزمتين وقيمتها الأصغرية مساوية للصفر. إلا أن الحزمة المتجهة نحو M_2 تجتاز الحجم G ثلاث مرات مرتين في 'O ومرة في "O بينما لا تجتازه الحزمة المتجهة نحو M_1 إلا مرة واحدة في "O, لذلك توضع صحيفة معدلة مماثلة لـ G، 'G في طريق الشعاع M_1O بحيث يصبح عدد المرات واحداً بالنسبة للحزمتين وللطريق الضوئي نفس الطول، سوى أن الحزمة المنعكسة في M_1 قد خضعت في O إلى انعكاس هواء – زجاج بينما خضعت الحزمة المنعكسة في M_2 إلى انعكاس زجاج – هواء في هذه النقطة وهو ما يضيف اختلاف طريق إضافي يساوي $\frac{\lambda}{2}$ ويحول الهدب الأول المضيء إلى هدب مظلم.



الشكل.3

3.1- مبدأ النسبية الخاصة :

يجب علينا الآن الإقرار بفشل تجربة مايكلسون-مورلي في تعيين حركة مقرن غاليلي (الأرض) بالنسبة لمقرن غاليلي آخر (الشمس) بتجربة كهرطيسية واستخلاص النتائج. يمكن وضع معادلات ماكسويل، غير الصامدة نتيجة تحويلات غاليلية، موضع الشك، تحميلها مسؤولية هذا الفشل والتفتيش عن معادلات أخرى، عن نظرية أخرى، لا تتغير نتيجة تحويلات غاليلية خاصة وأن الكهرطيسية كانت حديثة العهد – عمرها أقل من ربع قرن آنذاك. إلا أن كل التجارب الفيزيائية، الضوئية والموجات الهرتزية الخ. وكل حضارة عصر الكهرباء عززت هذه المعادلات. لم يبق إذاً سوى الشك بتحويلات غاليلية، رفضها واستبدال تحويلات أخرى بها لا تغير معادلات الكهرطيسية في الانتقال من مقرن غاليلي إلى آخر وتجعل من المستحيل بالتالي التحقق من حركة هذه المقارن البعض منها بالنسبة للبعض الآخر. ولكن كيف تُغير تحويلات غاليلية المؤلفة من شقين، أولهما هندسي صرف يتعلق بجمع المتجهات حسب طريقة متوازي الأضلاع، $\vec{r} = \vec{r}' + \overline{OO'}$ الذي يميز الهندسة الإقليدية، وثانيهما اعتباره الزمن كوسيط، هو نفسه في كل المقارن الغاليلية $t = t'$، وهو ما يسمح بجمع السرع : $\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$. ترينا تجربة مايكلسون-مورلي أن جمع سرعة الضوء وسرعة الأرض : $C + V$ ، $C - V$ حسب حركة الأرض في اتجاه الضوء أو الاتجاه المعاكس في (1.6) لا يؤدي إلى إحداث فرق الطريق المنتظر. إنه غير مقبول. وهكذا يمكن وضع مبدأ النسبية الخاصة[1] على الشكل التالي :

A- يستحيل، أياً كانت التجربة الفيزيائية التي نقوم بها، أن نبين بواسطتها حركة مقرن غاليلي بالنسبة لآخر.

B- توجد سرعة منتهية لانتشار التفاعل هي سرعة الضوء C؛ وهي نفسها في كل المقارن الغاليلية.

نستخلص من مبدأ النسبية A، الذي يعمم مبدأ النسبية الغاليلية باستبدال التجربة الفيزيائية بالتجربة الميكانيكية، أن كل المقارن الغاليلية متكافئة، لا يمكن تمييز أحدها كمقرن ساكن -كمقرن مطلق-، تسير كلها بسرع مستقيمة منتظمة بالنسبة لبعضها بعضاً. لا وجود لمقرن مفضل عن المقارن الأخرى.

---

[1] يعرف هذا المبدأ باسم مبدأ آنشتاين، لكن عددين من العلماء على رأسهم بوانكاريه ولورانتس عملوا على صياغة نظرية النسبية الخاصة. يقول ماكس بورن، صديق آنشتاين ومؤلف أول كتاب في النسبية بعنوان نظرية النسبية، صدرت طبعته الأولى عام 1920، في مطلع المقطع الثالث من المقدمة : "يعود سبب عادة ربط اسم آنشتاين وحده بنظرية النسبية إلى التطور اللاحق : لم يكن عمل آنشتاين عام 1905 سوى الخطوة الأولى لنظرية أكثر عمقاً وأشد إلحاحاً هي نظرية النسبية العامة...".
الطبعة الرابعة 1964 : Max Born, Die relativitäts theorie Einsteins, Springer Verlag.
أما وايتكر مؤلف كتاب تاريخ نظريات الأثير والكهرباء، الصادر عام 1951، فقد عنون الفصل الثاني من الجزء الثاني من مؤلفه "نظرية النسبية لبوانكاريه ولورانتس" وخصص الفصل الخامس لنظرية التثاقل حيث يحتل آنشتاين المكان البارز فيها Sir Edmund Whittaker, A History of the theories of Aether and Electricity, Volumes I and II, American Institute of Physics 1987.

يكرس B عدم إمكانية جمع السرع (لا معنى لـ $C + V$) واختلاف الزمن t من مقرن إلى آخر $t \neq t'$ بالضرورة إذا ما أردنا الإبقاء على الصفات الإقليدية للفضاء المنبسط. وهذا ما تفعله النسبية الخاصة على خلاف النسبية العامة التي تنفي عنه هذه الصفات. نستخلص من B أيضاً أن لا وجود في الفيزياء للتفاعل الآني، للتفاعل المنتشر بسرعة لا نهائية، وهو بذلك يعزز الكهرطيسية ويفند الميكانيك النيوتوني الذي يعرف الطاقة الكامنة ومعها القوة كتابع للمسافة بين الجسمين المتفاعلين $U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$.

2. فضاء مينكوفسكي

1.2- الحادثات Events والمجالات :

تعريف 1 :

لم يعد الزمن وسيطاً مشتركاً بين كل المقارن الغاليلية ولذا فإننا سنسمي حدثاً إعطاء إحداثيات الجسيم (النقطي) في مقرن ما وإعطاء الزمن : إن الحدث معرف بإعطاء أربعة مقادير (x, y, z, t). إنه نقطة في فضاء ذي أربعة أبعاد، تدعى نقطة كونية. يقابل التطور الزمني للجسيم منحن في هذا الفضاء يسمى المنحنى الكوني، أو الخط الكوني عندما يكون مستقيماً للجسيم.

ليكن (x_1, y_1, z_1, t_1) حدثاً أولاً، جسيماً مشحوناً على سبيل المثال في المقرن K، وليكن (x_2, y_2, z_2, t_2) حدثاً ثانياً، كاشفاً أو ببساطة شحنة تجربة في نفس المقرن K تتلقى في اللحظة t_2 الإشارة التي بثها الحدث الأول في اللحظة t_1. لدينا

$$C^2(t_2 - t_1)^2 - \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right] = 0 \quad (2.1)$$

إن رصد هذين الحدثين المعرفين بـ (x'_1, y'_1, z'_1, t'_1) و (x'_2, y'_2, z'_2, t'_2) في مقرن غاليلي آخر K' يعطينا حسب الشق B من مبدأ النسبية

$$C^2(t'_2 - t'_1)^2 - \left[(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2\right] = 0 \quad (2.1)'$$

إن تساوي المقدارين (2.1) و '(2.1) تعبير أيضاً عن استقلال سرعة الضوء عن سرعة المنبع.

تعريف 2 :

نسمي مجالاً بين حدثين المقدار

$$S_{21} = \left\{C^2(t_2 - t_1)^2 - \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right]\right\}^{1/2} \quad (2.2)$$

إذا كان المجال معدوماً في مقرن غاليلي ما فهو معدوم في كل المقارن الغاليلية.

نرمز لمربع المجال البدائي، بين حدثين متجاورين إلى أقصى حد بـ dS^2. إنه

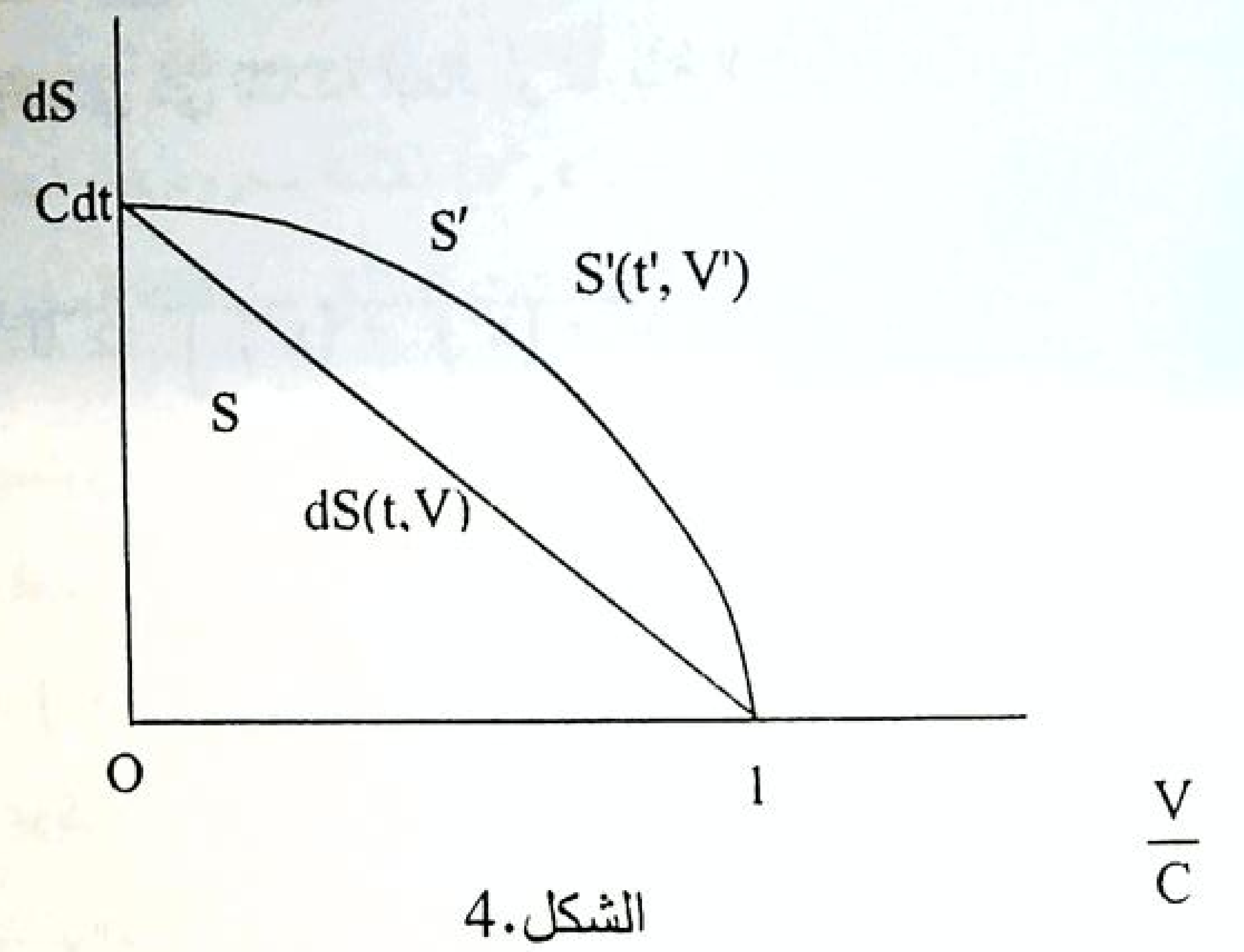
$$dS^2 = C^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = C^2dt^2\left(1 - \frac{V^2}{C^2}\right) \quad (2.3)$$

حيث V هي سرعة الجسيم في المقرن K. تبين هذه العلاقة أن dS لامتناه في الصغر من الدرجة الأولى بـ dt :

لنقارن الآن المجالات البدائية في مختلف المقارن :

لدينا أولاً $dS = dS' = 0$ عندما تكون $V = C$ كما رأينا في (2.1) و '(2.1). إن $dS = dS'$ عندما ننتقل من النسبية الخاصة (C منتهية) إلى الميكانيك التقليدي $(C \to \infty)$: $Cdt = Cdt'$ و $t = t'$ ونجد من جديد التحويلات الغاليلية. توجد إذاً علاقة تناسب بين dS^2 و dS'^2، الشكل 4.

$$dS^2 = a dS'^2 \quad (2.4)$$



الشكل.4

إن مثل التناسب a تابع للوسيط الذي يحدد الانتقال من K إلى K'، أي لسرعة أحدهما بالنسبة للآخر، $\vec{V}$. وبما أننا احتفظنا بالفضاء الإقليدي فإن خاصة التناحي تعني أن a تابع لـ $|\vec{V}|$: $a(|\vec{V}|)$. نأخذ لتعيين قيمته ثلاثة مقارن غاليلية K، K_1، K_2 لتكن $\vec{V}_1$، $\vec{V}_2$، $\vec{V}_{12}$، بالترتيب، سرعتي K_1 و K_2 بالنسبة لـ K وسرعة K_2 بالنسبة لـ K_1 لدينا حسب (4.2)

$$dS^2 = a(|\vec{V}_1|)dS_1^2 = a(|\vec{V}_2|)dS_2^2$$

وكذلك

$$dS_1^2 = a(|\vec{V}_{12}|)dS_2^2$$

وبالتالي

$$\frac{dS_1^2}{dS_2^2} = a(|\vec{V}_{12}|) = \frac{a(|\vec{V}_2|)}{a(|\vec{V}_1|)}$$

لكن $|\vec{V}_{12}|$ تابع للاتجاه النسبي لـ $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ بينما الحد الأخير $\frac{a(|\vec{V}_2|)}{a(|\vec{V}_1|)}$ مستقل عنه تماماً. هذا يعني أن a ثابتة وأن $a^2 = a$ أي $a = 1$ وبالنتيجة فإن المجال البدائي dS^2 لا يتغير على الإطلاق في الانتقال بين المقارن الغاليلية

$$dS^2 = dS'^2 \quad (2.5)$$

وبالتكامل فإن

$$S = S' \quad ; \quad S^2 = S'^2 \tag{2.5'}$$

2.2– فضاء مينكوفسكي :

نرى مما تقدم أن الفضاء الفيزيائي هو فضاء نقطي وفضاء متجهي بأربعة أبعاد (Ct, x, y, z) على الحقل العددي R. نكتب متجهاته على الشكل

$$x = (x^o, \vec{x}) \quad \text{حيث} \quad x^o = Ct \ \text{و} \ \vec{x} = (x, y, z) = (x^1, x^2, x^3) \tag{2.6}$$

ونقطة المبدأ هي $O = (O, \vec{O})$.

تعرف العلاقة (2.2) المسافة بين نقطتين من نقاط هذا الفضاء التآلفي. عرفنا المسافة بين O ونهاية المتجهة $\vec{x}$ في الفضاء الإقليدي ذي الثلاثة أبعاد أو طويلة المتجهة $\vec{x}$ على أنها الجذر التربيعي للجداء السلمي لمتجهة بذاتها :

$$|\vec{x}| = \left[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2\right]^{1/2} \geq 0 \tag{2.7}$$

وهو مقدار موجب دوماً ويساوي الصفر عندما تكون المتجهة $\vec{x}$ مساوية $\vec{O}$.

نعرف الجداء السلمي في فضاء مينكوفسكي انطلاقاً من تعريف المجال ونكتب

$$x \cdot y = x^o y^o - \vec{x} \cdot \vec{y} = x^o y^o - (x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3) \tag{2.8}$$

نكتب هذا الجداء بإدخال مركبات ثنوي الفضاء (انظر ملحق الفصل الخامس) على الشكل

$$xy = \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu y_\mu = x^\mu y_\mu \tag{2.8'}$$

حيث $y^o = y_o$ و $y^i = -y_i$ $(i=1,2,3)$ وحيث ضمرنا كالمعتاد إشارة الجمع عندما يتكرر الدليل في الأعلى والأسفل. إن مربع طويلة المتجهة في فضاء مينكوفسكي هو

$$xx = x^{o^2} - |\vec{x}|^2 \gtreqless 0 \tag{2.9}$$

وهو مقدار قد يكون موجباً أو سالباً أو مساوياً للصفر. إنه المجال بين حدثين، أحدهما في النقطة $O = (O, \vec{O})$ والآخر نهاية المتجهة $(x = x^o, \vec{x})$، وهو المقدار المطلق الوحيد في النظرية كما رأينا. وهكذا فإن فضاء مينكوفسكي هو فضاء تآلفي بأربعة أبعاد، عرفنا فيه الجداء السلمي والأطوال– المسافات الثابتة – كما في الفضاء الإقليدي مع الفارق الوحيد وهو وجود أطوال سالبة وأطوال تساوي الصفر بدون أن تكون المتجهة مساوية للصفر. إن فضاء مينكوفسكي، فضاء النسبية الخاصة، فضاء شبه إقليدي.

نميز الفضاءات شبه الإقليدية بتحديد عدد الإشارات السالبة والموجبة في الجداء السلمي ونسمي هذا التحديد توقيع الفضاء. وهو عندنا $(+,---) = (1,3)$. نرمز له بالرمز E_3^1.

تعريف 3 :

نقول عن متجهة في فضاء مينكوفسكي

إنها من نوع المكان إذا تحقق

$$S^2 = x^2 = C^2t^2 - |\vec{x}|^2 < 0 \qquad (2.9)_a$$

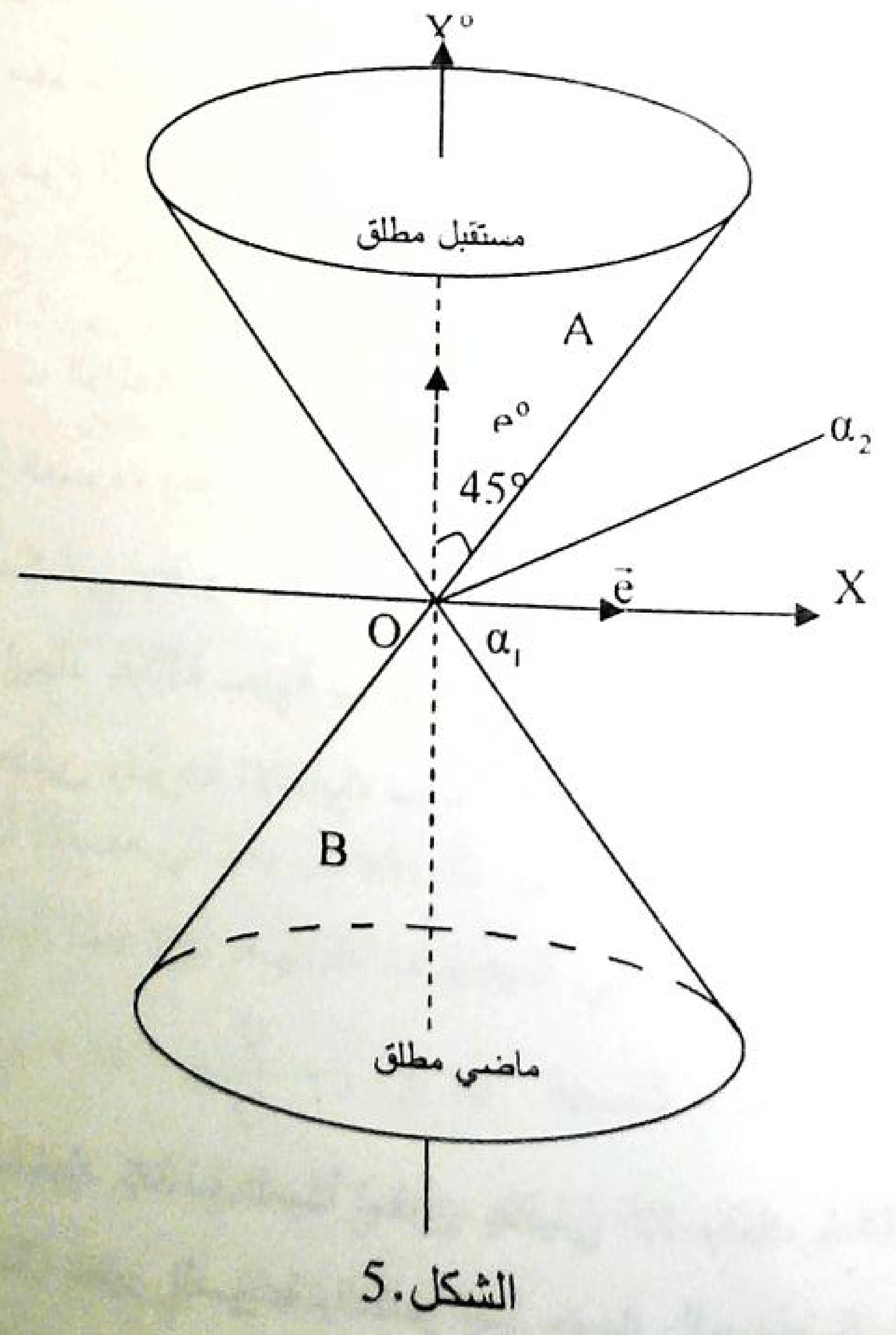
وإنها من نوع الزمان إذا تحقق

$$S^2 = x^2 = C^2t^2 - |\vec{x}|^2 > 0 \qquad (2.9)_b$$

وإنها من نوع الضوء إذا تحقق

$$S^2 = x^2 = C^2t^2 - |\vec{x}|^2 = 0 \qquad (2.9)_c$$

إن هذه المعادلة الأخيرة هي معادلة سطح فوقي – مخروط فوقي – بثلاثة أبعاد في فضاء مينكوفسكي. لتكن $\vec{e}$، e^o متجهات القاعدة المتعامدة في هذا الفضاء. تعين مساقط المخروط الفوقي على الفضاءات ثلاثية الأبعاد (e^o, e^1, e^2)، (e^o, e^2, e^3)، (e^o, e^3, e^1) ثلاثة مخروطات اعتيادية، الشكل.5. مولدات المخروط في قسمه العلوي هي الخطوط الكونية لحادثات تنطلق من قمة المخروط وتنتشر بسرعة الضوء في المخروط العلوي $x^o > 0$ نحو المستقبل، وهي في قسمه السفلي الحادثات الآتية إلى النقطة O، إنها الحادثات الماضية بالنسبة لـ O. يسمى هذا المخروط مخروط الضوء.



الشكل.5

أما النقاط الممثلة لحادثات، مجالها مع الحدث O من نوع الزمان، فتقع داخل مخروط الضوء، سرعة انتشار الحدث هنا أصغر من سرعة الضوء $C^2 > \frac{\Delta|\vec{x}|^2}{\Delta t^2}$. تتمثل الحركة المستقيمة المنتظمة لجسيم انطلق من O بمتجهة واقعة داخل مخروط الضوء هي الخط الكوني لهذه الحركة.

ليكن ΔS^2 المجال الفاصل بين حدثين واقعين داخل مخروط الضوء بالنسبة لمقرن غاليلي K $\Delta S^2 > 0$. إنه من المستحيل وجود مقرن آخر K' يقع فيه هذان الحدثان في نفس اللحظة أي أن يكونا متآنيين (في نفس اللحظة، في آن واحد) ذلك أن $\Delta S'^2 = \Delta S^2 > 0$ لأن المجال هو نفسه في كل المقارن الغاليلية ولأن التآني يعني أن $\Delta t'^2 = 0$ و $\Delta S'^2 = -\Delta|x|^2 < 0$ وهذا خلف. ينتج عن ذلك استحالة وجود مقرن K' يتآنى فيه الحدث A، الواقع بعد O داخل مخروط الضوء مع الحدث B الواقع قبل O داخل المخروط: لا يمكن للمستقبل في المقرن K أن ينطبق على الماضي في المقرن K' وهذا ما نعبر عنه بقولنا إن المستقبل مستقبل إطلاقاً وكذلك الماضي ماضٍ إطلاقاً.

إن كون المستقبل مستقبلاً بالنسبة لكل المقارن الغاليلية يحدد تتابع الحادثات أيضاً : إذا وقع حدث $A_2(t_2)$ بعد الحدث $A_1(t_1)$ داخل مخروط الضوء بالنسبة لمقرن غاليلي K فإنه سيقع على نفس الشكل $A'_2(t'_2)$ بعد $A'_1(t'_1)$ بالنسبة لكل المقارن الغاليلية K'. يكفي لذلك أخذ $A_1(t_1)$ كمبدأ لمخروط الضوء، يقع A_2 في مخروط المستقبل ويبقى إذاً في مخروط المستقبل بالنسبة لكل المقارن. هذا يعني أنه يمكن ربط حدثين متتابعين بعلاقة سببية – الأول قبل الثاني، الأول علة والثاني نتيجة. ولذا يسمى النوعان الضوئي والزماني معاً بالنوع السببي. هذا فيما يتعلق بالتآني والتتابع، أي بالعلاقات الزمنية. أما من حيث وقوع حدثين من نوع الزمان في نفس النقطة من الفضاء فهو أمر ممكن لأنه لا تناقض بين $\Delta S'^2 = \Delta S^2 > 0$ و $\Delta S'^2 = C^2\Delta t'^2$ $\left(\Delta|x'|^2 = 0\right)$.

لندرس أخيراً خواص الحادثات الواقعة خارج مخروط الضوء، إنها الحادثات من نوع المكان، سرعة انتشار الحدث فيها أكبر من سرعة الضوء، وهو ما يتعارض مع الشق B من مبدأ النسبية. ومن جهة أخرى فإن تآني حدثين من النوع المكاني α_1 و α_2 ممكن لأن $\Delta S'^2 = \Delta S^2 < 0$، $\Delta t'^2 = 0$ و $\Delta S'^2 = -\Delta|\vec{x}'|^2$. وبالتالي فإنه من المستحيل إيجاد علاقة سببية بينهما. إن كل ما يقع خارج مخروط الضوء غير فيزيائي : لا وجود لعلاقة سببية بين حدثين وسرعة الإشارة، سرعة التفاعل أكبر من سرعة الضوء.

3.2– الزمن الذاتي :

يمكن النظر إلى أي جسيم متحرك كنقطة المبدأ لمقرن غاليلي K' وذلك خلال فترة زمنية قصيرة بما فيه الكفاية نستطيع خلالها إهمال تغير السرعة والنظر إلى مسار الجسيم كمستقيم منطبق على متجهة المماس للمسار. لدينا من (2.5)

$$dS^2 = C^2dt^2 - |\vec{x}|^2 = Cdt'^2 \quad (2.10)$$

حيث $(t, \vec{x})$ هي إحداثيات الجسيم النسبة للمقرن K.

تعريف 4 :

نسمي هذا الزمن dt' المقيس بميقاتية مرتبطة بـ K' (بالجسيم) الزمن الذاتي.

لدينا من (2.10)

$$dt' = dt\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}} \quad (2.11)$$

ترنيا هذه العلاقة أن الزمن الذاتي، الفترة الزمنية اللامتناهية في الصغر الفاصلة بين حدثين هي أقصر ما تكون في المقرن K' المرتبط بالجسيم – في المقرن الذي يكون فيه الجسيم في حالة السكون.

لتكن Δt واحدة الزمن في K (الثانية مثلاً). إن الثانية في K'، $\Delta t'$، أقصر من الثانية في K :

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}} < 1 \quad (2.11)'$$

وهكذا فالفواصل الزمنية المقيسة تتناقص في K' عنها في K كلما ارتفعت سرعة K' بالنسبة لـ K: تتباطأ الميقاتيات في K' بالنسبة لميقاتيات K. وتتوقف عن عد الثواني إن صح التعبير عندما تصل سرعة الجسيم إلى سرعة الضوء : $\Delta t' = 0$ من أجل $V = C$.

مثال 1 :

تفكك الجسيم π^+. إن عمر هذا الميزون في المقرن K' المرتبط به هو $2,5 \cdot 10^{-8}$ ثانية – العمر هو الفترة الزمنية اللازمة لتفكك نصف عدد الجسيمات المنتجة في لحظة معينة – وسرعة الميزونات المنتجة في المختبر – في المقرن K هي $0,9$ من سرعة الضوء وهكذا فإن عمر الميزونات بالنسبة لـ K (المختبر) هي

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} = \frac{2,5 \cdot 10^{-8}}{\sqrt{1 - 0,81}} \simeq 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ ثانية}$$

أي أنها تعمر أكثر من مرتين بالنسبة للمقرن K وتجتاز بالتالي مسافة أكبر بما ينوف المرتين من المسافة التي تجتازها لولا هذا التباطؤ في الميقاتيات الذاتية، لولا هذا المفعول النسبوي. يمكن إنتاج ميزونات سريعة جداً بحيث تصبح النسبة $\frac{V}{C} = 1 - 5 \cdot 10^{-5}$ و $1 - \frac{V^2}{C^2} = 10^{-4}$ و $\Delta t = 2,5 \cdot 10^{-6}$ أي أكبر بمئة مرة من الزمن الذاتي والمسافة المقطوعة في المختبر أكبر بمئة مرة من المسافة التي كانت ستقطعها قبل أن تتفكك لولا التباطؤ. إن فيزياء الجسيمات تتحقق في واقع الأمر، آلاف المرات يومياً، من صحة العلاقات (2.11) التي تفرضها النسبية الخاصة.

مثال 2 :

يمكن النظر إلى المجموعة المؤلفة من اللوح الزجاجي G والمرآة M_1 في تجربة مايكلسون مورلي كيمقاتية ولنأخذ كوحدة للزمن الزمن الذي تستغرقه الإشارة الضوئية (الموجة الضوئية) ذهاباً وإياباً من G إلى M_1. إن هذا الزمن الذاتي في المقرن 'K المرتبط بالأرض –وحيث الجهاز ساكن– هو $dt' = \frac{2\ell}{C}$ وهو في المقرن K، المرتبط بالشمس والذي تتحرك الأرض بالنسبة له، $dt = \frac{2L}{C} = \frac{2\ell}{C\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}}$ ولدينا

$$dt' = dt\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}.$$

ملاحظة :

اعتبرنا سرعة الجسيم المتحرك ثابتة لفترة وجيزة وبالتالي المقرن المرتبط به مقرناً غاليلياً. أي أننا نظرنا إليه وكأنه غير خاضع لأي قوة خلال هذه الفترة واستخلصنا الزمن الذاتي، عمر الجسيم. إن عمر الجسيم المشحون – الميزون $\bar{\mu}$ – هو $2,2 \cdot 10^{-6}$ ثانية يتفكك بعدها إلى إلكترون ونيوترينو. إلا أن هذا العمر لا يتغير بوجود حقل مغنطيسي، بوجود القوة $\vec{F} = q\vec{V} \times \vec{B}$ العمودية على اتجاه الحركة والتي لا تغير السرعة. وقد لوحظ فعلاً تساوي الزمن الذاتي للميونات الحرة والميونات المتحركة في حقل مغنطيسي (يغير اتجاه حركتها).

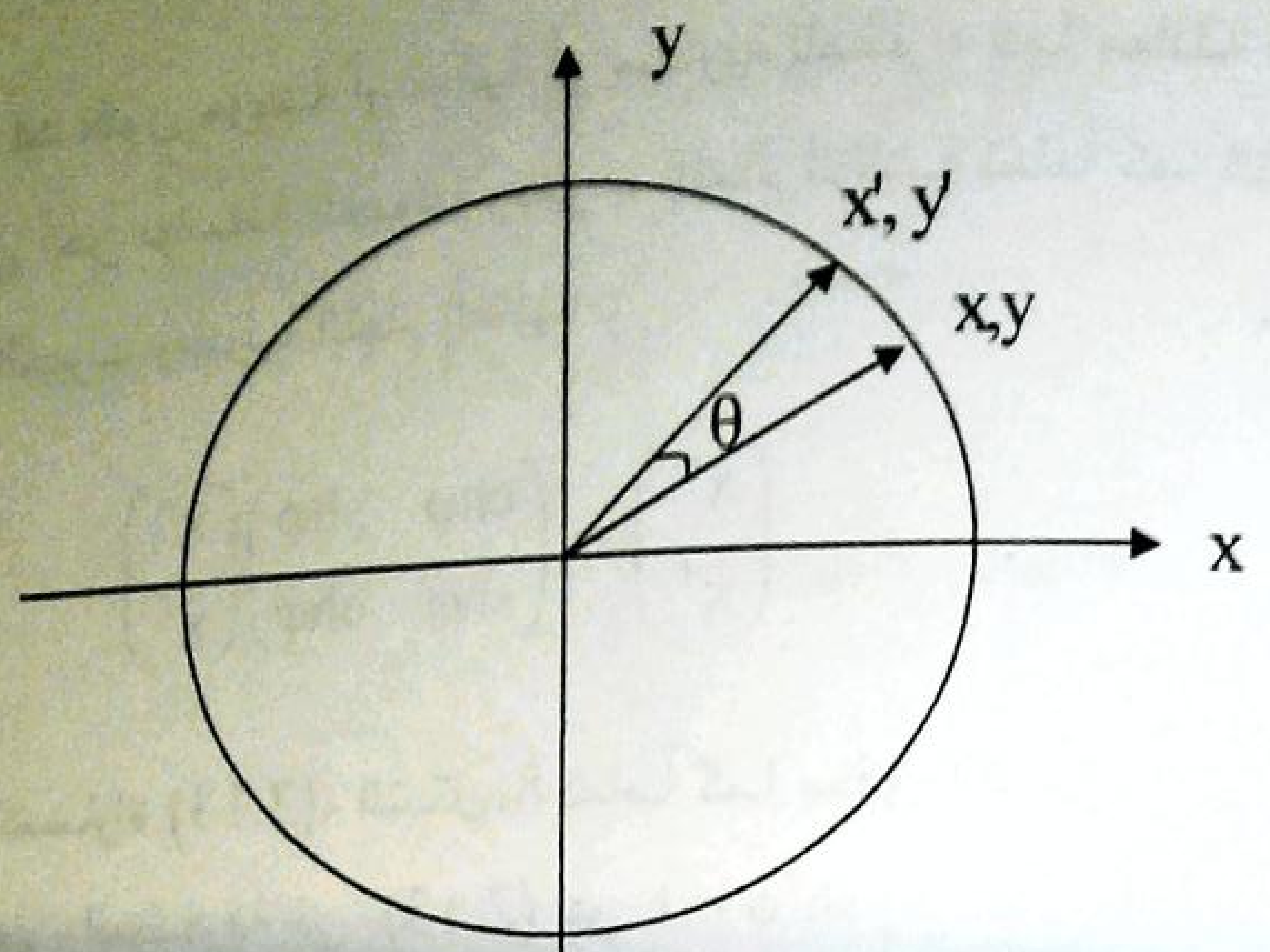
4.2– تحويلات لورانتس Lorentz :

علينا الآن إيجاد التحويلات التي تتيح لنا الانتقال من المقرن الغاليلي K، حيث المتجهات $(x^o, \vec{x})$ إلى المقرن الغاليلي 'K المتحرك بسرعة $\vec{V}$ ثابتة بالنسبة للأول وحيث المتجهات $(x^{o'}, \vec{x}')$. يجب أن تبقى معادلات الكهرطيسية صامدة، دون تغير في شكلها وأن تقبل تحويلات غاليلية كتقريب أولي لها، عندما تكون $V \ll C$، $(C \to \infty)$. تقع تحويلات غاليلية في الفضاء الإقليدي ذي الأبعاد الثلاثة الذي يتميز ببقاء المسافة بين نقطتين منه ثابتة – طويلة المتجهة ثابتة، والجداء السلمي لمتجهتين ثابت –، وبالانتقالات المؤلفة من انسحابات ودورانات التي تحافظ على هذه الميزة : $|\vec{X}|^2 = |\vec{X}'|^2$. ودرسنا زمرة الدورانات المحققة لذلك. بينا، على سبيل المثال، أن زمرة الدورانات الجزئية في المستوي XY هي

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 = \text{ثابتة} \quad (2.12)'$$

هذه الثابتة هي نصف قطر الدائرة R، الشكل.6 التي تعرفها المساواة؛ معين المصفوفة في (2.12) هو $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.



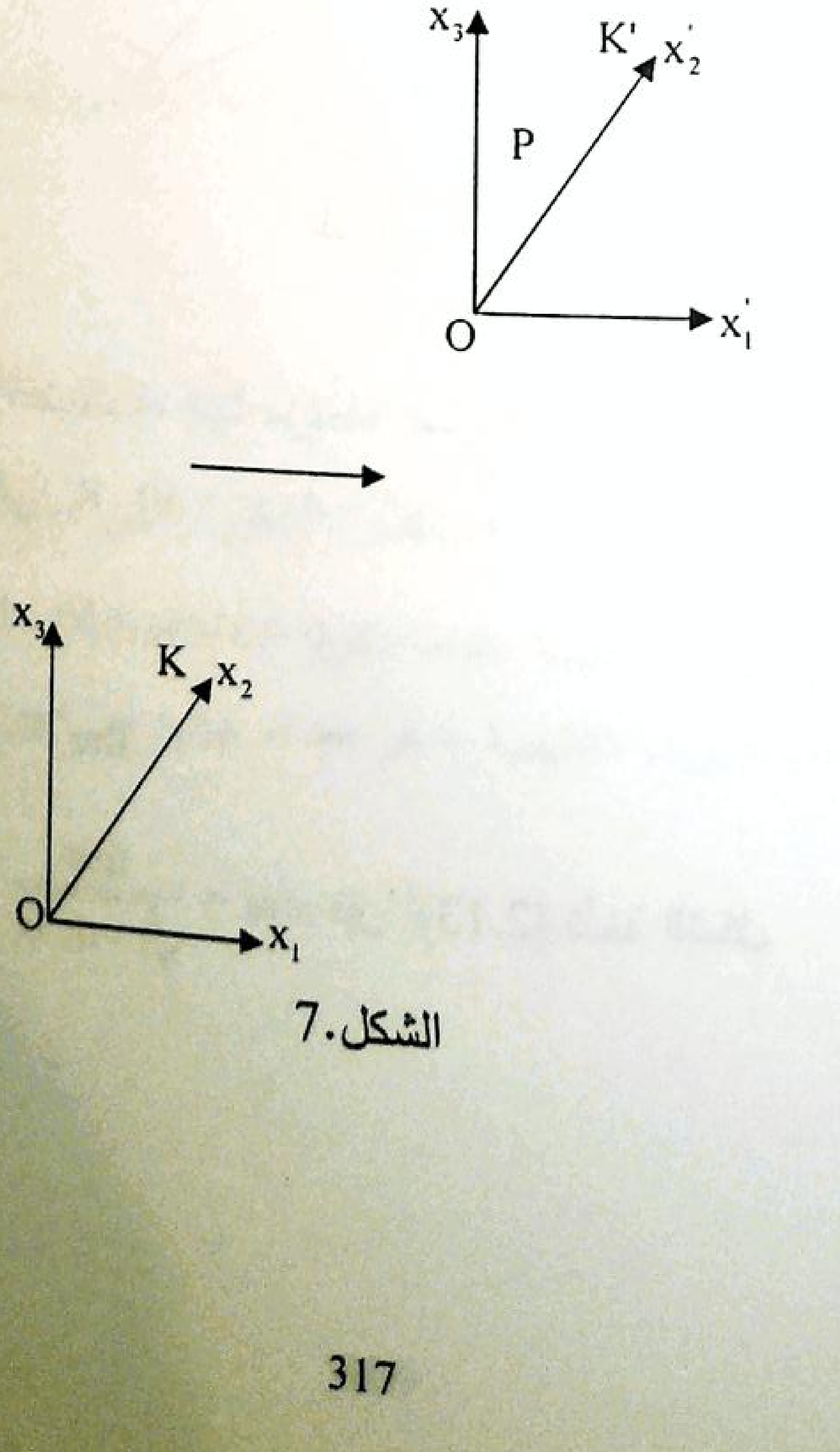
الشكل.6

رأينا في الرقم السابق أن المجال، وسنسميه مربع المسافة بين نقطتين من فضاء مينكوفسكي، ثابت أيضاً. هذا يعني أن الانتقال من مقرن غاليلي K إلى آخر K' هو دوران، علينا تعيينه في فضاء مينكوفسكي. وسنأخذ، للتبسيط والمقارنة، الدوران في المستوي x^1 و x^o، أي أننا سنأخذ متجهة سرعة المقرن K' موازية للمحور Ox^1، الشكل.7. وهكذا فلدينا من أجل أي جسيم P، أي مجال

$$x'^3 = x^3 \quad , \quad x'^2 = x^2$$

بحيث تأخذ المساواة '(2.5) الشكل

$$x^{o^2} - x^{1^2} = x'^{o^2} - x'^{1^2} \qquad (2.13)$$

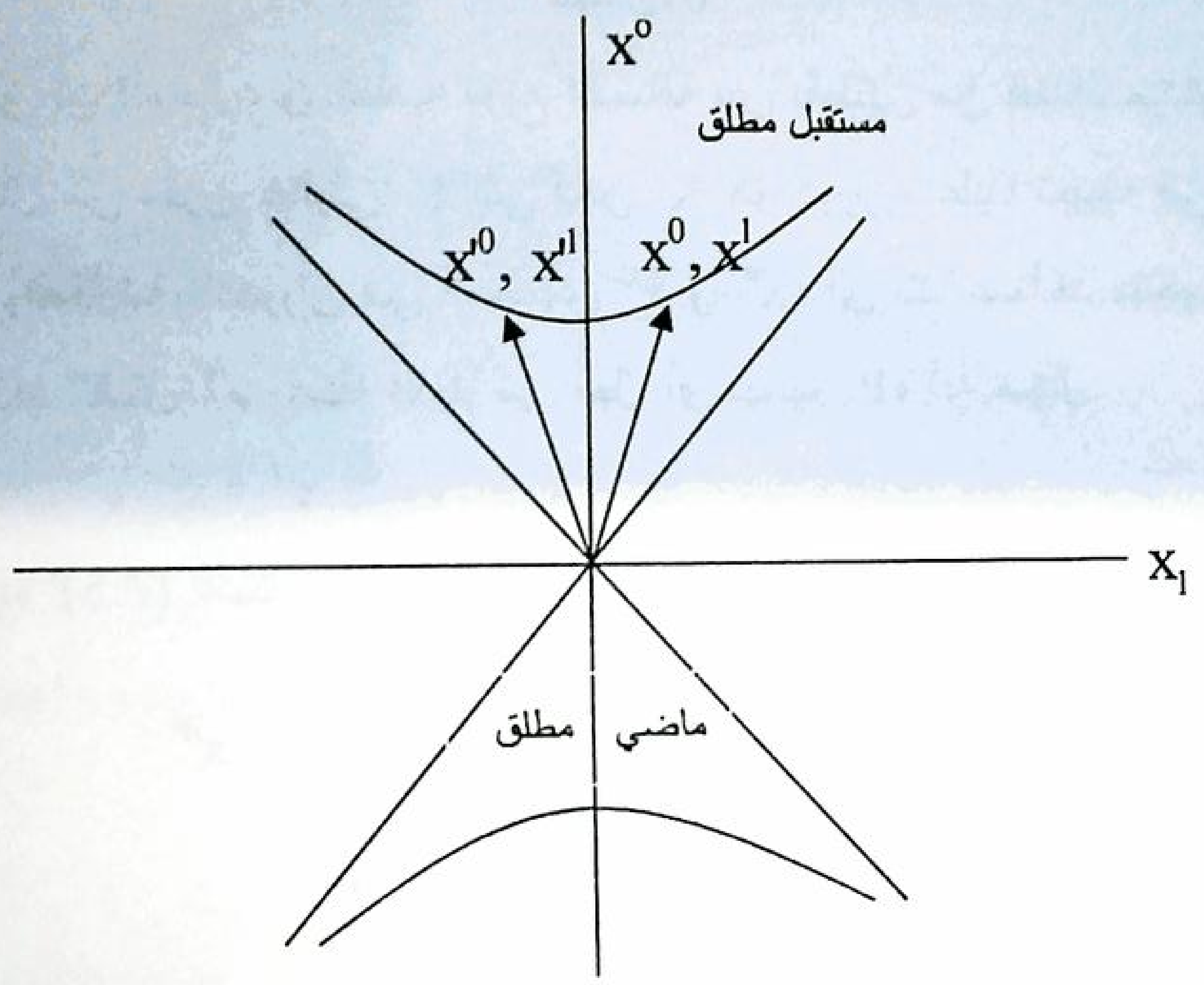


الشكل.7

وهي كما رأينا ثابتة قد تكون موجبة أو سالبة أو مساوية للصفر، إنها معادلة قطع زائد قائم تنتقل فيه النقاط من وضع إلى آخر بواسطة الجيوب وجيوب التمام الزائدية تماماً كما تنتقل من نقطة إلى أخرى على الدائرة بواسطة الجيوب وجيوب التمام العادية :

$$\begin{pmatrix} x'^{o} \\ x'^{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\varphi & sh\varphi \\ sh\varphi & ch\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{o} \\ x^{1} \end{pmatrix} \qquad (2.13)'$$

يحقق هذا التحويل المساواة (2.13)، الشكل.8 تماماً كما يحقق التحويل في الفضاء الإقليدي (2.12) المساواة '(2.12). معين المصفوفة في '(2.13) هو $ch^2\varphi - sh^2\varphi = 1$



الشكل.8

إن الزاوية الزائدية φ ليست اعتباطية، إنها مرتبطة بسرعة 'K بالنسبة لـ K ولذا فسنأخذ الجسيم P منطبقاً على نقطة المبدأ 'O في 'K $x^1 = Vt$ ، $x'^1 = 0$ بحيث تصبح معادلة x'^1 في '(2.13)

$$0 = x^o sh\varphi + Vt \cdot ch\varphi$$

أو

$$th\varphi = -\frac{V}{C} \qquad (2.14)$$

وبما أن $ch\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - th^2\varphi}}$ ، $sh\varphi = \frac{th\varphi}{\sqrt{1 - th^2\varphi}}$ فإن '(2.13) تأخذ الشكل

$$\begin{pmatrix} x'^{o} \\ x'^{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/C^2}} & \frac{-V/C}{\sqrt{1 - V^2/C^2}} \\ \frac{-V/C}{\sqrt{1 - V^2/C^2}} & \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/C^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{o} \\ x^{1} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

أي

$$x'^{o} = \frac{x^{o} - \frac{V}{C} x^{1}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \quad (2.16)$$

أو

$$t' = \frac{t - \frac{V}{C^2} x^{1}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \quad (2.16)'$$

و

$$x'^{1} = \frac{-\frac{V}{C} x^{o} + x^{1}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \quad (2.17)$$

أو

$$x'^{1} = \frac{x^{1} - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \quad (2.17)'$$

تعريف 5 :

نسمي التحويلات (18، 17، 2.16) تحويلات لورانتس الخاصة، وتسمى أيضاً دفعة Boost.

ملاحظة :

تنطبق هذه التحويلات على تحويلات غاليلية من أجل الجسيمات البطيئة $V << C$: $\frac{V^2}{C^2} \simeq 0$ والمخرج يساوي 1 في كل العلاقات؛ $\frac{V}{C^2} \simeq 0$ والصورة تساوي t في الطرف الثاني من '(2.16) $t' = t$ ويبقى $x'^{1} = x^{1} - Vt$ وهي تحويلات غاليلية عندما تكون $\vec{V}$ موازية لـ x_1. وهذا ما يبين لنا أن الفضاء الإقليدي بكل خواصه – فضاء الفيزياء التقليدية – هو فضاء جزئي من فضاء مينكوفسكي.

5.2- زمرة لورانتس وزمرة بوانكاريه Poincaré :

لنعد كتابة الجداء السلمي في فضاء مينكوفسكي بإدخال التانسور المتري

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (2.19)$$

ولنرمز لعناصره بـ $g_{\mu\upsilon}$ أو $g^{\mu\upsilon}$ حيث $g_{\mu\upsilon} = 0$ من أجل $\upsilon \neq \mu$، $g_{ii} = -1$ $i = 1,2,3$ $g^{\mu}_{\upsilon} = \delta^{\mu}_{\upsilon}$ (الرموز اليونانية υ، μ من 0 إلى 3 و اللاتينية i، j من 1 إلى 3).

نكتب المركبة في الفضاء الثنوي على الشكل

$$y_{\mu} = g_{\mu\upsilon} y^{\upsilon} \qquad (2.20)$$

$y_o = y^o$، $y_i = -y^i$ كما في '(2.8).

ونكتب الجداء السلمي $x \cdot y$ على الشكل

$$x \cdot y = x^{\mu} y_{\mu} = x^{\mu} g_{\mu\upsilon} y^{\upsilon} = g_{\mu\upsilon} x^{\mu} y^{\upsilon} \qquad (2.21)$$

الجمع على الأدلة υ، μ من الصفر إلى ثلاثة.

لتكن Λ مصفوفة لورانتس العامة التي تحفظ الجداء السلمي، مصفوفة 4×4

$$x' = \Lambda x$$
$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\upsilon} x^{\upsilon} \qquad (2.22)$$

يحدد لنا حفظ الجداء السلمي في فضاء مينكوفسكي المعبر عنه بالعلاقة

$$\begin{cases} x \cdot y = x' \cdot y' \\ g_{\rho\sigma} x^{\rho} y^{\sigma} = g_{\mu\upsilon} x'^{\mu} y'^{\upsilon} = g_{\mu\upsilon} \Lambda^{\mu}_{\rho} x^{\rho} \Lambda^{\upsilon}_{\sigma} y^{\sigma} \end{cases} \qquad (2.23)$$

عشر علاقات بين عناصر المصفوفة Λ هي

$$g_{\rho\sigma} = g_{\mu\upsilon} \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\upsilon}_{\sigma} \qquad (2.24)$$

(ρ, σ) : 0,0 ؛ 0,1 ؛ 0,2 ؛ 0,3 ؛ 1,1 ؛ 1,2 ؛ 1,3 ؛ 2,2 ؛ 2,3 ؛ 3,3

بحيث لا يبقى من عناصر المصفوفة الستة عشر سوى ستة عناصر مستقلة.

ترينا هذه العلاقة، من أجل $\rho = \sigma = 0$ أن

$$(\Lambda^{o}_{o})^2 = 1 + (\Lambda^{1}_{o})^2 + (\Lambda^{2}_{o})^2 + (\Lambda^{3}_{o})^2$$ أي أن $\Lambda^{o}_{o} \geq 1$ أو $\Lambda^{o}_{o} \leq -1$ (2.24)'

يمكننا التعبير عن العلاقة (2.24) بدليل المؤثر Λ وحده، بدون إدخال المركبات بأن نكتب الجداء السلمي $x \cdot y$ على شكل جداء داخلي $\langle x, Gy \rangle$ حيث x تنتمي إلى الفضاء و Gy إلى الفضاء الثنوي، ونذكر أن مصفوفة المؤثر تتحول إلى منقولها عندما ينتقل تأثيرها من فضاء ما إلى ثنويه لدينا

$$x \cdot y = \langle x, Gy \rangle = \langle x', Gy' \rangle = x' \cdot y'$$
$$= \langle \Lambda x, G\Lambda y \rangle$$
$$= \langle x, \tilde{\Lambda} G \Lambda y \rangle$$

ويتطلب تساوي الجداء السلمي أن تحقق المصفوفة Λ العلاقة

$$G = \tilde{\Lambda} G \Lambda \qquad (2.25)_1$$

التي نكتبها بضرب الطرفين على اليسار بـ $\tilde{\Lambda}^{-1}$ ثم على اليمين بـ G $(G^2 = I)$ على الشكل

$$\tilde{\Lambda}^{-1} = G \Lambda G \qquad (2.25)_2$$

أو بضرب الطرفين على اليمين بـ Λ^{-1} ثم على اليسار بـ G على الشكل

$$\Lambda^{-1} = G \tilde{\Lambda} G \qquad (2.25)_3$$

إن هذه الخاصة للمصفوفة Λ ذات السطور والأعمدة الأربعة تعميم لمصفوفة الدورانات 3×3 $A^{-1} = \tilde{A}$ ((4.(1.5)) حيث يستبدل التانسور المتري G بالمصفوفة الواحدية I (أو $-I$، لا فرق). إن كتابة العلاقة $(2.25)_1$ في نظمة محاور ما يعطينا العلاقة (2.24) :

$$g_{\rho\sigma} = \tilde{\Lambda}^{\rho}_{\mu} g_{\mu\upsilon} \Lambda^{\upsilon}_{\sigma} = \Lambda^{\mu}_{\rho} g_{\mu\upsilon} \Lambda^{\upsilon}_{\sigma}$$

تشكل المصفوفات Λ التي تحقق (2.25) زمرة نسميها زمرة لورانتس. إذا كانت المصفوفتان Λ و Λ' تحققان (2.25) فإن مصفوفة جداءهما $\Lambda'\Lambda$ تحققها أيضاً.

$$\widetilde{\Lambda'\Lambda} G \Lambda'\Lambda = \tilde{\Lambda} \tilde{\Lambda}' G \Lambda' \Lambda = \tilde{\Lambda} G \Lambda = G$$

وكذلك تحققها Λ^{-1} نظراً لكون $\widetilde{\Lambda^{-1}} = \tilde{\Lambda}^{-1}$ ولكون $G\Lambda^{-1} = \tilde{\Lambda} G$

$$\widetilde{\Lambda^{-1}} G \Lambda^{-1} = \tilde{\Lambda}^{-1} \tilde{\Lambda} G = G$$

العنصر الحيادي هو المصفوفة الواحدية 4×4 بطبيعة الحال، ومعين Λ حسب (2.25) هو

$$-1 = \det\tilde{\Lambda} \times -1 \times \det\Lambda$$
$$(\det \Lambda)^2 = 1 \qquad (2.26)$$

و

$$\det \Lambda = \pm 1$$

سنختار الإشارة + كما فعلنا في زمرة الدورانات؛ هذا من جهة، وسنختار من جهة ثانية $\Lambda^{\circ}_{\circ} \geq 1$ كما تسمح لنا العلاقة $(2.24)'$ بفعله.

مبرهنة 1 :

إن تحويلات لورانتس السببية هي التي يتحقق فيها $\Lambda^o_o \geq 1$.

$$x'^o = \Lambda^o_\mu x^\mu = \Lambda^o_o x^o + \Lambda^o_1 x^1 + \Lambda^o_2 x^2 + \Lambda^o_3 x^3 \qquad (2.27)$$

البرهان

ولكن

$$\left(\Lambda^o_1 x^1 + \Lambda^o_2 x^2 + \Lambda^o_3 x^3\right)^2 \leq \left[\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + \left(x^3\right)^2\right]\left[\left(\Lambda^o_1\right)^2 + \left(\Lambda^o_2\right)^2 + \left(\Lambda^o_3\right)^2\right]$$

حسب متراجحة كوشي-شفارتز [2].

إن الحد الأول بين المعقوفتين في طرف المتراجحة الأيمن أصغر أو يساوي $\left(x^o\right)^2$ كما تقتضيه السببية، والحد الثاني هو $\left(\Lambda^o_o\right)^2 - 1$، انطلاقاً من (2.24) المكتوبة على الشكل $g^{\sigma\rho} = g^{\mu\nu}\Lambda^\rho_\mu\Lambda^\sigma_\nu$ وأخذ $\rho = \sigma = 0$ أي أن

$$\left(\Lambda^o_1 x^1 + \Lambda^o_2 x^2 + \Lambda^o_3 x^3\right)^2 \leq \left(x^o \Lambda^o_o\right)^2$$

وبالتالي فإن إشارة x'^o تحددها إشارة $\Lambda^o_o x^o$: إشارة x'^o هي نفس إشارة x^o إذا كانت $\Lambda^o_o \geq 1$ وإلا فالإشارتان متعاكستان.

إن اختيارنا $\Lambda^o_o \geq 1$ يعني إذاً أننا نحول المتجهات في المستقبل إلى متجهات في المستقبل ونقول عن هذه المتجهات إنها قائمة التوقيت orthochrone والمتجهات في الماضي $x^o < 0$ إلى متجهات الماضي ونقول عنها إنها مضادة التوقيت antichrone.

لدينا إذاً أربعة أنواع مختلفة في زمرة لورانتس حسب إشارة المعين وإشارة Λ^o_o يطلق على النوع الذي اخترناه، $\det \Lambda = +1$ و $\Lambda^o_o \geq 1$، اسم زمرة لورانتس المقصورة restreint ونرمز لها بـ $L^\uparrow_+$، أما الأنواع

---

[2] برهنا هذه المتراجحة في الحالة الخاصة، في الفضاء الإقليدي R^3 عندما بينا أن مربع الجداء السلمي لمتجهتين أصغر من جداء مربع الطويلتين. لدينا بصورة عامة من أجل أي عدد n

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

إن هذه المتراجحة ناتجة عن المتطابقة التالية

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_i b_j - a_j b_i\right)^2$$

هذه المتطابقة صحيحة وضوحاً من أجل n=2، نفترض صحتها من أجل n لا على التعيين ثم نبرهن أنها صحيحة من أجل n+1. لدينا

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + a_{n+1}b_{n+1}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 + a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 + 2a_{n+1}b_{n+1}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

وبما أن فرضنا صحة المتطابقة من أجل n فإن الطرف الثاني هو

$$= \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 \sum_{j=1}^{n+1} b_j^2 - a_{n+1}^2\sum_{j=1}^{n} b_j^2 - b_{n+1}^2\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_i b_j - b_i a_j\right)^2 + 2a_{n+1}b_{n+1}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

نرى بسهولة أن

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n+1}\left(a_i b_j - b_i a_j\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_i b_j - b_i a_j\right)^2 = a_{n+1}^2\sum_{j=1}^{n} b_j^2 + b_{n+1}^2\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2a_{n+1}b_{n+1}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

والمتطابقة صحيحة من أجل كل n.

الثلاثة الأخرى فتتضمن الانتقال من المحاور المباشرة إلى غير المباشرة $\vec{x} \to -\vec{x}$، أو قلب الزمن $x^o \to -x^o$ أو قلب الاثنين معاً $x^o, \vec{x} \to -x^o, -\vec{x}$.

مبرهنة 2 :

إن كل عنصر Λ من $L_+^\uparrow$، كل تحويل من مقرن غاليلي K إلى مقرن غاليلي آخر K' هو من الشكل

$$\Lambda = \mathcal{A}' B \mathcal{A} \qquad (2.28)$$

حيث $\mathcal{A}, \mathcal{A}' \in SO(3)$ و B تحويل خاص للورانتس.

لتكن X_1، X_2، X_3 محاور المقرن الغاليلي K' الذي يسير بسرعة منتظمة $\vec{V}$ بالنسبة لـ K ندير جملة المحاور هذه بحيث تنطبق المتجهة $\vec{V}$ على اتجاه المحور Ox^1 في K ولتكن $\mathcal{A}$ مصفوفة هذا الدوران 3×3، نكتبها في فضاء مينكوفسكي على الشكل

$$\mathcal{A}\left(x^o, X^1, X^2, X^3\right) = \left(x^o, x^1, x^2, x^3\right)$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \mathcal{A} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

حيث ترتبط عناصر الصف الأول والعمود الأول بـ x^o : $a_o^o = 1$ لأن x^o ثابت.

نطبق الآن على $\left(x^o, \vec{x}\right)$ التحويل الخاص B '(2.13) المكتوب بأربعة أبعاد

$$B\left(x^o, x^1, x^2, x^3\right) = \left(x'^o, x'^1, x'^2, x'^3\right) \quad B = \begin{pmatrix} ch\varphi & sh\varphi & 0 & 0 \\ sh\varphi & ch\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وننتقل أخيراً من $\left(x'^o, x'^1, x'^2, x'^3\right)$ إلى $\left(x'^o, X^1, X^2, X^3\right)$ بمصفوفة $\mathcal{A}'$ مشابهة لـ $\mathcal{A}$ فنحصل على (2.28).

تعريف 6 :

نسمي زمرة بوارنكاريه في فضاء مينكوفسكي، الفضاء التآلفي شبه الأقليدي ذي الأبعاد الأربعة، الزمرة المؤلفة من الانسحابات في هذا الفضاء $a = \left(a^o, \vec{a}\right)$ ومن زمرة لورانتس ونرمز لعناصر هذه الزمرة كما في الفضاء الإقليدي العادي بـ (Λ, a) ولقانون الجداء بـ

$$(\Lambda', a')(\Lambda, a) = (\Lambda'\Lambda, \Lambda' a + a') \qquad (2.29)$$

للعنصر الحيادي بـ (I, O) وللمقلوب بـ

$$(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) \qquad (2.30)$$

إن عدد العناصر المستقلة في هذه الزمرة هو عشرة (ستة للمصفوفة Λ و أربعة للانسحاب) وتحدد هذه العناصر عشرة مقادير فيزيائية منخفظة : الستة الأولى هي : متجهة العزم الزاوي (ثلاثة مقادير) ناتجة عن تناحي الفضاء الإقليدي – مصفوفة الدوران $\mathcal{A} \supset L_+^{\uparrow}$ ؛ ومتجهة أخرى ناتجة عن تحويلات لورانتس الخاصة، عن الانتقال من مقرن غاليلي إلى آخر أي عن الدوران في المكان–الزمان– هي متجهة السبين – العزم الزاوي الداخلي – أما المقادير الأربعة المنخفظة الأخرى الناتجة عن تجانس الزمان–المكان فهي كما في الفيزياء التقليدية الطاقة والاندفاع الخطي اللذان يكونان معاً متجهة بأربعة أبعاد في فضاء مينكوفسكي كما سنرى.

6.2– تركيب السرعات :

يمكننا انطلاقاً من (2.16) – '(2.17) حساب سرعة الجسيم بالنسبة للإحداثيات $(x^o, \bar{x})$، أي بالنسبة للمقرن الغاليلي K وميقاتيته بعد أن حسبناها بالنسبة لـ $(x'^o, \bar{x}')$. يكفي لذلك استبدال $-\bar{V}$، سرعة K بالنسبة لـ K'، بـ $\bar{V}$، سرعة K' بالنسبة لـ K.

لدينا

$$t = \frac{t' + \frac{V}{C^2}x'^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \quad ; \quad x^1 = \frac{x'^1 + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \qquad (2.31)$$

$$x^3 = x'^3 \quad ; \quad x^2 = x'^2$$

ليكن x'^1 و x'^2 طرفا مسطرة موازية لـ Ox'^1، قيس طولها في K' في اللحظة t'، $x'^2 - x'^1 = \Delta x'$. لدينا من (2.31)

$$\Delta x' = \Delta x\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}} \quad ; \quad \Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \qquad (2.31)'$$

ونجد تقلص الأطوال في الجملة المتحركة، الذي اقتُرح لتفسير فشل تجربة مايكلسون.

لنعد إلى (2.31)، لدينا

$$V_1 \equiv V_{x^1} = \frac{dx^1}{dt} = \frac{d}{dt'}\left(\frac{x'^1 + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}}\right)\frac{dt'}{dt} = \frac{V_1' + V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}}\frac{dt'}{dt}$$

لكن

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1 - V_1 \frac{V}{C^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \quad ; \quad \frac{dt}{dt'} = \frac{1 + V_1' \frac{V^2}{C^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \qquad (2.32)$$

ومنه

$$V_1 = \frac{V_1' + V}{1 + V_1' \frac{V}{C^2}} \qquad (2.33)_1$$

لدينا كذلك

$$\frac{dx^2}{dt} = V_2 = \frac{dx'^2}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{V_2' \sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}}{1 + V_1' \frac{V}{C^2}} \qquad (2.33)_2$$

حيث عبرنا عن $\frac{dt'}{dt}$ بدليل V_1' بأخذ مقلوب العلاقة الثانية في (2.32).

وأخيراً

$$\frac{dx^3}{dt} = V_3 = \frac{V_3' \sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}}{1 + V_1' \frac{V}{C^2}} \qquad (2.33)_3$$

وهنا أيضاً يكفي استبدال $\vec{V}$- بـ $\vec{V}$ للحصول على السرع V_i' بدليل V_i.

تحل هذه الصيغ محل صيغ تركيب السرع $\vec{V}_a = \vec{V}' + \vec{V}$، حيث أطلقنا على $\vec{V}'$ و $\vec{V}$ اسم السرعة النسبية وسرعة الجر على الترتيب، الناتجة عن تحويلات غاليلية، والتي نحصل عليها من جديد عندما نضع $C = \infty$ في العلاقات (2.33).

$$V_1 = V_1' + V \quad ; \quad V_2 = V_2' \quad ; \quad V_3 = V_3'$$

أما عندما تصل سرعة الجسيم في K' إلى سرعة الضوء، ولنفرض أنها في اتجاه Ox_1'، $\vec{V}' = (C, 0, 0)$ فإن العلاقات (2.33) تعطينا

$$V_1 = \frac{C + V}{1 + C\frac{V}{C^2}} = C \quad ; \quad V_2 = V_3 = 0 \quad \text{و} \quad \vec{V} = (C, 0, 0)$$

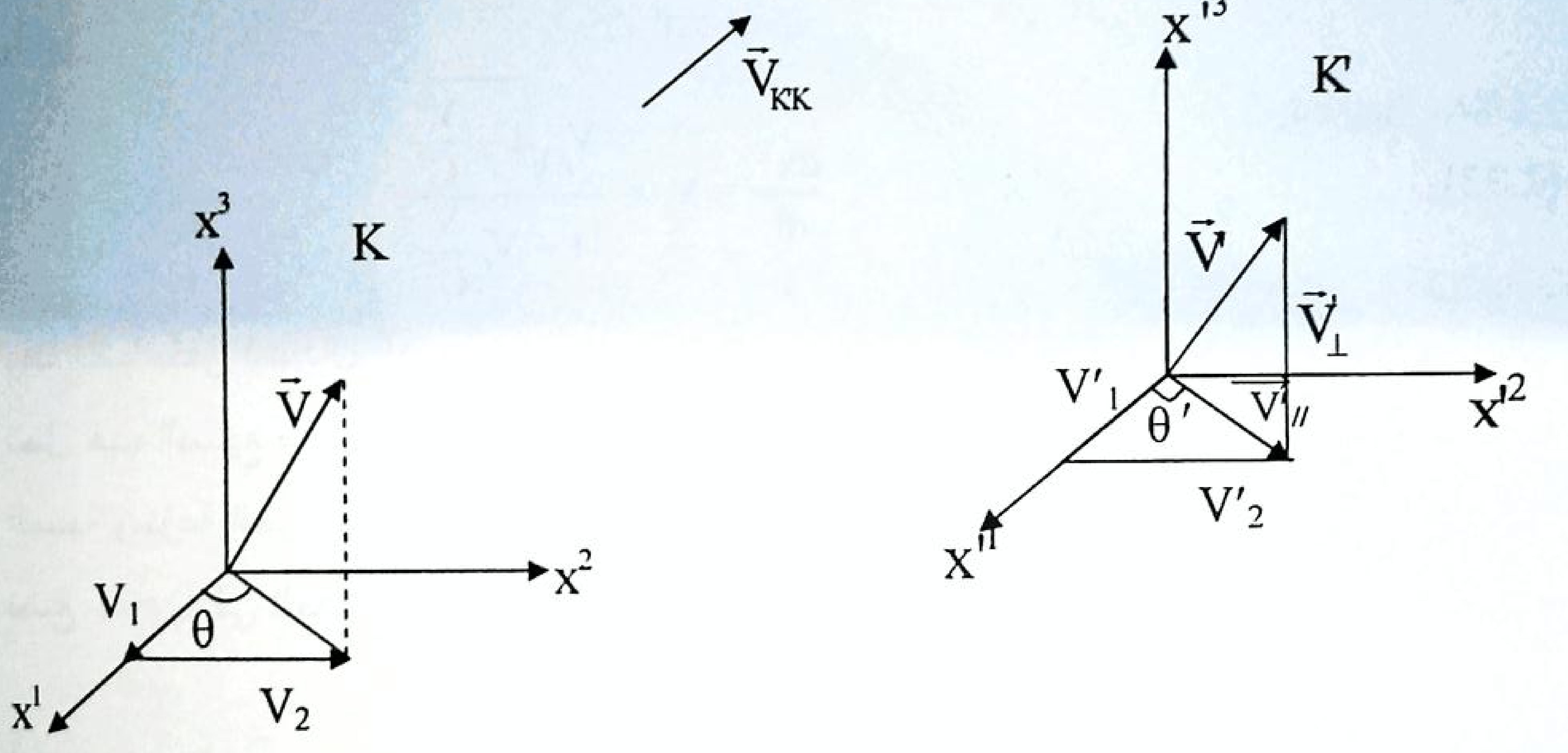
ينتشر الضوء إذاً بنفس السرعة C في كل المقارن الغاليلية، على اتفاق تام مع نتائج مبدئي النسبية A و B.

إن جمع السرعات الذي جعلنا نكتب $C + V$ و $C - V$ خاطئ إذاً. وعلينا أن نكتب عوضاً عن (1.6) التي قادتنا إلى فشل تجربة مايكلسون العلاقة التالية في المقرن K' (الأرض).

$$r = r' = 2\ell = Ct = C\left(\frac{\ell}{C} + \frac{\ell}{C}\right)$$

لنلاحظ أيضاً أن المسافة بين النقطة O والمرآة m_2 ذات الطول ℓ في المقرن K' هي $\frac{\ell}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}$ في المقرن K حسب العلاقة (2.31) وتساوي تماماً للمسافة Om_1 $L=\frac{\ell}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}$ مما يفسر أيضاً عدم وجود ظاهرة التداخل سواء بالنسبة للمراقب في K' أو بالنسبة للمراقب في K.

تمكننا العلاقات (2.33) من حساب الزاوية التي تعملها متجهة السرعة $\vec{V}$ مع أحد المحاور، Ox^1 مثلاً، في الجملة K بدليل الزاوية التي تعملها متجهة السرعة $\vec{V}'$ مع المحور Ox'' في الجملة K' المتحركة بسرعة $\vec{V}_{K'K}$ موازية لـ Ox^1، الشكل.9.



الشكل.9

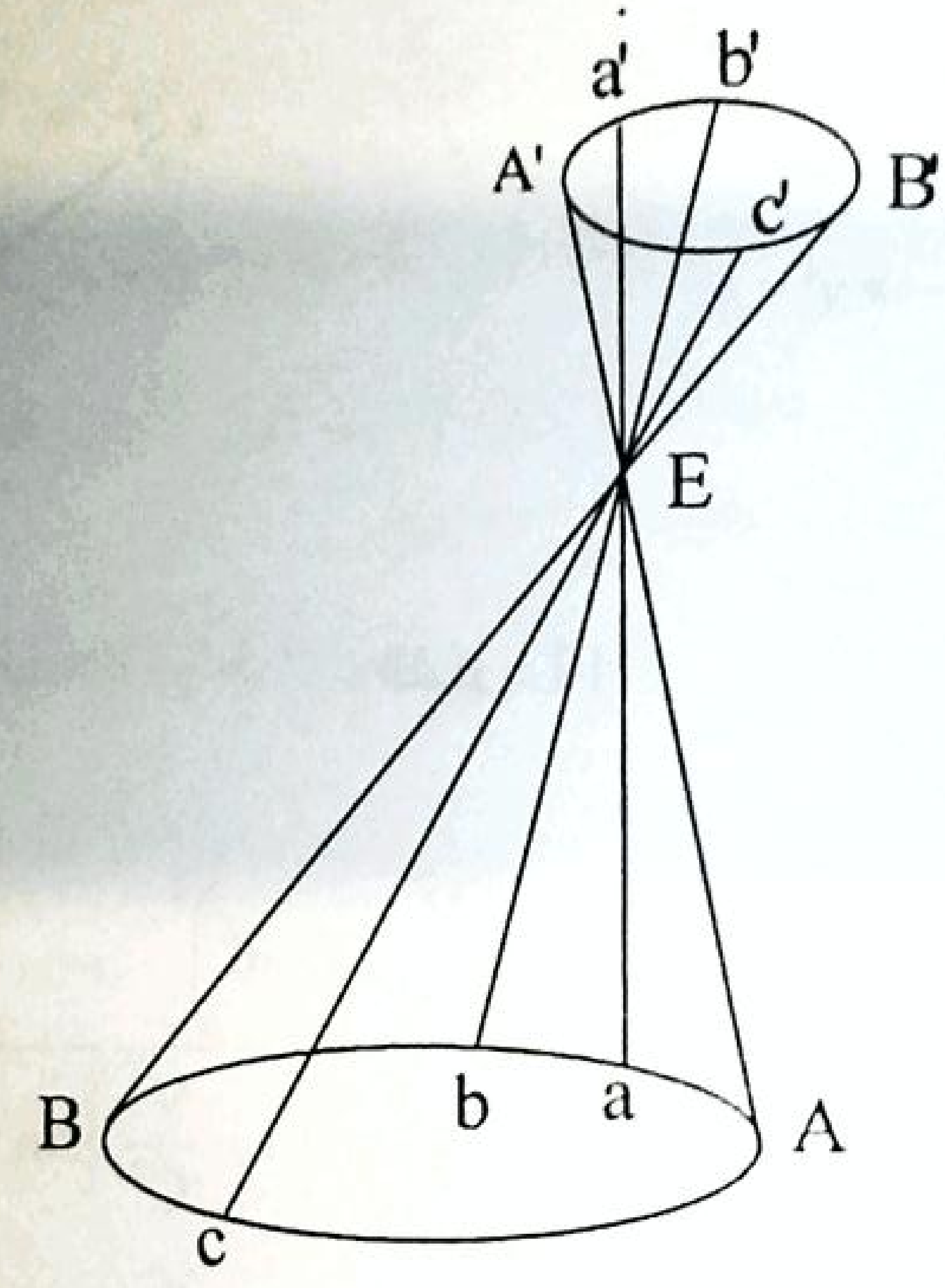
لدينا من $(2.33)_1$ و $(2.33)_2$

$$tg\theta=\frac{V_2}{V_1}=\frac{V_2'\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{V_1'+V}=\frac{V_{\parallel}'\sin\theta'\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{V_{\parallel}'\cos\theta'+V}\qquad(2.34)$$

حيث $V_{\parallel}'$ هو مسقط V' على المستوي (x'^1, x'^2).

7.2- الزيغ الضوئي:

لنبدأ بالتذكير بظاهرة اختلاف اللوص Parallax. إنه الزاوية المجسمة التي يحدثها المخروط المولد من قبل خطوط النظر المختلفة من نقاط المدار الأرضي إلى نجم ثابت E. إنه اختلاف اللوص السنوي، يسمى مسقطه على القبة السماوية مدار النجم اللوصي وهو مدار إهليلجي بصورة عامة، الشكل.10.

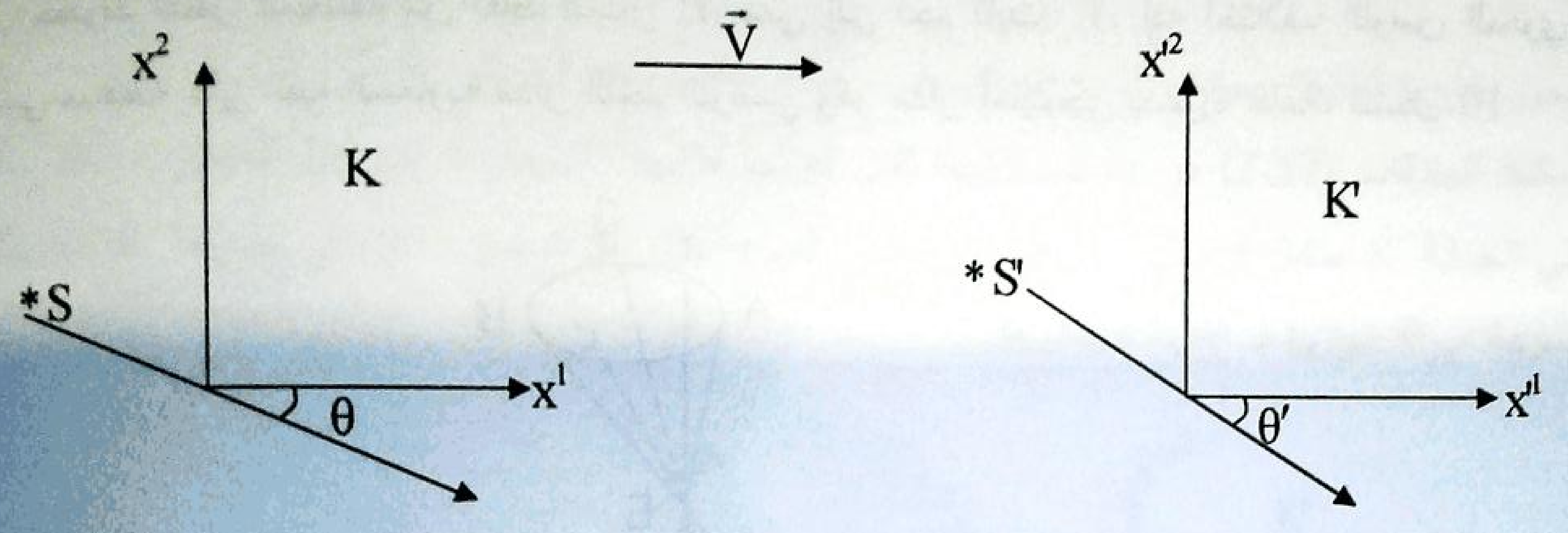


الشكل.10

إن ظاهرة الزيغ الضوئي هي أيضاً قطع ناقص يرسمه النجم على القبة السماوية إلا أن منشأها هو اختلاف الزاوية التي يرى النجم من خلالها بين مقرن غاليلي وآخر. وهي ظاهرة يمكن رصدها حتى لو كان النجم في اللانهاية خلافاً لاختلاف اللوص الذي لا يرصد إلا إذا كان بُعد النجم منتهياً. رُصد الزيغ الضوئي للمرة الأولى في عام 1725 من قبل برادلي Bradley. وقد نشر شرحه لهذه الظاهرة عام 1728 وتفسره النسبية الخاصة انطلاقاً من (2.34)، الشكل.11.

لتكن θ الزاوية التي يعملها الضوء الآتي من النجم S مع المحور Ox^1 في المقرن الغاليلي K المرتبط بالشمس. سنأخذ كمستوي x^1x^2 المستوي المكون من Ox^1، الموازي لـ $\vec{V}$، متجهة سرعة K' بالنسبة لـ K ومن الخط الكوني للفوتون – استقامة الشعاع الضوئي. لدينا نفس السرعة النسبية بالنسبة لـ K و K'. $C = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2} = \sqrt{V_1'^2 + V_2'^2 + V_3'^2}$

$$tg\theta = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}\sin\theta'}{\frac{V}{C} + \cos\theta'} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad (2.35)$$



الشكل.11

ومنه

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1 + tg^2\theta} = \frac{\left(\frac{V}{C} + \cos\theta'\right)^2}{\left(\frac{V}{C} + \cos\theta'\right)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{C^2}\right)\sin^2\theta'}$$

$$\cos\theta = \frac{\frac{V}{C} + \cos\theta'}{1 + \frac{V}{C}\cos\theta'} \qquad (2.36)$$

وبالتبديل في (2.35) نجد :

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}\sin\theta'}{1 + \frac{V}{C}\cos\theta'} \qquad (2.37)$$

ومنه بإهمال ما هو من الدرجة الثانية بـ $\frac{V}{C}$؛ $\frac{V^2}{C^2} = 10^{-8}$.

$$\sin\theta' - \sin\theta = \frac{V}{C}\cos\theta'\sin\theta' \qquad (2.38)$$

وضعنا $\sin\theta'$ عوضاً عن $\sin\theta$ لأن الفرق بينهما متناسب مع $\frac{V}{C}$ وجداؤه مع $\frac{V}{C}$ مهمل.
يتناسب الطرف الثاني مع $\frac{V}{C} = 10^{-4}$ وبالتالي فإن $\theta \approx \theta'$ وسنكتب $\theta' = \theta + \Delta\theta$ بحيث تصبح هذه العلاقة

$$\sin\theta\cos\Delta\theta + \cos\theta\sin\Delta\theta - \sin\theta = \frac{V}{C}(\cos\theta\cos\Delta\theta - \sin\theta\sin\Delta\theta)\sin\theta'$$

وبأخذ $\cos\Delta\theta \approx 1$ نجد

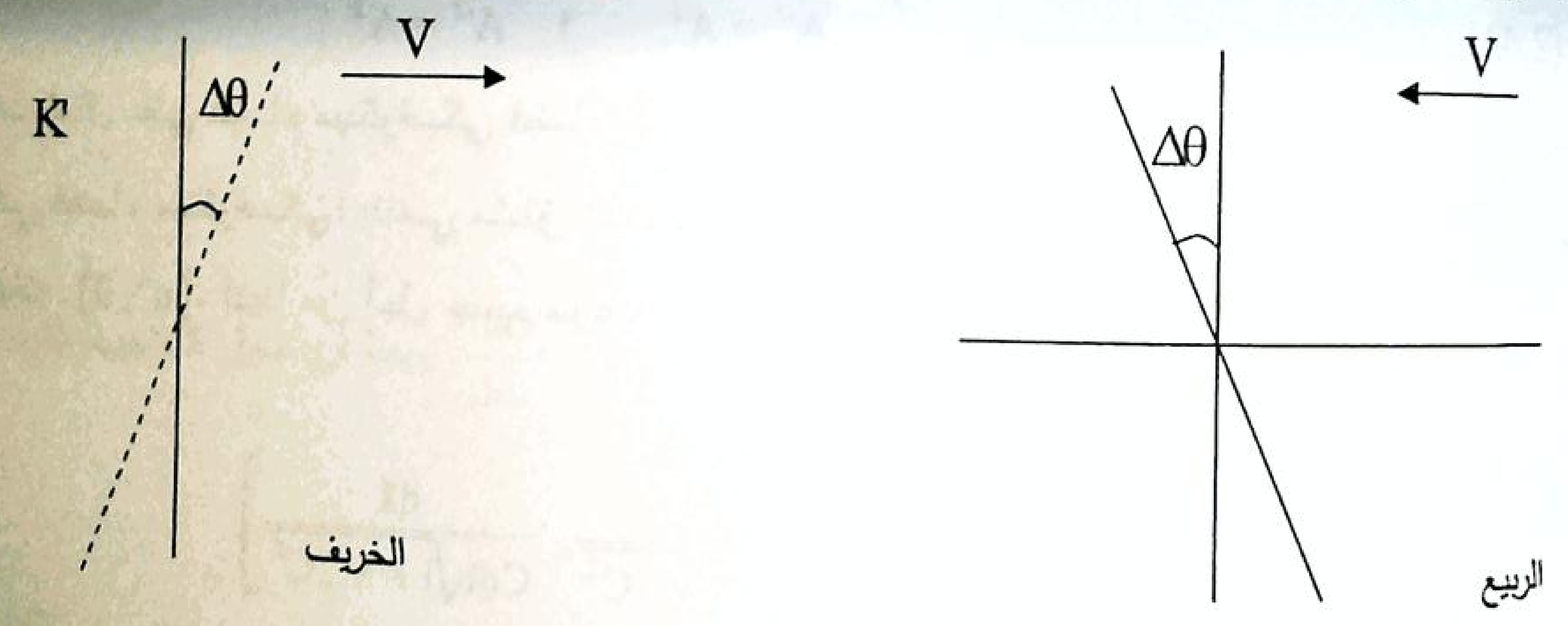
$$\cos\theta\sin\Delta\theta = \frac{V}{C}\cos\theta\sin\theta' - \frac{V}{C}\sin\theta\sin\theta'\Delta\theta$$

وبما أن $\sin\Delta\theta = \Delta\theta$، فإن الحد الثاني مهمل لأنه من الدرجة الثانية بـ $\Delta\theta$، ومنه

$$\Delta\theta = \left(\frac{V}{C}\right)\sin\theta'$$

هذه هي الصيغة الابتدائية المعروفة لزيغ الضوء. لنفرض أن النجم في السمت $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$. يجب إمالة المقراب الذي يرصده بزاوية مقدارها $\Delta\theta = \frac{V}{C}$ في الخريف، وزاوية مقدارها $\Delta\theta = -\frac{V}{C}$ في الربيع، الشكل.12؛ ومدار النجم الظاهري في هذه الحالة دائرة ترى من الأرض من خلال الزاوية $2\Delta\theta$ -نصف القطر الظاهري للمدار بالراديان $\Delta\theta = 10^{-4}$ - أي $20,5''$.

يمكن مقارنة هذه الظاهرة بالسقوط الشاقولي للمطر وبضرورة إمالة المظلة في اتجاه الحركة عوضاً عن إبقائها في الوضع الشاقولي.



الشكل.12

8.2- المتجهات بأربع مركبات – فضاءات مينكوفسكي :

أشرنا مرات عديدة إلى فضاءات إقليدية متعددة الأبعاد، رمزنا لها بـ R^n، $n=1,2,3...$، إنها الفضاءات المتجهية التي عُرّف فيها الجداء السلمي وطويلة المتجهة الموجبة أو المساوية للصفر عندما تكون المتجهة مساوية للصفر، وعرف فيها الدوران بمصفوفات $n\times n$ لها نفس خواص مصفوفات الدوران في R^3، الخ. وهكذا فالفضاء R^3 مثلاً ليس هو الفضاء الفيزيائي – المكان المعرف بالطول والعرض والارتفاع – وحده، وإنما أي مجموعة لثلاثة أعداد حقيقية تتمتع بنفس الخواص. وهنا أيضاً فإن فضاء

مينكوفسكي ليس هو فضاء المكان–الزمان $(x^\circ, \vec{x})$ وحده وإنما فضاء أي مجموعة مؤلفة من أربعة أعداد حقيقية $(A^\circ, \vec{A})$، $(B^\circ, \vec{B})$،... يعرف الجداء السلمي بينها بالعلاقات (2.8) :

$$A^\circ B^\circ - \vec{A} \cdot \vec{B} = A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu \tag{2.40}$$

والتي تتحول في الانتقال من مقرن غاليلي K إلى مقرن غاليلي آخر K' بمصفوفة من زمرة دورانات لورانتس تحفظ الجداء السلمي وطويلة المتجهة، الموجبة أو السالبة أو المساوية للصفر،

$$AB = A'B' = \text{ثابتة} \tag{2.41}$$

وتتحول، على سبيل المثال، في تحويلات لورانتس الخاصة $\vec{V} \parallel Ox'$ على الشكل (2.16) و(2.17)

$$A'^\circ = \frac{A^\circ - \frac{V}{C} A^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \tag{$(2.41)_1$}$$

$$A'^1 = \frac{A^1 - \frac{V}{C} A^\circ}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \tag{$(2.41)_2$}$$

$$A'^3 = A^3 \quad ; \quad A'^2 = A^2 \tag{$(2.41)_3$}$$

لنأخذ كمثل على فضاء مينكوفسكي فضاء السرعة، فضاء تقسيم المتجهة $(x^\circ, \vec{x})$ على المقدار السلمي s في فضاء مينكوفسكي؛ ينتمي مشتق المتجهة إلى فضاء لمينكوفسكي (ثنوي الفضاء الأول). ولتكن مركباته $(u^\circ, \vec{u})$. لدينا من أجل جسيم سرعته $\vec{v}$ في K و dS المرتبط فيه محدد بزمنة الذاتي :

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{Cdt\sqrt{1 - v^2/C^2}} = \left(\frac{dx^\circ}{Cdt\sqrt{1 - v^2/C^2}}, \frac{d\vec{x}}{Cdt\sqrt{1 - v^2/C^2}}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/C^2}}, \frac{\vec{v}}{C\sqrt{1 - v^2/C^2}}\right) \equiv (u^\circ, \vec{u}) \end{aligned}\right. \tag{2.42}$$

تتغير هذه المركبات حسب $(2.41)_{1,2,3}$ عندما ننتقل من K إلى K' بالسرعة $\vec{V}$.

$$u'^\circ = \frac{u^\circ - \frac{V}{C} u^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} - \frac{\frac{V}{C} v_1}{C\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}}\right) \tag{$(2.43)_1$}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \cdot \frac{1}{C\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} \left(C - \frac{V}{C} v_1\right) \tag{$(2.43)'_1$}$$

$$u'' = \frac{u' - \frac{V}{C}u^{o}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \cdot \frac{1}{C\sqrt{1-\frac{v^2}{C^2}}}(v_1 - V) \qquad (2.43)_2$$

$$u'^3 = u^3 \quad ; \quad u'^2 = u^2 \qquad (2.43)_3$$

يمكننا الوصول إلى هذه النتائج مباشرة باشتقاق المتجهة $(x'^o, \bar{x}')$. لدينا نظراً لتساوي dS و dS'

$$u' = \frac{dx'}{ds'} = \frac{dx'}{ds} = \frac{1}{Cdt\sqrt{1-\frac{v^2}{C^2}}}\left(x'^o, \bar{x}'\right)$$

و

$$u'^o = \frac{d}{Cdt\sqrt{1-\frac{v^2}{C^2}}}\left(\frac{x^o - \frac{V}{C}x^1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\right)$$

$$= \frac{1}{C\sqrt{1-\frac{v^2}{C^2}}}\frac{\left(C - \frac{V}{C}v^1\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}$$

وهي نفس النتيجة $(2.43)_1$.

إن مربع متجهة السرعة ثابت طبعاً ويساوي 1 حسب (2.42).

$$u^2 = u^{o^2} - |\bar{u}|^2 = 1$$

نُعرّف ونحسب بنفس الطريقة متجهة التسارع الرباعية $(a^o, \bar{a}) = \frac{du}{ds}$. وبما أن طول المتجهة ثابت في فضاء مينكوفسكي $A^2 =$ ثابت فإن

$$A\frac{dA}{ds} = 0$$

وكل متجهة عمودية على متجهة سرعتها – بمعنى انعدام الجداء السلمي –، وهكذا فمتجهة التسارع الرباعية عمودية على متجهة السرعة الرباعية.

3. الميكانيك النسبوي

1.3- الصياغة بأربعة أبعاد :

رأينا منذ الفصل الأول ضرورة اتساق العلاقات الفيزيائية البُعدي : يجب أن يكون لطرفي المعادلة نفس الأبعاد، أن يعبرا عن نفس المقادير. يجب أيضاً بطبيعة الحال أن يكون التعبير الرياضي متسقاً فيها، فلا معنى، مثلاً أن يكون أحد الطرفين مقداراً سلمياً والآخر متجهياً بثلاثة أبعاد، ويجب ثالثاً أن يبدو جلياً في

التعبير الرياضي قوانين الانحفاظ. وهكذا نرى في الفيزياء التقليدية معادلات طرفاها سلميان – وهذا حال كل قوانين الترموديناميك –، لا يتغيران تعريفاً نتيجة الانسحاب أو الدوران؛ أو طرفاها متجهيان – كقانون نيوتن مثلاً –، يتغيران على نفس النحو، بنفس المصفوفة في حالة الدوران وبنفس المتجهة الإضافية في حالة الانسحاب ولا يتأثران بتحويلات غاليلية. يمكن أن يكون طرفا المعادلة الفيزيائية متجهات أعم من المتجهات بثلاثة أبعاد، بمتجهات بتسعة أبعاد مثلاً نسميها الجداء التانسوري[3] من الرتبة الثانية للفضائين الإقليدين : $E^{\otimes 2} = E_1 \otimes E_2$. تتحول التانسورات بتسعة أبعاد أو 27 بعداً $3\times3\times3$، بنفس الشكل في حال الدوران ونقول إنها فضاءات تمثيل زمرة الدورانات.

يقع الأمر نفسه في النسبية، يجب أن تكون المعادلات سلمية في فضاء مينكوفسكي أو متجهية بأربعة أبعاد أو منتمية لأي تمثيل لزمرة لورانتس، بحيث نضمن عدم تغير شكلها نتيجة تطبيق مصفوفة تنتمي لهذا التمثيل عليها. ونعبر عن ذلك بقولنا إنها خاصة مسايرة التغيير Covariance النسبية.

يمكن تمثيل زمرة لورانتس (المصفوفات 4×4) المعرفة بـ (2.28) بمصفوفات 2×2 وكتابة معادلات ببعدين تحقق مسايرة التغيير نسمي المتجهة فيها سبينور Spinor فايل Weyl؛ إنها، على سبيل المثال، معادلة حركة النوترينو ذي السبين 1/2 ومنعدم الشحنة والكتلة، أو تمثيلها بمصفوفات تنتمي إلى الجداء التانسوري للسبينور (أربعة أبعاد) وكتابة معادلات بأربعة أبعاد – سبين مزدوج bispinor–، معادلة ديراك Dirac التي سنعالجها في الميكانيك الكمومي النسبوي والتي تصف الفيرميون (المشحون) الكتلوي والفيرميون المضاد (البروتون والبروتون المضاد مثلاً). إن فضاء السبين المزدوج مختلف تماماً عن فضاء مينكوفسكي على الرغم من تساوي الأبعاد.

لنعد إلى معادلات ماكسويل الأربع (1.1) إن المعادلتين $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$ و $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ معادلتان سلميتان في الفضاء الإقليدي أما طرفا المعادلة الثانية $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ فهما متجهتان شبيهتان (الجداء المتجهة لمتجهتين شبه متجهة) وطرفا المعادلة الرابعة $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_o \vec{J} + \frac{1}{C^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ فهما متجهتان. لا تتغير هذه المعادلات الأربعة نتيجة الانسحاب أو الدوران. لكن المعادلتين 2 و 4 لا تبقيان على حالهما نتيجة

---

[3] ليكن $\vec{x} \in E_1$ و $\vec{y} \in E_2$، إن مركبات التانسور من الرتبة الثانية E^2، $E = E_2 = E_1$ هي x^1y^1, x^1y^2, x^1y^3، x^2y^1, x^2y^2, x^2y^3، x^3y^1, x^3y^2, x^3y^3. والهدف من تعريف التانسور هو تحويل التطبيق متعدد الخطية، ثنائي الخطية عندما يكون التانسور من الرتبة الثانية، إلى تطبيق خطي : ليكن لدينا التطبيق ثنائي الخطية $f(x, y)$ لـ $E_1 \otimes E_2$ في E لنكتب التطبيق الخطي $f(x, 0) = Ax$ و $f(0, y) = By$. حيث A و B مصفوفتان 3×3. إن التطبيق ثنائي الخطية هو $f(x, y) = (A \otimes B)(x \otimes y)$ حيث $A \otimes B$ مصفوفة 9×9 نحصل عليها بضرب كل عنصر في السطر من A بكل عناصر المصفوفة في B و $x \otimes y$ المتجهة ذات المركبات التسعة المكتوبة أعلاه.

تحويلات غاليلية لوجود المشتقات الأولى بالنسبة للزمن فيها : لنأخذ المعادلة الثانية ولنكتب $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ في النقطة P في المقرنين K و 'K حيث إحداثيات P هي (x, y, z, t) و (x', y', z', t).

لدينا في K

$$\frac{\partial B^i}{\partial t} = \frac{dB^i}{dt} - \frac{\partial B^i}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt} \quad \text{(الجمع على كل الأدلة } k = 1,2,3\text{)}$$

$$= \frac{dB^i}{dt} - \vec{\nabla} B^i \cdot \vec{V}_P$$

حيث $\vec{V}_P$، $\vec{V}_P = \frac{d\overline{OR}}{dt}$، هي سرعة P في المقرن K.

ولدينا بنفس الشكل في 'K

$$\frac{\partial B^i}{\partial t} = \frac{dB^i}{dt} - \vec{\nabla} B^i \cdot \vec{V}'_P$$ [4]

حيث V'_P هي السرعة النسبية لـ P في 'K، $V'_P = \frac{d\overline{O'R'}}{dt}$. وهكذا فإن الطرف الثاني في معادلة ماكسويل الثانية (قانون فارادي) مختلف في 'K عنه في K $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}\ \vec{\nabla} B^i = \left(\frac{\partial B_i}{\partial t}\right)_K - \left(\frac{\partial B_i}{\partial t}\right)_{K'}$، حيث $\vec{V}$ هي سرعة 'K بالنسبة لـ K : $\vec{V} = \vec{V}_P - \vec{V}'_P$.

هذا ما يفسر لنا الأمل الذي كان معقوداً على معادلات ماكسويل لتبيان حركة مقرن غاليلي بالنسبة لآخر. وهذا ما يدعونا تحديداً إلى وضع معادلات ماكسويل بشكل مساير التغيير في الفقرة القادمة. وأول ما يجب علينا فعله هو كتابة المؤثرات الخطية للحصول على متجهات بأربعة أبعاد في فضاء مينكوفسكي وعلى مقادير سلمية فيه.

إن المقادير السلمية التي نعرفها حتى الآن هي المجالات، أطوال المتجهات، والمتجهات التي نعرفها هي $(x^o, \vec{x})$ و $(u^o, \vec{u})$ والمشتقات الأخرى، الخ. التي نحصل عليها بتقسيم متجهة على مقدار سلمي. وكما حصلنا، في الفضاء الإقليدي العادي بتطبيق المؤثر الخطي التفاضلي $\vec{\nabla}$، على مقدار سلمي r، على متجهة هي $\vec{\nabla} r$ فسنضع هنا مؤثراً خطياً تفاضلياً بأربعة أبعاد (الاشتقاق بالنسبة لـ x^o وبالنسبة لـ $\vec{x}$). بحيث يعرف تطبيقه على مقدار سلمي متجهة بأربعة أبعاد في فضاء مينكوفسكي.

نكتب المؤثر التفاضلي الرباعي

$$\frac{\partial}{\partial x^o} \;,\; \frac{\partial}{\partial x^1} \;,\; \frac{\partial}{\partial x^2} \;,\; \frac{\partial}{\partial x^3} \qquad (3.1)$$

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x^o}, \vec{\nabla}\right) \qquad (3.1)'$$

---

[4] استعملنا هنا خاصة عدم توقف المؤثر $\vec{\nabla}$ على نقطة المبدأ O. يضيف الانسحاب الذي يغير المبدأ ثابتة على كل مركبة ولا يغير الاشتقاق $\frac{\partial x^k}{\partial x'^i} = \delta^k_i$.

وضعنا الدليل μ في الأسفل لنبين أن الاشتقاق هو تطبيق للفضاء المتجهي في حقل الأعداد السلمية وينتمي بالتالي إلى ثنوي الفضاء. ونكتب على العكس المؤثر التفاضلي الرباعي

$$\frac{\partial}{\partial x_o} \quad ، \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \quad ، \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \quad ، \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \qquad (3.2)$$

على الشكل

$$\partial^{\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x_o}, -\vec{\nabla}\right) \qquad (3.2)'$$

لا ننسى أن $\frac{\partial}{\partial x^{i}} = -\frac{\partial}{\partial x_{i}}$ و $\frac{\partial}{\partial x^{o}} = \frac{\partial}{\partial x_o}$.

إن الجداء السلمي لهاتين المتجهتين هو

$$\partial_{\mu}\partial^{\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^{o}}\right)^{2} + \left(\vec{\nabla}, -\vec{\nabla}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^{o}}\right)^{2} - \nabla^{2} = \Box^{2} \qquad (3.3)$$

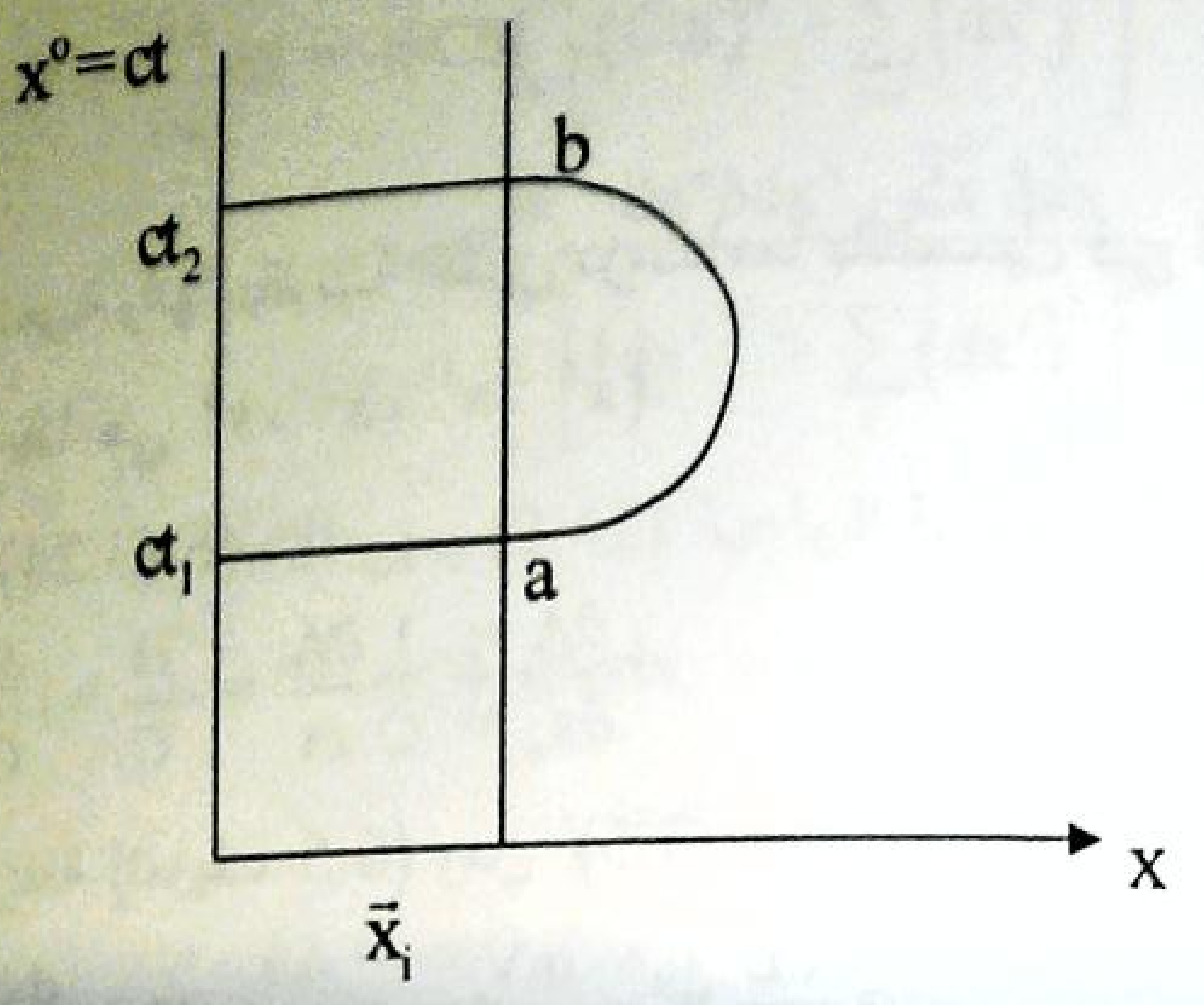
حيث $\nabla^{2} = \frac{\partial^{2}}{\partial^{2}x^{1}} + \frac{\partial^{2}}{\partial^{2}x^{2}} + \frac{\partial^{2}}{\partial^{2}x^{3}}$ هو اللابلاسي Laplacien وهو سلمي في الفضاء ذي الثلاثة أبعاد. وحيث $\partial_{\mu}\partial^{\mu}$ هو تعريفاً الدالامبرسي D'alembertien السلمي في الفضاء ذي الأربعة أبعاد. إن تطبيقه على أي دالة متغيرات، أياً كانت أبعادها، سلمية، متجهية، بأربعة أبعاد، الخ مقدار مساير التغيير : لا يتغير بتحويلات لورانتس.

2.3– مبدأ الفعل الأصغر :

سنستخلص معادلات الميكانيك النسبوي من مبدأ فعل أصغر كما فعلنا في الفصل السابق من أجل معادلات الميكانيك التقليدي وكما سنفعل من أجل مختلف النظريات الفيزيائية. يجب ألا يتوقف الفعل على اختيار المقرن الغاليلي، فهو سلمي من جهة ويجب أن يؤول إلى الفعل التقليدي من أجل السرعات الصغيرة، أي أن يصبح لاغرانجي الجسيم الحر من الشكل $\frac{mv^{2}}{2}$، أي بالمشتقات من الدرجة الأولى. وهذا ما يحققه في فضاء مينكوفسكي المجال ds أو αds حيث α، ثابتة يجب تعيينها. سنكتب الفعل A من أجل جسيم حر نسبوي على الشكل

$$A = -\alpha\int_{a}^{b} ds = -\alpha\int_{a}^{b}\sqrt{C^{2}dt^{2} - \left(dx^{2} + dy^{2} + dz^{2}\right)} \qquad (3.4)$$

حيث a و b حدثان والتكامل على خط الكون الرابط بينهما. إن الثابتة α موجبة حتماً لأن التكامل $\frac{1}{C}\int_{a}^{b} ds$ هو المدة الزمنية التي تقيسها ميقاتية على خط كونها. هذه المدة هي أعظم ما تكون عندما تكون الميقاتية في حالة السكون وخط الكون مستقيم مواز للمحور x^{o}، a تقابل الزمن t_1 و b الزمن t_2. إنها أعظم من المدة التي يستغرقها انطلاق الميقاتية من النقطة a والتحرك بشكل غير منتظم لتعود إلى نفس المكان $\vec{x}_i$ راسمة خط كون منحن، الشكل.13 وهكذا فخط الكون، المستقيم هنا، هو أطول المجالات.



الشكل.13

وهذا ما يؤكد لنا كون α موجبة، مع وضعنا لإشارة – أمام إشارة التكامل لإن الفعل المطلوب فعل أصغري.

وهكذا فإن الفعل الأصغر هو

$$-\alpha\int_{t_1}^{t_2} Cdt\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}$$

ومنه اللاغرانجي

$$L = -\alpha C\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}} \qquad (3.5)$$

الذي نكتبه من أجل V صغيرة بما فيه الكفاية أمام C على الشكل

$$L \cong -\alpha C\left(1-\frac{1}{2}\frac{V^2}{C^2}\right) = -\alpha C + \frac{\alpha V^2}{2C^2}$$

ينطبق الحد الثاني على لاغرانجي الجسيم الحر التقليدي إذا وضعنا

$$\alpha = mC$$

وهكذا فإن لاغرانجي جسيم حر نسبوي سرعته صغيرة هو

$$L = -mC^2 + \frac{mV^2}{2} \qquad (3.6)$$

يبدو المقدار mC^2 على شكل طاقة كامنة للجسيم. إنها طاقة الجسيم وهو في حالة السكون. ولم يعد اختيار مبدأ الطاقة الحركية اعتباطياً كما هو عليه الحال في الميكانيك التقليدي.

نكتب اللاغرانجي النسبوي (3.5) بعد أن عينا قيمة الثابتة α على الشكل

$$L = -mC^2\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}} \qquad (3.5)'$$

3.3- الطاقة والاندفاع :

لنطبق الآن الهيكلة اللاغرانجية والهاميلتونية اللتين درسناهما بالتفصيل في الفصل السابق على هذا اللاغرانجي (الإحداثيات q^i هنا هي x^3، x^2، x^1، x^o).

لدينا من معادلة هاميلتون ('(3.24)،6)

$$\frac{\partial A}{\partial x_o} = \frac{1}{C}\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{H}{C} = -\frac{E}{C} \qquad (3.7)$$

ولدينا من تعريف العزوم المرافقة (تعريف 6.5) ومن '(3.5)

$$P_i = \frac{\partial A}{\partial x^i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{mV_i}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \qquad V_i = \frac{dx^i}{dt} \qquad (3.8)$$

والاندفاع –المكاني– هو المتجهة بثلاثة أبعاد

$$\vec{P} = \frac{m\vec{V}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \qquad (3.9)$$

وهو اندفاع ينطبق على الاندفاع النيوتوني من أجل $V << C$.

نكتب (3.7) و (3.8) كما في '(3.2) على الشكل

$$-\partial^\mu A = -\left(\frac{\partial A}{\partial x^o}, -\overline{\nabla A}\right) = \left(+\frac{E}{C}, \vec{P}\right) = \left(P_o, \vec{P}\right) = P \qquad (3.10)$$

ونحصل على المتجهة الرباعية، $(P_o, \vec{P})$ متجهة الطاقة–الاندفاع، لدينا أيضاً من المعادلة ((3.1)،6) والمعادلات أعلاه

$$E = p_i\dot{q}^i - L = \vec{P}\cdot\vec{V} + mC^2\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}$$

$$= \frac{mV^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} + mC^2\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}$$

$$E = \frac{mC^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \qquad (3.11)$$

إن طول متجهة الطاقة–الاندفاع ثابت طبعاً تعينه العلاقتان (3.9) و (3.11)

$$\frac{E^2}{C^2} - |\vec{p}|^2 = m^2C^2 \qquad (3.11)'$$

إنه من المفيد أيضاً حساب المتجهة الرباعية الطاقة–الاندفاع بدليل متجهة السرعة الرباعية $(u^o, \vec{u})$.

لنكتب تغير الفعل A (3.4) على الشكل

$$\delta A = \frac{\partial A}{\partial x^{o}}\delta x^{o} + \frac{\partial A}{\partial \vec{x}}\delta \vec{x} = -mC\delta\int_a^b \left[(Cdt)^2 - \sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2\right]^{1/2} \tag{3.12}$$

$$= -mC\int_a^b \frac{dx^{o}\delta dx^{o} - \overline{dx}\,\delta\overline{dx}}{\left[(dx^{o})^2 - \sum_i (dx^i)^2\right]^{1/2}}$$

الذي يكتب بأخذ تعبير متجهة السرعة الرباعية (2.42) بعين الاعتبار

$$= -mC\int_a^b u^{\mu}\delta dx_{\mu} = -mC\int_a^b u^{\mu} d\delta x_{\mu}$$

نكامل بالتجزئة كما فعلنا دوماً في هذه الحالة لنجد

$$\delta A = -mCu^{\mu}\delta x_{\mu}\Big|_a^b + mC\int_a^b du^{\mu}\delta x_{\mu}$$

إن المقدار تحت إشارة التكامل هو متجهة التسارع الرباعية $\frac{du}{ds}$ مضروبة بـ $ds\delta x_{\mu}$ وهي متجهة معدومة عندما يكون الجسيم حراً. ويبقى لنا بالمقارنة مع الطرف الأيسر من (3.12)

$$p^{o} = \frac{E}{C} = -\frac{\partial A}{\partial x^{o}} = mCu^{o} = \frac{mC}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \tag{3.13}$$

$$\vec{P} = \frac{\partial A}{\partial \vec{x}} = mC\vec{u} = \frac{m\vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \tag{3.14}$$

نحصل من هاتين العلاقتين على معادلة هاميلتون–جاكوبي النسبوية

$$m^2C^2 = (p^{o})^2 - (\vec{P})^2 = \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 \equiv \left(\frac{\partial A}{\partial x^{o}}\right)^2 - (\vec{\nabla} A)^2 .$$

تتحول المتجهة الرباعية $\left(\frac{E}{C}, \vec{P}\right)$ عندما ننتقل من المقرن الغاليلي K إلى المقرن الآخر K' حسب العلاقات (2.41).

$$E' = \frac{E - VP^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \quad \text{أو} \quad \frac{E'}{C} = \frac{\frac{E}{C} - \frac{V}{C}P^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \tag{3.15}$$

$$P'^3 = P^3 \quad P'^2 = P^2 \quad ، \quad P'^1 = \frac{P^1 - \frac{VE}{C^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \tag{3.16}$$

تتيح لنا العلاقتان (3.13) و (3.14) التعبير عن الطاقة بدليل الاندفاع وحده وذلك بحذف V^2 بينهما والحصول على الهاميلتوني H :

لدينا من جهة

$$\frac{(p^{o})^2}{P^2} = \frac{m^2C^2}{m^2V^2}$$

وبوضع $\frac{V^2}{C^2} = \frac{P^2}{(p^o)^2}$ في (3.13) نحصل على

$$H = Cp^o = C\sqrt{C^2m^2 + P^2} \tag{3.17}$$

التي تعطينا عندما يكون P صغيراً أمام mC

$$H = mC^2 + \frac{P^2}{2m} \tag{3.18}$$

لكن صغر P أمام mC يعني صغر V أمام C بحيث تصبح (3.14)

$$\frac{\vec{P}}{m} = \frac{\frac{m\vec{V}}{m}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \cong \vec{V}\left(1 + \frac{V^2}{2C^2}\right) \cong \vec{V}$$

و $\vec{P} = m\vec{V}$ ؛ وهو تعريف الاندفاع النيوتوني. لدينا كذلك من (3.13)

$$E = mC^2\left(1 + \frac{V^2}{2C^2}\right) = mC^2 + \frac{mV^2}{2} = mC^2 + \frac{P^2}{2m}$$

أي العلاقة (3.18) أعلاه.

4.3- مفعول دوبلر – الانزياح نحو الأحمر :

لنشرح أولاً هذا المفعول في حال انتشار الأمواج الصوتية في وسط ما، سائل أو غازي. ولنذكر بكلمتين أن الفيزيائيين كانوا يؤمنون منذ ديكارت ونيوتن من بعده وحتى مجيء النسبية في مطلع القرن العشرين، بوجود وسط غازي يملأ الفضاء بين الجسيمات وينقل التفاعلات وبشكل خاص الأمواج، على غرار ما يفعله الهواء في حمل الأمواج الصوتية. وسموا هذا الوسط الأثير Ether وأعطوه صفات وخواص تسمح له بحمل الأمواج بدون أن يُضغط. كانوا لا يستطيعون تصور وجود الخلاء التام وتغير خواص نقاطه نتيجة وجود الحقل، الكهرطيسي على سبيل المثال. حتى أن تجربة مايكلسون–مورلي لم تكن تريد إثبات حركة الأرض – كمقرن غاليلي – بالنسبة لمقرن غاليلي آخر وإنما حركتها بالنسبة لهذا الغاز الوهمي، الأثير. إلى أن تبين بهذه التجربة أنه لا يمكن البرهان على وجود الأثير وأنه لا حاجة لمثل هذه الفرضية.

إن مفعول دوبلر هو تغير التردد المقيس من قبل الراصد ν_r بالنسبة للتردد ν_e الصادر عن المنبع بدليل سرعة المنبع والوسط والراصد.

سنفرض أن الوسط ساكن– لا توجد رياح بالنسبة للراصد الساكن أيضاً. أي أنهما في نفس المقرن K، لنفرض أن المنبع يتحرك بسرعة $\vec{V}$ موازية للمحور Ox' في K آتياً من يسار K. لا تتوقف سرعة الصوت بالنسبة للوسط إلا على خواص الوسط وهي مستقلة عن سرعة المنبع. لتكن V_{s} هذه السرعة.

لنفرض أن المنبع يصدر N موجة في فترة زمنية $\Delta\tau$، طول قطار الأمواج $\Delta = V_{\text{ص}}\Delta\tau$. تصل جبهة الأمواج إلى النقطة ℓ بعد زمن تحدده العلاقة $\ell = t(V_{\text{ص}} - V)$، وتصل مؤخرة القطار إلى النقطة $\ell + \Delta'$ في اللحظة $t + \Delta\tau$ المحددة بالعلاقة $\ell + \Delta' = (t + \Delta\tau)(V_{\text{ص}} - V)$. وهكذا فإن المسافة Δ' هي $(V_{\text{ص}} - V)\Delta\tau$ وبالتالي فإن طول الموجة بالنسبة للوسط وللراصد هو

$$\lambda_{\text{ر}} = \frac{(V_{\text{ص}} - V)\Delta\tau}{N}$$

والتردد (التواتر) $\nu_{\text{ر}}$ هو

$$\nu_{\text{ر}} = \frac{V_{\text{ص}}}{\lambda_{\text{ر}}} = \frac{N}{\Delta\tau}\,\frac{V_{\text{ص}}}{V_{\text{ص}} - V}$$

لكن $\frac{N}{\Delta\tau}$ هو $\nu_{\text{م}}$ ومنه

$$\nu_{\text{ر}}/\nu_{\text{م}} = \frac{1}{1 - \dfrac{V}{V_{\text{ص}}}} \qquad (3.19)$$

وهكذا فإن التردد الذي يشعر به الراصد أكبر من التردد الصادر عن المنبع إذا كانت $\vec{V}$ موجبة، أي إذا كان المنبع سائراً في اتجاه الراصد وعلى العكس فهو أصغر إذا كان المنبع يبتعد عن الراصد.

سنبدأ بالمحاكمة بنفس الشكل : ليكن K مقرن المنبع الضوئي وسنفرضه ساكناً و K' مقرن الراصد المتحرك بسرعة $\vec{V}$ موازية لـ Ox' والمنطبق على K في اللحظة 0؛ $x = x' = 0$ $t = t' = 0$. لنفرض أن المنبع أصدر في هذه اللحظة من النقطة O موجة ضوئية يتلقاها الراصد $x' = 0$ في نفس اللحظة. لنحسب انطلاقاً من (2.16) و(2.16)' وضع x' و t' في K' بالنسبة لـ $x = 0$ واللحظة T- دور الموجة، لحظة إصدار الموجة الثانية. لدينا

$$x' = \frac{x - VT}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{C^2}}} = \frac{-VT}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{C^2}}}$$

$$t' = \frac{T - Vx/C^2}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{C^2}}} = \frac{T}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{C^2}}}$$

إن x' هي النقطة التي وصلتها الموجة الثانية الصادرة في اللحظة T من النقطة O في K، و t' هي لحظة وصولها إليها. تصل هذه الموجة إلى النقطة $x' = 0$ في K' بعد زمن مقداره $\Delta t' = -\frac{x'}{C}$ بحيث يصبح الدور في K'

$$T' = t' + \Delta t' = \frac{T(1 + V/C)}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{C^2}}} = T\left(\frac{1 + V/C}{1 - V/C}\right)^{1/2}$$

ومنه التواتر $\left(\nu = \frac{1}{T}\right)$

$$\nu' = \nu\left(\frac{1 - V/C}{1 + V/C}\right)^{1/2} \qquad (3.20)$$

ν' أصغر من ν عندما يتباعد المنبع والراصد عن بعضهما، $V > 0$، وعلى العكس ν' أكبر من ν عندما يتقارب المقرنان. إن طول الموجة $\lambda' = \frac{C}{\nu'}$ هو أكبر في حالة التباعد : إنزياح نحو الأحمر.

عندما تكون السرعة صغيرة يمكننا أن نكتب $\frac{1}{1+x} \cong 1 - x$ بحيث تصبح (3.20)

$$\nu' = \nu\left(1 - \frac{V}{C}\right) \qquad (3.20)'$$

وهو مفعول دوبلر التقليدي.

ملاحظة :

يمكن الوصول إلى نفس النتيجة انطلاقاً من انحفاظ الجداء السلمي لمتجهتين رباعيتين $(x^\circ, \vec{x})$ و $\left(\frac{E}{C}, \vec{P}\right)$. إن $\vec{P} = \frac{E\vec{V}}{C^2}$ حسب (3.13) و (3.14) من أجل الجسيمات ذات السرعة $\vec{V}$ و $\vec{P} = \frac{E}{C}\vec{e}$ من أجل الفوتون حيث $\vec{e}$ هو اتجاه انتشار الموجة. ومن جهة أخرى فإن طاقة الفوتون متناسبة مع تردد الموجة كما يعلمنا الميكانيك الكمومي، $E = h\nu$، بحيث يصبح الجداء السلمي للوضع في الزمان المكان، $(x^\circ, \vec{x})$، بمتجهة الطاقة–الاندفاع $\left(\frac{E}{C}, \vec{P}\right)$ عندما تنتشر الموجة في الاتجاه Ox'، المقدار الثابت التالي

$$\frac{E}{C}C\left(t - \frac{x}{C}\right)$$

وبما أن $E = h\nu$ و h ثابتة

فإن

$$\nu\left(t - \frac{x}{C}\right) = \text{ثابت} \qquad (3.21)$$

أي أنه لا يتغير بتحويل لورانتس

$$\nu\left(t - \frac{x}{C}\right) = \nu'\left(t' - \frac{x'}{C}\right)$$

ونجد بالعودة إلى (2.16) العلاقة (3.20)

$$\frac{v'}{v}=\frac{\left(t-\frac{x}{C}\right)\sqrt{1-V^2/C^2}}{t-\frac{V}{C^2}x-\frac{x}{C}+\frac{V}{C}t}=\frac{\left(t-\frac{x}{C}\right)\sqrt{1-V^2/C^2}}{t\left(1+\frac{V}{C}\right)-\frac{x}{C}\left(1+\frac{V}{C}\right)}=\frac{\sqrt{1-V^2/C^2}}{1+\frac{V}{C}}$$

$$\frac{v'}{v}=\frac{\left[\left(1-\frac{V}{C}\right)\left(1+\frac{V}{C}\right)\right]^{1/2}}{1+\frac{V}{C}}=\left(\frac{1-\frac{V}{C}}{1+\frac{V}{C}}\right)^{1/2} \quad (3.20)$$

5.3- الميكانيك النسبوي :

نُعرّف في الميكانيك النسبوي متجهة القوة الرباعية باشتقاق متجهة الطاقة–الاندفاع P بالنسبة للمقدار السلمي s، تماماً كما عرفنا متجهة القوة في الفضاء الإقليدي باشتقاق متجهة الاندفاع بالنسبة للزمن، $\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$، ونكتب تعريفاً

$$g=\frac{dp}{ds} \quad (3.21)$$

$$=mC\frac{du}{ds}$$

وهي متجهة متناسبة مع متجهة التسارع الرباعية $\frac{du}{ds}$. لدينا باشتقاق (3.13)، (3.14) بالنسبة لـ

$$ds=Cdt\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}$$

$$g^o=\frac{1}{C}\frac{dE}{Cdt\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \quad (3.21)'$$

$$\vec{g}=\frac{1}{C\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\frac{d}{dt}\frac{m\vec{V}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}=\frac{1}{C\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{1}{C\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\vec{F} \quad (3.21)''$$

حيث وضعنا تعريفاً

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=m\frac{d\vec{V}}{dt}\left(1-\frac{V^2}{C^2}\right)^{-1/2} \quad (3.22)$$

رأينا أن كل متجهة رباعية عمودية على مشتقها $u_\mu\frac{du^\mu}{ds}=0$ أي أن

$$g^\mu u_\mu=0 \qquad g^o u^o=\vec{g}\cdot\vec{u}$$

ومنه وحسب '(3.21)، "(3.21) و (2.42)

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V} \tag{3.23}$$

وهو التعريف التقليدي للاستطاعة، ولكن $\vec{F}$ معطاة بالعلاقة (3.22).

6.3– تفكك الجسيمات العفوي :

لا يمكن تفهم تفكك جسيم ما وهو في حالة السكون إلا في إطار النسبية؛ لا يمكن على سبيل المثال حدوث النشاط الإشعاعي – إصدار النواة للجسيمات α و β – لولا وجود الطاقة MC^2 في حالة السكون، حيث M كتلة الجسيم المتفكك. نعبر عن قانون حفظ الطاقة في المقرن المرتبط بـ M بالعلاقة

$$MC^2 = E_1 + E_2 \tag{3.24}$$

حيث E_1 و E_2 طاقتا الجسيمين نتاج الانفكاك و m_1 و m_2 كتلتاهما. لدينا طبعاً $E_1 > m_1C^2$ و $E_2 > m_2C^2$ أي أن

$$M > m_1 + m_2 \tag{3.25}$$

وهو الشرط اللازم لتحقق التفكك العفوي. وإن لم يتحقق فالجسيم M مستقر ويجب لتفكيكه تزويده بطاقة تساوي على الأقل الفرق $[m_1 + m_2 - M]C^2$، يطلق عليها اسم طاقة الارتباط.

نعبر عن حفظ الاندفاع الخطي في المقرن المرتبط بـ M، المعين بـ (3.24) أعلاه بـ

$$0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad \text{أو} \quad |\vec{p}_1|^2 = |\vec{p}_2|^2$$

ونحصل من قانون حفظ متجهة الطاقة–الاندفاع '(3.11) على

$$\frac{E_1^2}{C^2} - m_1^2C^2 = \frac{E_2^2}{C^2} - m_2^2C^2 \tag{3.26}$$

أو

$$E_1^2 - E_2^2 = (E_1 + E_2)(E_1 - E_2) = (m_1^2 - m_2^2)C^4 \tag{3.26'}$$

نحصل على الفرق بين E_1 و E_2 من هذه العلاقة والعلاقة (3.24) التي تعطي المجموع

$$E_1 - E_2 = \frac{(m_1^2 - m_2^2)C^4}{MC^2} \tag{3.27}$$

وأخيراً من هذه العلاقة والعلاقة (3.24) على

$$\begin{cases} E_1 = C^2 \dfrac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} \\ E_2 = C^2 \dfrac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M} \end{cases} \tag{3.28}$$

4. الهيكلة رباعية الأبعاد للكهرطيسية

1.4- معادلة الموجة :

لخصنا في 1.1 نظرية الكهرطيسية بأربع معادلات (1.1) وأشرنا في (1.2) و (1.3) إلى العلاقة بين الحقلين، الكهربائي $\vec{E}$ والمغنطيسي $\vec{B}$ والكمونين V و $\vec{A}$. وسنذكر هنا بالمعادلتين التفاضليتين التي يخضع لهما V و $\vec{A}$ مبتدئين بالمعادلة $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_o \vec{J} + \frac{1}{C^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$، معادلة ماكسويل آمبير، ولنبدل فيها $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ فنحصل في الطرف الأيسر على $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)$، أي على الجداء المتجه الثلاثي المساوي لـ

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) \equiv \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \nabla^2 \vec{A}$$

الذي نحصل عليه مباشرة من ((2.27) .2) مع الانتباه إلى وضع المؤثر على اليسار أو بالحساب انطلاقاً من تعريفات الغراديان، التدوير واللابلاسي المطبق على متجهة. إن مركبات اللابلاسي هي $\nabla^2 A_x = \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)$، $\nabla^2 A_y$ و $\nabla^2 A_z$.

تصبح معادلة ماكسويل آمبير على الشكل

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_o \vec{J} + \frac{1}{C^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu^o \vec{J} + \frac{1}{C^2}\left(-\frac{\partial \overline{\nabla V}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}\right) \qquad (4.1)$$

حيث حسبنا $\frac{\partial E}{\partial t}$ انطلاقاً من (1.3).

لنأخذ تباعد $\vec{E}$ المساوي لـ $\frac{\rho}{\varepsilon_o}$ من المعادلة (1.3) فنحصل على

$$-\nabla^2 V - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\rho}{\varepsilon_o} \qquad (4.2)$$

نلاحظ في (4.1) وجود المؤثر السلمي الدالامبرسي $\nabla^2 \vec{A} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{C^2 \partial t^2} = \square^2$. سيبقى هذا المؤثر وحده إذا استطعنا حذف الحد :

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{C^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right) \qquad (4.3)$$

وهذا ممكن دوماً لأن $\vec{A}$ ليس معرفاً تماماً. إن إضافة غراديان دالة لا على التعيين f إليه لن تغير من قيمة الحقل المغنطيسي لأن $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f \equiv 0$. لنأخذ إذاً عوضاً عن $\vec{A}$ المتجهة الجديدة $\vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla} f$

مما سيضيف إلى V المقدار $\frac{\partial f}{\partial t}$، ولنبحث عن الشرط الذي يجب على $\vec{A}'$ و $\vec{V}'$، أي على f تحقيقه لكي يصبح المقدار المشتق في (4.3) مساوياً للصفر

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{C^2}\frac{\partial V'}{\partial t} = 0 \qquad (4.4)$$

يسمى هذا الشرط شرط لورانتس أو الشرط الإضافي، يجب إذاً :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f + \frac{1}{C^2}\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

وبملاحظة أن $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \nabla^2 f$ تصبح هذه المعادلة التفاضلية الجزئية بـ f :

$$\Box^2 f = -\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{C^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right) \qquad (4.5)$$

سنرمز لـ $\vec{A}'$ و V' الجديدين بـ $\vec{A}$ و V بحيث تصبح المعادلة (4.1) – آخذين بعين الاعتبار شرط لورانتس –،

$$\Box^2 \vec{A} = \mu_o \vec{J} \qquad (4.6)$$

كما تصبح المعادلة (4.2) بعد تبديل $\frac{1}{C^2}\frac{\partial V}{\partial t}$ بـ $-\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$

$$\Box^2 V = \frac{\rho}{\varepsilon_o} \qquad (4.7)$$

ونحصل على معادلتي الأمواج اللتين يحققهما الكمونان المتجه $\vec{A}$ والسلمي V.

يمكن بالرجوع إلى معادلات ماكسويل الحصول على معادلتين مماثلتين يحققهما الحقلان الكهربائي والمغنطيسي بعيداً عن الشحنات والتيارات.

لدينا في هذه الحالة $\Box^2 V = 0$ و $\Box^2 \vec{A} = 0$ ولدينا كذلك من المعادلة الثانية والرابعة من معادلات ماكسويل

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right)$$

إن $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ بعيداً عن الشحنات و $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{C^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ بعيداً عن التيارات حسب المعادلة الرابعة ومنه

$$\Box^2 \vec{E} = 0 \qquad (4.8)$$

وبنفس الشكل من الرابعة والثانية

$$\Box^2 \vec{B} = 0 \qquad (4.9)$$

ليست معادلات الأمواج (4.6–9) معادلات مسايرة التغيير. صحيح أن المؤثر التفاضلي الدالامبرسي $\Box^2$ هو مقدار سلمي في فضاء مينكوفسكي.

$$\Box^2 = \partial_\mu \partial^\mu$$

ولكنه مطبق على مقادير متجهة أو سلمية في الفضاء الإقليدي. يلزم علينا إذاً إعادة صياغتها في فضاء مينكوفسكي حتى يتجلى انحفاظها وصمودها نتيجة تحويلات لورانتس.

2.4- الكمون المتجه رباعي الأبعاد :

يمكن النظر في المعادلتين (4.6)، (4.7) إلى الرباعية $(aV, \vec{A})$ كمتجهة كمون بأربعة أبعاد وإلى الطرف الثاني في المعادلتين $(b\rho, \vec{J})$ كرباعية أخرى، وتحديد الثابتين a و b بحيث تصبح المعادلتان معادلة واحدة مسايرة التغيير، طرفها الأيسر مؤثر سلمي $\square^2$ "مضروب" بمتجهة رباعية الأبعاد فهو متجهة بنفس الأبعاد والطرف الأيمن متجهة بأربعة أبعاد. يتحول الطرفان بنفس المصفوفة الرباعية من زمرة لورانتس ولا حاجة لإثبات عدم تغيرها نتيجة هذا التحويل. كل ما علينا فعله هو التعبير في الطرف الأيمن عن الثابتتين μ_o و $1/\varepsilon_o$ بدليل ثابتة واحدة. إن هاتين الثابتتين مرتبطتان تحديداً بسرعة الضوء في النظرية الكهرطيسية $1 = \varepsilon_o\mu_o C^2$. سنأخذ إذاً $a = \frac{1}{C}$ و $b = C$ بحيث يصبح الكمون الرباعي $A = \left(\frac{V}{C}, \vec{A}\right)$ والتيار الرباعي $J = (C\rho, \vec{J})$ وتأخذ المعادلتان (4.6,7) الشكل التالي

$$\square^2 \vec{A} = \mu_o \vec{J}$$

$$\square^2 \frac{V}{C} = \frac{\rho}{\varepsilon_o C} = \mu_o J^o$$

أي

$$\square^2 A = \mu_o J \qquad (4.10)$$

ملاحظة :

إن هذا الاختيار لـ a و b للوصول إلى ثابتة مشتركة في الطرف الثاني ليس بالاختيار الوحيد الممكن، يمكن على سبيل المثال أخذ $b = C^2$ و $a = 1$، الخ. لكنه الوحيد الذي يوائم معادلة الاستمرارية – حفظ كمية الشحنة الكهربائية – : $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$؛ نكتب هذه المعادلة على شكل جداء سلمي لمتجهتين $\partial^\mu = \partial^o, -\vec{\nabla}$ حسب '(3.2) و J_μ

$$\partial^\mu J_\mu = \frac{\partial C\rho}{\partial x^o} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \frac{\partial C\rho}{\partial Ct} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \qquad (4.11)$$

يوائم هذا الاختيار شرط لورانتس (4.4) الذي نكتبه على نفس الشكل

$$\partial^\mu A_\mu = \frac{\partial V}{C^2 \partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \qquad (4.12)$$

(4.11) و (4.12) معادلتان مسايرتا التغيير.

تتغير مركبات المتجهتين $A=(A^\circ, \vec{A})$ و $J=(J_\circ, \vec{J})$ عند الانتقال من مقرن غاليلي K إلى آخر K' حسب العلاقات $(2.41)_{1,2,3}$. سنكتب سرعة K' بالنسبة لـ K V كالمعتاد ونكتب الكمون السلمي v ، $A^\circ = \frac{v}{C}$ منعاً للالتباس. لدينا (4.13)، (4.14)

$$\begin{cases} A'^\circ = \dfrac{v}{C} = \dfrac{A^\circ - \dfrac{V}{C}A^1}{\sqrt{1 - V^2/C^2}} \;,\; v = \dfrac{v - VA^1}{\sqrt{1 - V^2/C^2}} \;,\; A'^2 = A^2 \\ A'^1 = \dfrac{A^1 - \dfrac{V}{C}A^\circ}{\sqrt{1 - V^2/C^2}} \;,\; A'^1 = \dfrac{A - \dfrac{V}{C^2}v}{\sqrt{1 - V^2/C^2}} \;,\; A'^3 = A^3 \end{cases} \tag{4.13}$$

$$\begin{cases} J'^\circ = \dfrac{J^\circ - \dfrac{V}{C}J^1}{\sqrt{1 - V^2/C^2}} \;,\; \rho' = \dfrac{\rho - \dfrac{V}{C^2}J^1}{\sqrt{1 - V^2/C^2}} \;,\; J'^2 = J^2 \\ J'^1 = \dfrac{J - \dfrac{V}{C}J^\circ}{\sqrt{1 - V^2/C^2}} \;,\; J'^1 = \dfrac{J - V\rho}{\sqrt{1 - V^2/C^2}} \;,\; J'^3 = J^3 \end{cases} \tag{4.14}$$

ملاحظات :

1– علينا بعد أن وضعنا معادلة الموجة الكهرطيسية في صيغة مسايرة التغير أن نتحقق من اتساق الأبعاد في طرفي المعادلة. إن أبعاد الكمون المتجه $\vec{A}$ مختلفة عن أبعاد الكمون السلمي V التي هي أبعاد طاقة مقسومة على شحنة، كما أن أبعاد $\vec{B}$ مختلفة عن أبعاد $\vec{E}$ كما يبدو بوضوح من علاقة القوة $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}\right)$. فالأبعاد هي

$$[E] = [M][L][T^{-2}][Q^{-1}] \quad \text{ومنه} \quad v = [M][L^2][T^{-2}][Q^{-1}]$$

بينما

$$[B] = [M][T^{-1}][Q^{-1}] \quad \text{ومنه} \quad [A] = [M][L][T^{-1}][Q^{-1}]$$

ولكن

$$[A] = \left[\frac{v}{C}\right] = [M][L][T^{-1}][Q^{-1}] \tag{4.15}$$

وهكذا فإن مركبات المتجهة A الأربعة متجانسة الأبعاد.

كذلك فإن أبعاد مركبات المتجهة J متجانسة :

$$[C\rho] = [L][T^{-1}][Q][L^{-3}] = [J] = [Q][L^{-2}][T^{-1}] \tag{4.16}$$

وأخيراً فإن ضرب أبعاد $[A]$ بـ $[L^{-2}]$ أبعاد المؤثر $\Box^2$ وضرب أبعاد $[J]$ بأبعاد $\mu_\circ$ التي نحصل عليها من العلاقة $1 = \varepsilon_\circ \mu_\circ C^2$: $[\mu_\circ] = [M][L][Q^{-2}]$ نحصل على أبعاد طرفي المعادلة وهي

$$[M][L^{-1}][T^{-1}][Q^{-1}] \tag{4.17}$$

2- إن لب الأفكار النسبوية هو اعتبار الزمن، كالطول والعرض والارتفاع، بعداً من أبعاد الفضاء المتجهي الأربعة أي أن $[L] = [T]$. ولا يجوز والحالة هذه قياس هذا البعد بمقياس آخر غير مقياس الأطوال العادية. هل من الممكن أن نتصور قياس الطول بالمتر والعرض بالذراع مثلاً ؟ يجب إذاً اعتبار الثابتة $C = L\,T^{-1}$ بدون أبعاد واختيار نظمة أبعاد تكون فيها هذه الثابتة مساوية للواحد $C = 1$ وبالتالي حذفها من كل المعادلات النسبوية. ستصبح كل السرعات نسبة مئوية بدون أبعاد، تتطابق أبعاد $\vec{B}$ مع أبعاد $\vec{E}$، أبعاد $\vec{A}$ مع أبعاد V، أبعاد ρ مع أبعاد $\vec{J}$، وأبعاد الطاقة E مع أبعاد $\vec{p}$.

3- إن ما فعلناه في الملاحظة السابقة هو في حقيقة الأمر تخفيض عدد الوحدات الأساسية من ثلاثة إلى اثنتين M, L وأبعاد الطاقة حسب العلاقة MC^2 هي أبعاد كتلة وأبعاد الفعل هي $[M][L]$. يمكن في الميكانيك الكمومي النسبوي، كما في النسبية، اعتبار الثابتة $\hbar$، - ثابتة بلانك، التي هي فعل - بدون أبعاد $\hbar = 1$ وتخفيض الوحدات الأساسية من جديد إلى وحدة واحدة هي $[M]$، مضافاً إليها الشحنة Q.

3.4- تحويلات الحقلين $\vec{E}$ و $\vec{B}$:

ليس هذان الحقلان مسايري التغير فهما معرفان في الفضاء الإقليدي وليس في فضاء مينكوفسكي. لنبين فيما يلي كيفية حساب مركباتهما عندما ننتقل من مقرن غاليلي إلى آخر.

لدينا من تحويلات لورانتس (2.16–17) عندما نكتبها بدليل x', t' أي عندما نكتب V- عوضاً عن V

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \;,\; \frac{\partial t}{\partial x'} = \frac{V/C^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \;,\; \frac{\partial x}{\partial t'} = \frac{V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \;,\; \frac{\partial t}{\partial t'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \quad (4.18)$$

لنكتب $\vec{E}$ في المقرن K' بدليل الكمون (الذي سنرمز له، كما في الرقم السابق، بـ v منعاً للالتباس)، المعادلة (1.3). لدينا من أجل المركبة الأولى

$$-E'_{x'} = \frac{\partial v}{\partial x'} + \frac{\partial A'_{x'}}{\partial t'}$$

$$x' = x'(x, t)$$

$$-E'_{x} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x'} + \frac{\partial A'_{x'}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t'} + \frac{\partial A'_{x'}}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t'}$$

وبتطبيق (4.13) و (4.18)

$$-E'_{x'} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-V^2/C^2}}\right)^2 \left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x} - V\frac{\partial A_x}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial t} - V\frac{\partial A_x}{\partial t}\right)\frac{V}{C^2} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{V}{C^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)V + \left(\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{V}{C^2}\frac{\partial v}{\partial t}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{V^2}{C^2}}\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\left(1-\frac{V^2}{C^2}\right) + \frac{\partial A_x}{\partial t}\left(1-\frac{V^2}{C^2}\right)\right) + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{V}{C^2} - \frac{\partial v}{\partial t}\frac{V}{C^2} - V\frac{\partial A_x}{\partial x} + V\frac{\partial A_x}{\partial x}\right\}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t} = -E_x \qquad (1)$$

نحسب المركبة الثانية $E'_{y'}$ مع الملاحظة أن $y' = y$: $\frac{\partial y}{\partial y'} = 1$ ، $\frac{\partial t}{\partial y'} = 0$ ، $\frac{\partial y}{\partial t'} = 0$.

لدينا

$$-E'_{y'} = \frac{\partial v}{\partial y'} + \frac{\partial A'_{y'}}{\partial t'} \qquad \left(A'_{y'} = A_y(x' t)\right)$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y'} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y'} + \frac{\partial A'_{y'}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t'} + \frac{\partial A'_{y'}}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t'} + \frac{\partial A'_{y'}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t'}$$

$$-E'_{y'} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\left(\frac{\partial v}{\partial y} - V\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) + \frac{\partial A_y}{\partial t}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\frac{V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial t} + V\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right)$$

$$E'_{y'} = \frac{E_y - VB_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \qquad (2)$$

لا يختلف حساب $E'_{z'}$ بشيء : A_z تحل محل A_y والاشتقاق بالنسبة لـ z عوضاً عن y، والحد الأخير المضروب بـ V هو $B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$ ومنه

$$E'_{z'} = \frac{E_z + VB_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \qquad (3)$$

حساب $\vec{B'}$ سهل لأن

$$\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z}\ ,\ \frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y} \quad ، \quad A'_{y'} = A_y\ ,\ A'_{z'} = A_z$$

ومنه

$$B'_{x'} = \frac{\partial A'_{z'}}{\partial y'} - \frac{\partial A'_{y'}}{\partial z'} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = B_x \qquad (4)$$

من جهة أخرى لدينا من (4.18) الاشتقاق بالنسبة لـ $x' = x'(x, t)$

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{V/C^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}$$

ومنه

$$B'_{y'} = \frac{\partial A'_{x'}}{\partial z'} - \frac{\partial A'_{z'}}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{A_x - \frac{v}{C^2}V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\right) - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial t}\frac{V}{C^2}\right)$$

$$B'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{V}{C^2}\left(-\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}\right)\right) = \frac{B_y + \frac{V}{C^2}E_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \qquad (5)$$

لدينا كذلك بنفس الشكل

$$B'_{z'} = \frac{B_z - \frac{V}{C^2}E_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \qquad (6)$$

لنلاحظ أخيراً أن $\vec{V}$ هو في اتجاه Ox ولذلك سنكتب $\vec{E}'$ و $\vec{B}'$ على شكل مركبة موازية للمحور x وأخرى عمودية عليه : المركبات الموازية لا تتغير (1) و (4) والمركبات العمودية (2،3) و (6،5) مجتمعان على النحو التالي

$$\begin{cases} E'_{\parallel} = E_{\parallel} & B'_{\parallel} = B_{\parallel} \\ E'_{\perp} = \dfrac{\left(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}\right)_{\perp}}{\sqrt{1 - V^2/C^2}} & B'_{\perp} = \dfrac{\left(\vec{B} - \dfrac{\vec{V}}{C^2} \times \vec{E}\right)_{\perp}}{\sqrt{1 - V^2/C^2}} \end{cases} \qquad (4.19)$$

4.4- قوى لورانتس :

لتكن لدينا الشحنة النقطية q ولنأخذ المقرن المرتبط بها كمقرن غاليلي 'K، شريطة أن يكون ذلك لفترة وجيزة كما فعلنا مراراً وتكراراً. وليكن $\vec{E}'$ و $\vec{B}'$ الحقلين الكهربائي والمنغطيسي المؤثرين على الشحنة في 'K. إن القوة المؤثرة على الشحنة –الساكنة– هي كهربائية صرفة : $\vec{F}' = q\vec{E}'$. لدينا حسب (3.21) مركبات القوة الرباعية : $(V = 0)$

$$\vec{g}' = \frac{\vec{F}'}{C} \quad \text{و} \quad g'^{0} = \vec{F}' \cdot \vec{V}' = 0 \qquad (4.20)$$

لنحسب الآن مركبات القوة في K انطلاقاً من تحويلات لورانتس (2.16–17) ومن (4.19)

$$
(4.21)\begin{cases} g^{o} = \dfrac{g'^{o} + \dfrac{V}{C} g'^{1}}{\sqrt{1 - V^2/C^2}} = \dfrac{\dfrac{V}{C^2} qE''}{\sqrt{1 - V^2/C^2}} = \dfrac{qV\left(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}\right)_{\parallel}}{C^2\sqrt{1 - V^2/C^2}} \\ g^{1} = \dfrac{g'^{1} + \dfrac{V}{C} g'^{o}}{C\sqrt{1 - V^2/C^2}} = \dfrac{qE''}{C\sqrt{1 - V^2/C^2}} = \dfrac{q\left(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}\right)_{\parallel}}{C\sqrt{1 - V^2/C^2}} \end{cases}
$$

حيث كتبنا $\left(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}\right)_{\parallel} = E''= E'_{\parallel}$ لأن مسقط $\vec{V} \times \vec{B}$ على اتجاه Ox، اتجاه $\vec{V}$، معدوم و

$$
(4.22)\quad \begin{cases} g^2 = g'^2 = \dfrac{qE'_2}{C} \\ g^3 = g'^3 = \dfrac{qE'_3}{C} \end{cases} \quad g_{\perp} \equiv \frac{q}{C} E'_{\perp} = \frac{q\left(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}\right)_{\perp}}{C\sqrt{1 - V^2/C^2}}
$$

أي أن

$$
\vec{g} = \frac{q\left(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}\right)}{C\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{C^2}}} \qquad (4.23)
$$

لكننا كتبنا $\vec{g}$ في "(3.21) بدليل القوة $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$ على الشكل

$$
\vec{g} = \frac{1}{C\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{C^2}}} \vec{F} \qquad (4.24)
$$

أي أن القوة المؤثرة على q المتحركة بالسرعة V في المقرن K تحت تأثير حقل كهرطيسي هي

$$
\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}\right) \qquad (4.25)
$$

هذه هي قوة لورانتس التي ينظر إليها في الكهرطيسية كمبدأ والتي استخلصناها هنا من القانون $\vec{F}' = q\vec{E}'$ عندما تكون الشحنة ساكنة ومن قوانين الميكانيك النسبوي. فهي إذاً قوة منشؤها النسبية وكل تحقق من صحتها، أي كل تحقق من تكافؤ القوة الكهربائية $\vec{F}' = q\vec{E}'$ و (4.25)، هو في واقع الأمر تحقق من النسبية الخاصة. يمكن على سبيل المثال إبعاد خيوط الطيف الصادر عن الذرة – ذرة الهدروجين وسلسلة بالمر Balmer تحديداً عن بعضها تحت تأثير حقل كهربائي، وهو مفعول يعرف باسم مفعول شتارك Stark. بَيّن فين Wien منذ عام 1914 حدوث نفس المفعول بتأثير حقل مغنطيسي $\vec{B}$ يحقق المساواة $\vec{E} = \vec{V} \times \vec{B}$.

لنقارن الآن g^{o} المعطاة في (4.21) مع التعبير عنها بدليل الطاقة '(3.21)

$$g^{o} = \frac{1}{C^2\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\frac{dE}{dt} = \frac{VF_{||}}{C^2\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}$$

ومنه

$$\frac{dE}{dt} = \vec{V}\cdot\vec{F} = q\vec{V}\cdot\vec{E}$$

أي أن الحقل الكهربائي هو الوحيد الذي يعمل.

5.4- الصياغة التانسورية للحقل الكهرطيسي :

نهدف في هذا الرقم الأخير من النسبية الخاصة التعبيرعن الحقلين $\vec{E}$ و $\vec{B}$ غير مسايري التغيير بشكل يوائم النسبية. ولنبدأ بالتذكير بالهامش 3 الذي عرفنا فيه على عجل التانسور من الرتبة الثانية $E^{\otimes 2}$ للفضاء E ذي الثلاثة أبعاد. لنرمز لعناصر التانسور التسعة في مثلنا، بـ T^{ij} : $T^{11} = x^1y^1$، $T^{12} = x^1y^2$، الخ. يمكننا تعميم هذا التعريف إلى عدد ما من الأبعاد n. لنفرض الآن أن المتجهتين x و y تحولتا إلى x' و y' بتطبيق مؤثر خطي A عليهما :

لدينا

$$y'^{k} = A^{k}_{\ell}y^{\ell} \qquad و \qquad x'^{i} = A^{i}_{j}x^{j}$$

الجمع طبعاً على كل العناصر j و ℓ من 1 إلى n. ستتحول عناصر التانسور $T^{j\ell}$ إلى T'^{ik} على النحو التالي

$$T'^{ik} = x'^{i}y'^{k} = A^{i}_{j}A^{k}_{\ell}x^{j}y^{\ell} = A^{i}_{j}A^{k}_{\ell}T^{j\ell} \tag{4.26}$$

يمكننا اعتبار هذه العلاقة كتعريف للتانسور من الرتبة الثانية وتعريف التانسور من أي رتبة كانت، m مثلاً لفضاء ذي n بعداً أي n^m عنصراً على الشكل

$$T'^{i_1\ldots i_m} = A^{i_1}_{j_1}A^{i_2}_{j_2}\ldots A^{i_m}_{j_m}T^{j_1\ldots j_m} \tag{4.27}$$

مبرهنة 3 :

لنبرهن الآن أنه يمكن مطابقة تانسور من الرتبة الثانية على الفضاء E^n مع مصفوفة $n\times n$.

لتكن المصفوفة M، المعبرة عن مؤثر خطي في الفضاء E^n : $y = Mx$. لنفرض أن x و y تحولتا، لنقل نتيجة تغير متجهات القاعدة في E^n، بالمؤثر A.

لدينا

$$y' = Ay \qquad و \qquad x' = Ax$$

$$y = Mx$$

أي $A^{-1}y' = MA^{-1}x'$

و $y' = AMA^{-1}x' = M'x'$

أي أن
$$M' = AMA^{-1} \tag{4.28}$$

لنفرض أن A يحفظ الجداء السلمي الذي نكتبه على شكل جداء داخلي
$$<x'|y'> = <Ax|Ay> = <x|\tilde{A}A|y> = <x|y>$$

أو

$\tilde{A}A = 1$ و $\tilde{A} = A^{-1}$ كما في زمرة الدورانات

وبالتالي فإن $M' = AM\tilde{A}$

$$M'^{i}{}_{k} = A^{i}{}_{j}M^{j}_{\ell}\tilde{A}^{\ell}_{k}$$

سنهمل هنا مسألة رفع وخفض الأدلة في التانسور : مسألة الانتقال من الفضاء إلى ثنويه في تعريف التانسور ونكتب

$$M'^{ik} = M'^{i}{}_{k} = A^{i}{}_{j}A^{k}_{\ell}M^{j}_{\ell} = A^{i}{}_{j}A^{k}_{\ell}M^{j\ell} \tag{4.28'}$$

ينطبق على هذا العلاقة تعريف التانسور من الرتبة الثانية وبالتالي فكل مصفوفة مربعة هي تانسور من الرتبة الثانية.

لنأخذ الآن الجداء المتجهة في الفضاء ذي الثلاثة أبعاد

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$$

إنه تطبيق ثنائي الخطية، تانسور من الرتبة الثانية، نعبر عنه بمصفوفة 3×3.

لكن العناصر القطرية في هذه المصفوفة : A^1B^1 ، A^2B^2 ، A^3B^3 مساوية للصفر أما العناصر غير القطرية فهي مضادة التناظر $A^1B^2 = -B^1A^2$ وهكذا لا يبقى من عناصر المصفوفة التسعة إلا ثلاثة فقط، وهذا ما سمح لنا بالتعبير عن هذا التانسور بمتجهة كاذبة، شبه متجهة C عناصرها

$$C^i = A^jB^k - A^kB^j \qquad i, j, k \text{ دروية}$$

سنقلد هذا الجداء بوضع المؤثر التفاضلي $\vec{\nabla}$ عوضاً عن المتجهة $\vec{A}$ لنحصل على التدوير

$$C^i = \partial^jB^k - \partial^kB^j$$

ونعرف في فضاء مينكوفسكي جداء متجهاً بأربعة أبعاد أي تانسوراً – مصفوفة 4×4 مضادة التناظر، عناصر القطر فيها معدومة بحيث لا يبقى إلا ستة عناصر نطابقها مع الحقلين $\vec{E}$ و $\vec{B}$. وذلك بأن نأخذ ∂_μ عوضاً عن $\vec{\nabla}$.

لنعرف التانسور من الرتبة الثانية $\partial_\mu A_\nu$ والتانسور مضاد التناظر، على غرار التدوير في الفضاء الإقليدي

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{4.29}$$

$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^o}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ حسب $(3.1)'$ و A_μ هو المتجهة الرباعية في الفضاء الثنوي، مركباتها هي v/C، $-A_x$، $-A_y$، $-A_z$.

يمكننا أن نعرف كذلك $F^{\mu\nu}$ و $F_\mu{}^\nu$ ولكننا لن ندخل في هذه التفاصيل هنا.

يعطينا التانسور $F_{\mu\nu}$ العناصر الستة المطلوبة والتي سنكتبها بدليل (x^o, x, y, z) المألوفة

$$\begin{cases} F_{x^o x} = -\frac{\partial A_x}{\partial x^o} - \frac{\partial v}{C\partial x} = \frac{1}{C}E_x \\ F_{x^o y} = -\frac{\partial A_y}{\partial x^o} - \frac{\partial v}{C\partial y} = \frac{1}{C}E_y \\ F_{x^o z} = -\frac{\partial A_z}{\partial x^o} - \frac{\partial v}{C\partial z} = \frac{1}{C}E_z \end{cases} \quad (4.30)$$

$$\begin{cases} F_{xy} = -\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} = -B_z \\ F_{yz} = -\frac{\partial A_z}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial z} = -B_x \\ F_{zx} = -\frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial x} = -B_y \end{cases} \quad (4.31)$$

ونكتب التانسور الكهرطيسي مضاد التناظر $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ كما يلي

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C}E_x & \frac{1}{C}E_y & \frac{1}{C}E_z \\ -\frac{1}{C}E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{1}{C}E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{1}{C}E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

يتحول هذا التانسور عندما ننتقل من مقرن غاليلي إلى آخر يتحول لورانتس الخاص

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/C^2}} & \frac{-V/C}{\sqrt{1 - V^2/C^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-V/C}{\sqrt{1 - V^2/C^2}} & \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/C^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

حسب العلاقة (4.26) أو '(4.28)

$$F'_{\mu\nu} = A_{\mu}{}^{\rho} A_{\nu}{}^{\sigma} F_{\rho\sigma} \qquad (4.34)$$

ونكتبه على الشكل

$$= \sum_{\rho<\sigma} + \sum_{\rho>\sigma}$$

ونبادل في الحد الثاني التسمية : ρ عوضاً عن σ و σ عوضاً عن ρ ونلاحظ أن $F_{\rho\sigma} = -F_{\sigma\rho}$ ليصبح على الشكل

$$F'_{\mu\nu} = \sum_{\rho<\sigma} \left(A_{\mu}{}^{\rho} A_{\nu}{}^{\sigma} - A_{\mu}{}^{\sigma} A_{\nu}^{\rho} \right) F_{\rho\sigma} \qquad (4.34)'$$

سنترك للقارئ كتمرين إيجاد $\vec{E}'$ و $\vec{B}'$ انطلاقاً من هذه العلاقة.

ملحق الفصل السابع

مولدات زمرة لورانتس

أشرنا في نهاية ملحق الفصل الخامس إلى إمكانية كتابة الزمرة الجزئية بوسيط واحد على شكل أسي (العلاقة 18) ونعني بذلك أن كل عنصر من عناصر المصفوفة التابعة لوسيط واحد قابل للاشتقاق إلى ما لانهاية (من الصف C^{∞}). سنعين الآن مولدات زمرة لورانتس (المتوقفة على ستة وسطاء) مبتدئين بزمرة الدورانات التي هي زمرة جزئية من زمرة لورانتس $SO(3) \subset SO(3,1)$: ليكن لدينا المتجهة $\vec{r} = (x, y, z)$ التي تدور حول Oz بزاوية قدرها φ. لدينا

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (1)$$

ننشر $\cos\varphi$ و $\sin\varphi$ في جوار $\varphi = 0$ ونكتب المصفوفة على الشكل

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

$$+ \frac{\varphi^2}{2!} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\varphi^3}{3!} \begin{pmatrix} & \cdots & \end{pmatrix}$$

إن المصفوفة الأولى في الطرف الأيمن هي المصفوفة الواحدية I؛ نرمز للمصفوفة، جداء φ، بـ Λ_3

$$\Lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ونلاحظ أن جداء $\frac{\varphi^2}{2!}$ هو مربع هذه المصفوفة Λ_3^2 وجداء $\frac{\varphi^3}{3!}$ هو مكعبها Λ_3^3 وهكذا.، بحيث يمكننا كتابة المصفوفة (2) التي رمزنا لها بـ D^{-1} $(5.(1.15)_1)$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I + \varphi\Lambda_3 + \frac{\varphi^2}{2!}\Lambda_3^2 + \frac{\varphi^3}{3!}\Lambda_3^3 + \ldots$$

$$D^{-1} = e^{\varphi\Lambda_3} \qquad (2)'$$

إن Λ_3 هي مولدة دوران المتجهة $\vec{r}$ حول Oz.

نقوم بالعمل ذاته في الدوران حول Ox حيث المصفوفة هي C^{-1} ‎(5.(1.15)2) والوسيط هو الزاوية θ لنجد أن

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = I + \theta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\theta^2}{2!}\begin{pmatrix} & \cdots & \end{pmatrix} \qquad (3)$$

ونرمز لمولد الدوران حول Ox بـ Λ_1 :

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad م1$$

رأينا في ((5.(1.16)) أن دوران جملة المحاور OXYZ لتنطبق على Oxyz هو جداء ثلاثة دورانات

$$\mathcal{A} = B \circ C \circ D$$

وهو مؤلف من دورانين حول المحور الثالث، D و B، ودوران حول Ox، C. إن دوران المتجهة هو، كما نرى هنا، $\mathcal{A}^{-1}$ ((5.(1.21)). أي أن

$$\vec{r}' = \left(D^{-1} \circ C^{-1} \circ D^{-1}\right)\vec{r}$$

$$\vec{r}' = g\vec{r} = e^{\varphi\Lambda_3} e^{\theta\Lambda_1} e^{\psi\Lambda_3}\vec{r} \qquad (4)$$

ونكون على هذا النحو قد كتبنا عنصر زمرة الدوران $g \in SO(3)$ على شكل أسي بواسطة مولدين فقط، رغم أن عدد الوسطاء ثلاثة، لأن مولد الدوران حول Oy، ولنرمز له بـ Λ_2 ليس مستقلاً عن المولدين الأولين؛ ذلك أن دوران المتجهة بزاوية θ حول Oy تعطيه المصفوفة

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} = I + \theta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots$$

و

$$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad م2$$

نرى من م3 و م1 أن

$$\Lambda_3\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

و

$$\Lambda_1\Lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$\Lambda_3\Lambda_1 - \Lambda_1\Lambda_3 = \Lambda_2$$

م2

أي أن المولد Λ_2 معرف انطلاقاً من هذه العلاقة، نكتب، بتسمية الطرف الأيسر مبدل Commutator Λ_3 و Λ_1 ونرمز له بـ $[\ ,\ ]$

$$[\Lambda_3, \Lambda_1] = \Lambda_2$$

ولدينا بصورة عامة

$$[\Lambda_i, \Lambda_j] = \varepsilon_{ijk}\Lambda_k \qquad i, j, k = 1,2,3 \qquad (5)$$

حيث ε_{ijk} التانسور مضاد التناظر تماماً من الرتبة الثالثة أي أنه يساوي الصفر إذا تساوى اثنان من الأدلة الثلاثة، يساوي 1 إذا كان ترتيب i, j, k دورياً و $1-$ إذا كان مضاد الدوارية.

لقد اخترنا زوايا أولر في (4) لكتابة الدوران g، يمكننا اختيار مركبات متجهة الدوران الآني $\vec{\omega}$ وكتابة g على الشكل

$$g = e^{\omega_x\Lambda_x + \omega_y\Lambda_y + \omega_z\Lambda_z} \qquad (6)$$

ولننظر إلى كيفية تعيين هذه المولدات Λ_x، Λ_y، Λ_z؛ لنكتب g على شكل أسي $g = e^{\Lambda}$.

ثم نكتبه في جوار المتجهة $\vec{r}$

$$g\vec{r} = \vec{r}' = (I + \Lambda)\vec{r} \qquad (7)$$

هذا من جهة، لدينا من جهة أخرى المتجهة $\vec{r}'$ في جوار $\vec{r}$

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

تتطابق المتجهة المشتبهة $\vec{\omega}$ مع المصفوفة مضادة التناظر التالية

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \equiv \Lambda \qquad (8)$$

لدينا فعلاً $\vec{\omega} \times \vec{r} = \Lambda\vec{r}$ و Λ هي مولد الدوران g.

نكتبها على الشكل

$$\Lambda \equiv \omega_x\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \omega_y\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \omega_z\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

وبأخذ م3، م1، م2 بعين الاعتبار نرى أن Λ_x، Λ_y، Λ_z تنطبق على Λ_1، Λ_2، Λ_3.

$$\Lambda = \omega_x\Lambda_1 + \omega_y\Lambda_2 + \omega_z\Lambda_3 \qquad (6)'$$

تحقق أن Λ مضاد التناظر كما تقتضيه العلاقة (16) من ملحق الفصل الخامس.

نكتب Λ على شكل مجموع ثلاثة جداءات مضادة التناظر بأن نعود إلى (8) ونكتب $\omega_{32} = -\omega_{23} = \omega_x$ ، $\omega_{31} = -\omega_{13} = \omega_y$ ، $\omega_{12} = -\omega_{21} = \omega_z$ ، ثم نكتب المولدات بدليلين يعينان دوران المستوي فـ Λ_1 هي دوران المستوي y,z حول Ox ، نرمز لها بـ M^{23} ، نرمز كذلك لـ Λ_2 ، دوران المستوي xz حول Oy بـ M^{31} وأخيراً لـ Λ_3 ، دوران المستوى xy حول Oz بـ M^{12} ونكتب Λ على الشكل

$$\Lambda = -\omega_{23}M^{23} - \omega_{31}M^{31} - \omega_{12}M^{12} \qquad (6)''$$

إن M^{ij} مثلها مثل ω_{ij} مضادة التناظر بحيث يمكننا كتابة Λ على الشكل

$$\Lambda = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j\neq i}^{3} -\omega_{ij}M^{ij} \qquad (6)'''$$

ودوران المتجهة $\vec{r}$ على الشكل

$$\vec{r}' = g\vec{r} = e^{-\frac{1}{2}\omega_{ij}M^{ij}}$$

حيث الجمع على كل الأدلة i و j من الواحد إلى ثلاثة والتي لا تعطي نظراً لتضاد التناظر (العناصر القطرية ii مساوية للصفر) سوى ستة عناصر. وقد أخذنا نصف مجموع العناصر الستة الباقية $\omega_{ij}M^{ij} = \omega_{ji}M^{ji}$.

أما دوران جملة المحاور ككل فهو بالمصفوفة $\tilde{g} = g^{-1}$ كما رأينا

$$g^{-1} = e^{\frac{1}{2}\omega_{ij}M^{ij}} \qquad (9)$$

يصح كل ما فعلناه على زمرة لورانتس بواسطائها الستة؛ رأينا أن الانتقال من مقرن غاليلي إلى آخر يسير بحركة منتظمة موازية للمحور Ox' هو دوران المستوي x^ox' تحدده المصفوفة

$$\begin{pmatrix} ch\varphi & sh\varphi & 0 & 0 \\ sh\varphi & ch\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (10)$$

ننشر كما فعلنا في (1) الجيوب الزائدية بجوار الصفر

$$ch\varphi = 1 + \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!}$$

$$sh\varphi = \varphi + \frac{\varphi^3}{3!} + \cdots$$

ونحصل على مولد تحويل لورانتس الخاص :

$$\begin{pmatrix} ch\varphi & sh\varphi & 0 & 0 \\ sh\varphi & ch\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I + \varphi\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\varphi^2}{2!}(\ldots) + \ldots$$

نرمز لهذا المولد بـ M^{01} لنبين، كما فعلنا في زمرة الدورانات أنها دوران المستوي $x^o x^1$

$$M^{01} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{م}_4$$

نرمز بنفس الشكل بـ M^{02} لدوران المستوي $x^o x^2$:

$$M^{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{م}_5 \qquad (11)$$

ولدوران المستوي $x^o x^3$ بـ M^{03} :

$$M^{03} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{م}_6$$

أما الدورانات الأخرى فهي دورانات مكانية صرفة مولداتها هي م1، م2، م3، نكتبها في فضاء مينكوفسكي كمصفوفات 4×4 بإضافة أصفار إلى الصف الأول والعمود الأول حيث x^o الذي لا يلعب أي دور في الدورانات المكانية ونحتفظ بنفس الرموز

$$M^{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \Lambda_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \qquad \text{م}_1$$

$$M^{31} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \Lambda_2 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \qquad \text{م}_2$$

$$M^{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \Lambda_3 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \qquad \text{م}_3$$

إن المولدات الزمانية-المكانية (11) متناظرة، نكتب الزوايا المقابلة φ_1، φ_2، φ_3 على الشكل المتناظر ω_{01}، ω_{02}، ω_{03} (خلافاً للتانسور مضاد التناظر ω) ونكتب تحويلات لورانتس الخاصة كما فعلنا في (9) على الشكل

$$e^{\frac{1}{2}\left(\omega_{0i}M^{0i}+\omega_{i0}M^{i0}\right)} \qquad i=1,2,3 \tag{12}$$

بحيث يصبح عنصر زمرة الدوران في فضاء مينكوفسكي على الشكل

$$A=e^{\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}} \tag{13}$$

الجمع على كل ρ و σ، حيث ρ و σ تساوي 0,1,2,3 لكن $\omega_{\rho\rho}$ و $M^{\rho\rho}$ تساوي الصفر والعناصر 12 الباقية $\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}=\omega_{\sigma\rho}M^{\sigma\rho}$ (متناظرة) بحيث لا يبقى إلا ستة مولدات وستة وسطاء.

لنلاحظ أن المولدات (11) التي تعين تحويلات لورانتس الخاصة ليست مستقلة عن بعضها ونجد على غرار (5) :

$$\begin{cases}\left[M^{01},M^{02}\right]=M^{21}\\ \left[M^{02},M^{03}\right]=M^{32}\\ \left[M^{01},M^{03}\right]=M^{31}\end{cases} \tag{14}$$

أي أننا نعرف أي تحويل خاص بدليل تحويل خاص ودورانين في الفضاء العادي كما برهنا في العلاقة (2.28).

يمكننا بطبيعة الحال إضافة المبدلات بين الدورانات المكانية الصرفة وبين تحويلات لورانتس الخاصة ولكننا سنكتفي بهذا القدر هنا وسنعود إلى الموضوع في دراسة السبين والميكانيك الكمومي النسبوي.

ثبت المصطلحات

اندفاع (عزم خطي)	108-88	Linear momentum, impulsion, impuls
اندفاعات عامة	282-277-275-271-88	
انعطاف	157-156-110-108-22	
إحداثيات		Coordinates
- اسطوانية	271	
- ديكارتية	280-33	
- دوارية (مهملة)	273-271	Cyclic
- عامة	277-275-271-267-262-258-253	
- قانونية	283	
- قطبية	183-177-174-69	
اصطدام		
- مرن	159-156-155-154	Elastic
- غير مرن	154	Inelastic
استدلال رجعي (تكرار)	287	Récurrence
استطالة	147-142-141-128-109-81	
- زاوية	132	
استطاعة	146-143	
انحفاظ	25	
- العزم الزاوي	269-226-218	
- الاندفاع الخطي	267-173-163-151	
- الطاقة	-127-126-125-123-121-119	
	277-266-224-161-151-131	
(انظر المقادير الصامدة)		
أصغري		Minimal
أعظمي	206-177	Maximal
انسحاب	177	Translation
انتقال ابتدائي	189-39-38-37-23	
- زاوي	116	
اهتزاز	193	
- متخامد	132-129	Damped
- قسري	143-136	Forced
	146-141-138	

أقطار مترافقة	185	
أثير	338-305	Ether
إرنان	142-139-29	Resonance
إنجاز	243	Realization
أنغستروم	27	
الأيس (الموجود)	300	Sein
بوزون	15	
براكيستوكرون	255	Brachistochrone
تانسور	351-332	
– متري	320-244	
– العطالة	209	Inertie
– مضاد التناظر	357-353-352	
تأيين	8	
تباعد (تفرق)	303	Divergence
– - مركزي	183-177	Excentricity
تبرير إلهي	301	Théodicée
تثاقل	76	Gravitation
تجانس الفضاء	267-150-94-37-24	Homogeneity
– الزمان	266-151-125-94	
تحليل الأبعاد	3	
تحويل نقطي	281	Transformation
تحويلات غاليلية	95-93	
– لورانتس	316	
– – الخاصة	319	boost
– بوانكاريه	320	
– قانونية	280	Canonic
تداخل الضوء	305	
تدرج (غراديان)	123	Gradient
تدني (المخروط)	227	Degeneration
تسارع كوريوليس	227-74	
قوى كوريوليس	233-231	
تشاكل	242	Homorphism
– تقابلي (تماكل)	243	Isomorphism
تغيرات (حساب الـ)	257-253	Variations

تفاعل	76-7-5	Interaction
- آني (عن بُعد)	79-76	Instantaneous
- التماس	80-75	
التفاعلات الأساسية	76-14	
تفكك	315-161	Decay, Désintégration
- عفوي	342	
تكامل		Integral
- أولي	270-265-130-127	
- أهليلجي	274-135	Elliptical
تناحي الفضاء	269-95-25-24	Isotropy
تناظر (انظر زمرة)	245	Symmetry
تضاد التناظر	358-278	
تمثيل خطي	243	Linear Representation
تواتر (تردد)	66	Frequency
- الزاوي	147-132-65	
توزيعة معتدلة	296	Tempered distribution
توضيع	147-130-110-80-23	Superposition
جداء		
- داخلي (انظر شكل خطي)	244	
- ثلاثي	59	
- سلمي	45	
- متجه	50	
- مختلط	59	
- مزدوج	210	
جزيء	7	Molecule
- متناظر، قطبي	81	
حدث	310	Event
- من النوع المكاني، الزماني، الضوئي	314	

حقل	165-79-77	
– التثاقل	164-125-96-78	
– سلمي	294-77	
– كهربائي	125-109-102-78	
– مغنطيسي	104-58	
– التفاعل الكهرطيسي	294	
– خارجي	271-263	
حركة		
– دورية	28	
– لولبية (حلزية)	106	Helicoïdal
– مطلقة – نسبية	74	
خطي		Linear
تغير – للقوة	132	
تطبيق –	147	
شكل – (صيغة)	46	Form
خطاني	46	Bilinear
متعدد الخطية	332	Multilinear
درجات الحرية	252-201	
دليل – معادلة الدليل	184	
دالة		
– ديراك	296	
– لاغرانج (اللاغرانجي)	335-260-258-252	
مبرهنة الدالات الضمنية	289	Implicit
– المتجانسة	266	
– مولدة التحويل	291-281	
دالتية	296-254	Functional
حساب –	254	Functional Analysis
مشتق دالتي	257	
دوامة		Top
– كروية (متناظرة)	272 - 213	Symmetrical
– غير متناظرة	212	
دوار	218	Rotator
دواري	55-51	Cyclic
دوران	191-189	

	303	
تدوير (عقصة)	334	Curl - Rotationnel
دالامبرلاسي	318	D'alambertien
زاوية زائدية	242	
زمرة	242-52	Group
- التبديلات	190	Permutation -
- الدورانات	323	
- بوانكاريه	247-195	
- تآلفية	249	
- جزئية		
- لورانتس	320	
- - المقصورة	322	Restricted, Restreint
- لي	247	Lie
زمر التناظر	245	
مولد الـ -	355-249	Generator
زمن ذاتي	314	Proper
زيغ	327	Aberration
راسم الخطى	63	
- الطيف	108	
السبينور	332	
سعة (انظر استطالة)	305-129	Amptitude
السوية	58-54	Parity
السيكلوترون	110	
سيكلوئيد	256	
شرط لورانتس (الشرط الإضافي)	344	Subsidiary
شدة		Intensity
- القوة	81-79-78	
- الضوء	305	
صلة (قيد)	252-238-202	Constraint, Liaison
- كلية	252	Holonome
صمود (انظر انحفاظ)	332-144-131-54	Invariance
الضلع القائم	184	

طاقة		
– التثاقل	131	
– الارتباط	342	
الـ – الذاتية	169	
الـ – الداخلية	269-161-152	
الـ – الكامنة	132-119-117	
الـ – الكلية	152-119	
طواف	275-219-22	Precession
طور (انظر فضاء الطور)	133	Phase
عزم (انظر اندفاع)		Momentum
– زاوي	174-173	
– العطالة	204-203	Inertie
– القوى	171-83	
عزوم مترافقة	295-282	Conjugate momenta
عدد		
– أفوغادرو	8	
– الكتلة، الذرية	10	
عطالة (انظر عزم)		
تانسور الـ –	211-209	
قانون الـ –	269-88	
محاور الـ – الرئيسية	224-214-212	
كتلة عطالية	96	
عمر المادة (الجسيم)	316-29-13	
عمل	122-117-115	
– القوة المشتقة من كمون	124	
وحدة الـ –	116	
علاقة شال	246-40	
فرضية التكافؤ (مبدأ)	103	
فرق الطريق	305	
فعل	292-251	Action
الـ – الأصغر	252	Least Action
فلك/ مدار (انظر محرك، مسار)	182-180-26-21	Orbit
فوق السطح	313-293	Hypersurface

فضاء — 23-47-243 — Space
- إقليدي — 287
- تام — 37-39-246-312 — Complet
- تآلفي — 293-312-323-345 — Affine
- رباعي الأبعاد
- شبه إقليدي — 244-312
- الطور — 277-290 — Phase
- متجهي — 37-42-47 — Linear/Vectoriel
- منظم — 287 — Normed
- مينكوفسكي — 312-317-320
- الهيئة — 253-280 — Configuration
- ثنوي الـ — 243-277-312 — Dual Space
الـ فيرمي — 27
فيرميون — 16
قوة — 75
- جاذبة — 76-175-232
- عامة — 268
- مشتقة من كمون (محافظة) — 123-124-128
- نابذة — 76-81-175-235
قوى
- خط فعل الـ — 82-85
- شبيهة — 230 — Pseudo
- مركزية — 84-172-173
كثافة
- اللاغرانجي، لاغرانجي الحقل — 292
- الشحنة، التيار — 304
- الكتلة — 204
- الهاميلتوني — 295
كمون
الـ - الفعال — 167-169 — effective
كتلة — 175-274
الـ - المختصرة — 155
- مركز الـ — 42-96-153-268
- معْلَم مركز الـ — 151

لابلاسي	334	Laplacien
لامة (بواسون)	296-278	Bracket, Crochet
لوص	327	Parallax
مسار (انظر محرك)		
– القطب	224	Polhode
– – المقترن	224	Herpolhode
مترابط	289	Connexe
متجهة	33	Vector
– قائمة التوقيت، مضادة التوقيت	322	Orthochrone - Antichrone
– مشتبهة (شبيهة)	55	Pseudo –
طويلة الـ –	49-45	
مركبة الـ –	42	
مجسم القطع الناقص العطالي	213	
– – – – المركزي	216	
محرك (مسار)	62	Trajectory
– مائل	107	Skew, Gauche
مصفوفة	245-211-190	
– جاكوبية	286	
– قطرية	245-214-212	
مقلوب الـ –	286-245-191	
منقول الـ –	245-191	
ميقاتية	136-94-61	
متزامن	94	Simultaneous
مسايرة التغيير	332	Covariance
المستوي اللاصق	66	Osculatory
محور		
– رئيسي (مركزي)	203	
– الدوران الآني	201-192	Instantaneous Axis of Rotation
مخروط	227	
– الضوء	313	

معادلة		
ال - القانونية	275	
- القيم الخاصة	216-212-192	
- المستوي	50	
- المستوي المماس	298-222	
- هاميلتون	296-275	
- - جاكوبي	337-285	
معامل (عامل)		Coefficient
- زاوي	298	
- الاحتكاك	112	
- نوعية الاهتزاز	146	
مطراف	254	Extremal
مضاريب لاغرانج	237	
مقرن (جملة محاور)	190-91-51	
- غاليلي (عطالي)	98-96-92	
المقادير الصامدة (انظر انحفاظ)	324	
موضوعة (مصادرة، مبدأ)	91-87-80-61-19	Axiome
مول	8	Mole
مؤثر	190-147	Operator
- تفاضلي	147	
نصف قطر الانحناء	68	Curvature
نظمة (انظر مقرن)	55-42-2	System
نظائر	11-9	Isotopes
ال نسبية		
ال - الغاليلية	259-95-93	
ال - الخاصة	309	
نواس		
ال - البسيط	131	
ال - السيكلوئيدي	263	
- فوكو	237	
ال وجود	300	Dasein
ال هاميلتوني	276	
ال هزاز التوافقي	177-128	Harmonic Oscillator
هيكلة	281-275	Formalism

أسماء العلم

	الصفحات	الأسماء
	88-7	ابن سينا
	233	البيروني
	301	التوحيدي
Ångström	27	أنغستروم
Avogadro	8-7	أفوغادرو
Balmer	350	بالمر
Born	309	بورن
Bradley	327	برادلي
Cauchy	322-287-47	كوشي
Chadwik	10	شادويك
Cavendish	171-170-1	كفانديش
Coriolis	234-233-232-227-74	كوريوليس
D'alambert	334	دلامبير انظر الدالامبرسي
Dalton	7	دالتون
Democritus	6	ديمقريطس
Dirac	332-296-12	ديراك
Doppler	340-338	دوبلر
Einstein	-117-91-87-22-15-14-13-9 309-181	أنشتاين
Epicurus	6	أبيكورس
Euler	-294-255-224-220-196-193 296-295	أولر
Fermat	301-267	فيرما
Fermi	27-12	فيرمي
Foucault	237	فوكو

Fourier	138	فوريي
Galilée	165-111-88	غاليله
Gauss	21-20	غاوص
Glashaw	15	غلاشو
Gay-Lussac	7	غي لوساك
Gell-Mann	14	غيلمان
Hamilton	-285-283-282-277-276-275 337-336-296-295	هاميلتون انظر هاميلتوني
Hooke	128-122-81	هوك
Huygens	263-91	هويغنز
Jacobi	337-299-288-285-283-278	جاكوبي
Joliot-Curie	10	جوليو-كوري
Kepler	181-179-175-164-70	كبلر
Klein	247	كلاين
Koenig	152	كونينغ
Lagrange	-294-292-284-261-258-237 335-300	لاغرانج انظر لاغرانجي
Laplace	343-334-283-53-5	لابلاس انظر لابلاسي
Lavoisier	7	لافوازيه
Legendre	298	لوجاندر
Leibniz	301-91	لايبنيز
Leucipus	6	لوسيبس
Lie	247	لي
Liouville	290-286	ليوفيل
Lobatchevsky	22	لوباتشفسكي
Lorentz	-330-323-322-320-319-307 -354-353-350-344-340-334 360	لورانتس
Maupertius	301	موبيرتيوس

Minkowsky	-329-323-320-312-245-48 360-359-352-344-334-331	مينكوفسكي
Michelson	338-316-309-305	مايكلسون
Morlay	338-316-309-305	مورلي
Newton	-116-96-95-87-61-27-16-7 -262-230-165-151-148-121 338-301-267	نيوتن
Pauli	16-14-12	باولي
Poincaré	320-309	بوانكاريه
Poinsot	222	بوانسو
Poisson	297-296-279-277	بواسون
		انظر لامات -
Prout	9-8	بروت
Riemann	22	ريمان
Salam	15	سلام
Schwarz	322-47	شفارتز
Schwarzshild	21	شفارتزشيلد
Stark	350	شتارك
Weinberg	15	فاينبرغ
Wien	350	فين
Weyl	332	فايل
Whitaker	309	وايتكر
Yukawa	11	يوكاوا
Zeldowich	31	زيلدوفيتش
Zweig	14	تزفايغ

طوب بريس
العنوان: رقم 22، زنقة كلكوتة، المحيط، الرباط
الهاتف: 21 31 73 37 05 (212+) - الفاكس: 28 39 26 37 05 (212+)
الموقع الإلكتروني: www.toppress.ma
البريد الإلكتروني: toppress2@gmail.com

أ. د. محمد البغدادي

- أستاذ الفيزياء النظرية
- مؤسس ومدير مختبر الفيزياء النظرية في جامعة محمد الخامس بالرباط (1972-1998)
- عضو أكاديمية العلوم للعالم الثالث - TWAS - 1987.
- درس الرياضيات والفيزياء في جامعات مختلفة، وباللغة العربية على وجه الخصوص في جامعة دمشق والمدرسة العليا للأساتذة بالرباط.
- ألف كتب دراسات عليا بالفرنسية: النظريات الكمومية النسبوية، الرياضيات - الفيزياء (بجزئين) بدعم من وزارة التعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي بالمغرب.
- ترجم إلى العربية:

* كتاب كارل بوبر: «منطق البحث العلمي»، عن الألمانية.

* كتاب رشدي راشد: «الهندسة وعلم المناظر في ضحى الإسلام»، عن الإنجليزية.

* كتاب رشدي راشد «من الخوارزمي إلى ديكارت»، عن الفرنسية، قيد الإنجاز.

محمد البغدادي
أسس الفيزياء المعاصرة
أسس الفيزياء المعاصرة
أسس الفيزياء المعاصرة
أسس الفيزياء المعاصرة
المجلد الأول
المجلد الثاني